

ВНУТРЕННЕЕ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА В ОДНОМЕРНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ. II

О.В.ПИКИЧЯН

Поступила 8 июля 2015

Принята к печати 2 марта 2016

В нелинейной граничной задаче определения поля излучения внутри одномерной анизотропной среды, освещенной извне со стороны ее обеих границ, показано, что использование формул сложения слоев в полулинейных системах дифференциальных уравнений: переноса излучения, инвариантного погружения, полной инвариантности Амбарцумяна позволяет свести их к раздельным уравнениям с начальными условиями. Влево и вправо идущие поля в итоге находятся независимо друг от друга. Более того, когда одно из них определено, другое находится непосредственно из явного выражения. Математически сформулировано общее свойство эквивалентности операторов по отношению к определенной математической форме, выражения или функционала. Из взаимной эквивалентности дифференциальных операторов кинетического уравнения Больцмана (уравнения переноса излучения) и функционального уравнения полной инвариантности Амбарцумяна следуют новые, так называемые, кинетические уравнения эквивалентности, которые помимо раздельности обладают также свойством линейности. Приводятся также формулы для частных задач одностороннего освещения среды, играющих в данном случае роль дополнительной вспомогательной информации в начальных условиях сформулированных задач Коши.

Ключевые слова: *перенос излучения; нелинейная задача переноса излучения; внутреннее поле излучения; принцип инвариантности*

1. Введение и цель работы. Данное исследование является продолжением работы [1] (далее П1), в которой была рассмотрена нелинейная задача определения интенсивности поля излучения $I_L^\pm(l; x, y)$ на глубине l внутри одномерной анизотропной рассеивающей и поглощающей среды конечной геометрической толщины L в предположении, что обе ее границы находятся под воздействием мощного возбуждающего излучения интенсивностей x и y . Были представлены формулы сложения слоев, приведен полный набор дифференциальных уравнений инвариантного погружения, а также была получена система функциональных уравнений полной инвариантности Амбарцумяна (ПИА). Были отмечены преимущества применения указанных уравнений.

Ниже мы рассмотрим новые возможности, упрощающие решение задачи внутреннего поля (ЗВП) излучения в среде. Они связаны с учетом формул сложения слоев в дифференциальных уравнениях переноса излучения и

инвариантного погружения, а также с выявлением некоторой эквивалентности дифференциальных операторов уравнения переноса и функциональных уравнений ПИА. Сначала во втором разделе покажем, что учет соотношений сложения слоев, как в линейных задачах (см., например, [2,3]), так и в нелинейном случае позволяет свести систему уравнений со связными влево и вправо идущими потоками излучения к раздельным уравнениям (см. также формулы (42)-(45) в [4]). Далее в разделе 3 выявим и математически сформулируем свойство эквивалентности дифференциальных операторов кинетического уравнения Больцмана (УБ) и функционального уравнения ПИА. Указанное свойство представляет важность и для широкого круга более общих задач физической кинетики [5]. Оно, как показывается в разделе 4, дает новую возможность дальнейшего упрощения решения ЗВП путем сведения ее к новым раздельным линейным дифференциальным уравнениям, т.е. к так называемым кинетическим уравнениям эквивалентности (КУЭ). Обсуждаются также постановка начальных условий, сильные и слабые стороны использования полученных уравнений ПИА и КУЭ и т.д. Далее, в разделе 5 рассматриваются некоторые частные задачи переноса, результаты которых используются при решении ЗВП в качестве вспомогательной информации. В разделе 6 дается алгоритм решения ЗВП. Полученные результаты вкратце обсуждаются в заключительном разделе. Некоторые частные результаты данного исследования, без приведения доказательств, ранее были представлены нами в [4,6-8].

Ниже используются обозначения, введенные в П1: $\alpha^{\pm}(I_L^{\pm}, I_L^{\pm})$ - классический интеграл столкновений в данной задаче переноса, т.е. закон переработки излучения в каждой точке среды веществом ее элементарного объема, находящегося под двухсторонним воздействием поля излучения. $u_L^{\pm}(x, y)$ - интенсивности излучений, выходящих через правую - "+" и левую - "-" границы среды, т.е. решение задачи отражения и пропускания (ЗОП)

$$I_L^+(L; x, y) \equiv u_L^+(x, y), \quad I_L^-(0; x, y) \equiv u_L^-(x, y), \quad (1)$$

а величины $X_L^{\pm}$ и $Y_L^{\pm}$ - решения ЗВП при освещении среды со стороны лишь одной из ее границ:

$$I_L^+(l; x, 0) \equiv X_L^+(l, x), \quad I_L^-(l; 0, y) \equiv Y_L^-(l, y). \quad (2)$$

2. *Совместное использование соотношений сложения слоев и дифференциальных уравнений поля излучения.* Совместное использование полученных в П1 соотношений сложения слоев и дифференциальных уравнений внутреннего поля излучения - $I_L^{\pm}$ позволяет, аналогично линейному (см., например, [2,3]) случаю, упростить решение рассматриваемой задачи. Нахождение величин I_L^+ и I_L^- в полулинейных дифференциальных

уравнениях систем: как переноса излучения

$$\frac{\partial I_L^\pm}{\partial l} = \pm \alpha^\pm(I_L^+, I_L^-), \quad (3)$$

где: $I_L^\pm = I_L^\pm(l; x, y)$, $0 < x, y < \infty$, $L \geq 0$, $0 \leq l \leq L$, при граничных условиях

$$I_L^+(0; x, y) = x, \quad I_L^-(L; x, y) = y, \quad (4)$$

или начальных условиях

$$I_L^+|_{l=0} = x, \quad I_L^-|_{l=0} = u_L^-(x, y) \quad \text{или} \quad I_L^+|_{l=L} = u_L^+(x, y), \quad I_L^-|_{l=L} = y, \quad (5)$$

так и инвариантного погружения (см. ниже формулу (10)) и ПИА, формулы (30) в П1

$$\left[\alpha^+(x, u_L^-) \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] I_L^\pm = \pm \alpha^\pm(I_L^+, I_L^-), \quad (6)$$

с начальными условиями

$$I_L^\pm|_{x=0} = Y_L^\pm(l; y) \quad \text{или} \quad I_L^\pm|_{y=0} = X_L^\pm(l; x), \quad (7)$$

осуществляется совместно. Пользуясь формулами (8) и (9) в П1

$$I_L^+(l; x, y) = u_l^+(x, I_L^-(l; x, y)), \quad (8)$$

$$I_L^-(l; x, y) = u_{L-l}^-(I_L^+(l; x, y), y), \quad (9)$$

их можно свести к отдельным уравнениям для каждой из искомых величин. Подставляя (8) и (9) последовательно в системы уравнений переноса (3) и инвариантного погружения (см. формулу (27) в П1)

$$\frac{\partial I_L^\pm}{\partial L} = \alpha^\pm(x, u_L^-) \frac{\partial I_L^\pm}{\partial x} \mp \alpha^\pm(I_L^+, I_L^-), \quad (10)$$

а также в систему функциональных уравнений ПИА (6), получим новые уравнения, где влево и вправо идущие поля уже разделяются, так, уравнение переноса для интенсивности излучения, идущего вправо, переписывается в виде

$$\frac{\partial I_L^+}{\partial l} = +\alpha^+(I_L^+, u_{L-l}^-(I_L^+, y)), \quad (11)$$

с начальным условием

$$I_L^+|_{l=0} = x \quad \text{или} \quad I_L^+|_{l=L} = u_L^+(x, y), \quad (12)$$

а для идущего влево, соответственно

$$\frac{\partial I_L^-}{\partial l} = -\alpha^-(u_l^+(x, I_L^-), I_L^-), \quad (13)$$

$$I_L^-|_{l=0} = u_L^-(x, y) \quad \text{или} \quad I_L^-|_{l=L} = y. \quad (14)$$

Уравнения же инвариантного погружения преобразуют форму:

$$\frac{\partial I_L^+}{\partial L} = \alpha^+(x, u_L^-) \frac{\partial I_L^+}{\partial x} - \alpha^+(I_L^+, u_{L-1}^-(I_L^+, y)), \quad (15)$$

$$I_L^+|_{x=0} = Y_L^+(l; y) \quad \text{или} \quad I_L^+|_{L=l} = u_L^+(x, y), \quad (16)$$

$$\frac{\partial I_L^-}{\partial L} = \alpha^+(x, u_L^-) \frac{\partial I_L^-}{\partial x} + \alpha^-(u_L^+(x, I_L^-), I_L^-), \quad (17)$$

$$I_L^-|_{x=0} = Y_L^-(l; y) \quad \text{или} \quad I_L^-|_{L=l} = y. \quad (18)$$

Функциональные уравнения ПИА (6) при этом переписутся в виде:

$$\left[\alpha^+(x, u_L^-) \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] I_L^+ = +\alpha^+(I_L^+, u_{L-1}^-(I_L^+, y)), \quad (19)$$

$$I_L^+|_{x=0} = Y_L^+(l; y) \quad \text{или} \quad I_L^+|_{y=0} = X_L^+(l; x), \quad (20)$$

$$\left[\alpha^+(x, u_L^-) \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] I_L^- = -\alpha^-(u_L^+(x, I_L^-), I_L^-), \quad (21)$$

$$I_L^-|_{x=0} = Y_L^-(l; y) \quad \text{или} \quad I_L^-|_{y=0} = X_L^-(l; x). \quad (22)$$

Соотношения (11, 13, 15, 17, 19, 21) естественно назвать разделенными формами (РФ) исходных систем. Следует отметить, что для использования этих форм при определении внутреннего поля на глубине l заранее должно быть найдено решение ЗОП для двух значений геометрических толщин l и $l-L$. Подчеркнем однако, что с помощью решения полученных задач Коши достаточно здесь найти лишь одну из величин I_L^+ или I_L^- , после чего другая будет определена из соответствующего явного выражения (8) или (9).

3. Свойство эквивалентности дифференциальных операторов кинетического УБ и функционального уравнения ПИА. Нетрудно заметить, что правые части уравнений (3), (6) идентичны и одновременно равны интегралу столкновений - $\alpha^+(I_L^+, I_L^-)$, а в (11), (19) и (13), (21) - выражаются его видоизмененными формами $\alpha^+(I_L^+, u_{L-1}^-(I_L^+, y))$ и $\alpha^-(u_L^+(x, I_L^-), I_L^-)$, соответственно. В левых же частях этих уравнений фигурируют существенно разные по физической природе дифференциальные операторы соответственно кинетического УБ и функционального уравнения ПИА:

$$\hat{B} \equiv \frac{\partial}{\partial l} \quad \text{и} \quad \hat{A} \equiv \alpha^+(x, u_L^-) \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (23)$$

С помощью этих операторов, при соответствующих граничных и начальных

условиях, формулируются математические задачи совершенно разного рода: двухточечная краевая задача - (3, 4), задачи Коши - (3, 5), (6, 7), (11, 12), (13, 14), (19, 20), (21, 22). При этом, однако, физическим решением всех этих, отличных друг от друга, математических задач является одна и та же (!) искомая функция $I_L^\pm \equiv I_L^\pm(t, x, y)$. Наличие подобной конкретной связи между операторами, уместно выделить математически и сформулировать в виде отдельного общего свойства их эквивалентности.

Определение: По отношению выражения $F\{\dots\}$, операторы $\hat{H}, \hat{W}, \dots, \hat{V}$ назовем " $F_{p,q,\dots,k}$ - эквивалентными между собой", если существует такая функция f (или функции $\dots, f, \dots$), воздействие на которую (которые) каждым из этих операторов, при удовлетворении определенных условий $p, q, \dots, k$, соответственно, приводит к одному и тому же выражению $F\{\dots f, \dots\}$.

Обозначим кратко эту эквивалентность посредством

$$\hat{H}_p \stackrel{F}{=} \hat{W}_q \stackrel{F}{=} \dots \stackrel{F}{=} \hat{V}_k. \quad (24)$$

По определению (24), например, операторы задач (3, 4), (3, 5), (6, 7), (11, 12), (13, 14), (19, 20), (21, 22) являются между собой $\alpha_{(4),(5),(7)}$ и $\alpha_{(12),(20)}, \alpha_{(14),(22)}$ - эквивалентными в формах:

$$\hat{B}_{(4)} \stackrel{\alpha}{=} \hat{B}_{(5)} \stackrel{\alpha}{=} \hat{A}_{(7)} \quad \text{и} \quad \hat{B}_{(12)} \stackrel{\alpha}{=} \hat{A}_{(20)}, \quad \hat{B}_{(14)} \stackrel{\alpha}{=} \hat{A}_{(22)}. \quad (25)$$

4. *Кинетическое уравнение эквивалентности (КУЭ).* Уравнения в РФ (11, 13, 15, 17, 19, 21), как было указано выше, дают возможность раздельного определения внутреннего поля излучения в противоположных двух направлениях. Это было достигнуто путем учета формул сложения слоев в исходных дифференциальных уравнениях исследуемой ЗВП. Использование же сформулированного выше свойства эквивалентности между дифференциальными операторами кинетического УБ и функционального уравнения ПИА предоставляет другую возможность раздельного определения указанных интенсивностей $I_L^+(t, x, y)$ и $I_L^-(t, x, y)$. Подчеркнем, что системы (3) и (6) являются полулинейными, поскольку искомые величины нелинейным образом фигурируют лишь в их правых частях $\alpha^\pm(I_L^+, I_L^-)$, из-за чего и отыскивание величин I_L^+ и I_L^- ведется здесь связным образом. Используя же свойство эквивалентности (25) вместо (3) и (6) получаем новые уравнения

$$\frac{\partial I_L^\pm}{\partial t} = \left[\alpha^+(x, u_L^-) \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] I_L^\pm, \quad (26)$$

которые не только раздельные подобно (11, 13, 15, 17, 19, 21), но в отличие от них - также и линейные. Свойство эквивалентности (25) между $\hat{B}$ и $\hat{A}$ по отношению α : в случае - $\alpha_{(5),(7)}$, превращает

полулинейную систему ПИА (6) непосредственно в отдельные и линейные уравнения (26), а в других случаях - $\alpha_{(12),(20)}$, $\alpha_{(14),(22)}$, имеющиеся отдельные и полулинейные уравнения (11, 12), (13, 14), (19, 20), (21, 22) превращает в линейные (26). Уравнения (26), естественно, назвать кинетическими уравнениями эквивалентности (КУЭ). Начальные условия для КУЭ можно взять, например, из набора - (5), (7). При $l=0$ и $l=L$ (с учетом (3) и (5)) уравнения (26), по аналогии с (6), превращаются в известную систему квазилинейных уравнений ПИА для ЗОП (см., например, формулы (33) в П1)

$$\begin{cases} \left[\alpha^+(x, u_L^-) \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] u_L^+ = +\alpha^+(u_L^+, y) \\ \left[\alpha^+(x, u_L^-) \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] u_L^- = -\alpha^-(x, u_L^-), \end{cases} \quad (27)$$

с начальными условиями

$$а) u_L^+|_{y=0} = T_L^+(x), u_L^-|_{y=0} = R_L^-(x) \quad \text{или} \quad б) u_L^+|_{x=0} = T_L^+(y), u_L^-|_{x=0} = T_L^-(y) \quad (28)$$

и в два тождества. Примечательно, что если уравнение переноса (3) физически гласит, что изменение внутреннего поля (левая часть уравнений (3) и (26)) связано с локальной переработкой (на глубине l) излучения элементарным объемом среды (правая часть уравнения (3)), то уравнение (26) разъясняет, что подобное изменение поля равносильно (т.е. эквивалентно), также, определенным образом выбранному, бесконечно малому варьированию мощностей излучений падающих на обе внешние границы среды (правая часть (26)).

Относительно КУЭ (26) следует подчеркнуть, что:

- Их преимуществами по отношению системы ПИА (6) являются линейность и отдельность, а недостатком является то, что глубина l в них не является фиксированным параметром.

- По отношению (19), (21) преимущества уравнений (26) заключаются в линейности и отсутствии в них значений вспомогательных величин ЗОП, характеризующих составляющие слои с толщинами l и $L-l$, а недостаток заключается опять в том, что, как и в уравнениях переноса (3), глубина l здесь уже не является фиксированным параметром.

- По отношению к классической постановке граничной задачи переноса (3, 4) преимуществом (26) является линейность, отдельность и то, что представляет собой задачу Коши, а по отношению к задаче Коши (3, 5) преимуществом (26) является линейность и отдельность.

- По отношению РФ уравнений переноса (11, 12) и (13, 14) преимущество (26) заключается как в линейности, так и в не зависимости характеристик ЗОП от текущих значений параметра l .

При этом весьма примечательно, что в перечисленных двух последних случаях уже отсутствуют какие-либо недостатки, в указанном выше смысле, не считая того, что нелинейность задачи все же проявляет себя посредством появления производных по энергетическим переменным.

5. *Вспомогательные задачи, выступающие при решении основной ЗВП.* Величины $X_L^\pm(l; x)$ или $Y_L^\pm(l; y)$, описывающие внутреннее поле при одностороннем освещении среды извне, фигурировали в начальных условиях (7), (16), (18), (20), (22) основной ЗВП $I_L^\pm(l; x, y)$ в роли вспомогательных величин. Для их нахождения сформулируем соответствующие вспомогательные задачи Коши. В качестве первой вспомогательной задачи, в соответствующих уравнениях ЗВП, с учетом (2), поочередно перейдем к частным значениям $x=0$ и $y=0$. Действительно, полагая $y=0$ в уравнениях (10), (15), (17) и в соответствующих начальных условиях, для искомой величины $X_L^\pm$ получим, как полулинейную систему инвариантного погружения

$$\frac{\partial X_L^\pm}{\partial L} = \alpha^+(x, R_L^\pm) \frac{\partial X_L^\pm}{\partial x} \mp \alpha^\mp(X_L^\pm, X_L^\pm) \quad (29)$$

с начальными условиями

$$X_L^\pm \Big|_{L=l} = T_l^\pm(x), \quad X_L^- \Big|_{L=l} = 0, \quad \text{при этом} \quad X_L^\pm(l, x) \Big|_{x=0} = 0, \quad (30)$$

так и ее РФ:

$$\frac{\partial X_L^+}{\partial L} = \alpha^+(x, R_L^-) \frac{\partial X_L^+}{\partial x} - \alpha^+(X_L^+, R_{L-l}^-(X_L^+)), \quad (31)$$

$$\frac{\partial X_L^-}{\partial L} = \alpha^+(x, R_L^-) \frac{\partial X_L^-}{\partial x} + \alpha^-(u_L^+(x, X_L^-), X_L^-), \quad (32)$$

при тех же начальных условиях (30). Когда найдено решение одного из уравнений (31), (32), то решение второго явным образом может быть построено посредством одного из выражений:

$$X_L^+(l; x) = u_l^+(x, X_L^-(l; x)), \quad (33)$$

$$X_L^-(l; x) = R_{L-l}^-(X_L^+(l; x)), \quad (34)$$

которые получаются из (8) и (9) той же подстановкой. Для определения же $Y_L^\pm$ можно исходить из линейных и раздельных уравнений инвариантного погружения

$$\frac{\partial Y_L^\pm}{\partial L} = \alpha^\pm(R_L^\pm, y) \frac{\partial Y_L^\pm}{\partial y}, \quad (35)$$

$$Y_L^\pm \Big|_{L=l} = R_l^\pm(y), \quad Y_L^- \Big|_{L=l} = y, \quad \text{при этом} \quad Y_L^\pm(l, y) \Big|_{y=0} = 0, \quad (36)$$

с учетом аналогичных к (33)-(34) взаимосвязей:

$$Y_L^+(l; y) = R_l^+(Y_L^-(l; x)), \quad (37)$$

$$Y_L^-(l; y) = u_{L-l}^-(Y_L^+(l; y), y). \quad (38)$$

Соотношения (35) получаются из уравнений инвариантного погружения ЗВП (см. формулу (26) в П1)

$$\frac{\partial I_L^+}{\partial L} = \alpha^+(u_l^+, y) \frac{\partial I_L^+}{\partial y}, \quad (39)$$

а (37)-(38) из (8)-(9) постановкой $x = 0$.

С той же целью определения X_L^+ и Y_L^+ уравнения переноса в РФ (11)-(14) дают:

$$\frac{\partial X_L^+}{\partial l} = +\alpha^+(X_L^+, R_{L-l}^-(X_L^+)), \quad (40)$$

$$X_L^+|_{l=0} = x \quad \text{или} \quad X_L^+|_{l=L} = T_L^+(x) \quad (41)$$

$$\frac{\partial X_L^-}{\partial l} = -\alpha^-(u_l^+(x, X_L^-), X_L^-), \quad (42)$$

$$X_L^-|_{l=0} = R_L^-(x) \quad \text{или} \quad X_L^-|_{l=L} = 0. \quad (43)$$

$$\frac{\partial Y_L^+}{\partial l} = +\alpha^+(Y_L^+, u_{L-l}^-(Y_L^+, y)), \quad (44)$$

$$Y_L^+|_{l=0} = 0 \quad \text{или} \quad Y_L^+|_{l=L} = R_L^+(y), \quad (45)$$

$$\frac{\partial Y_L^-}{\partial l} = -\alpha^-(R_l^+(Y_L^-), Y_L^-), \quad (46)$$

$$Y_L^-|_{l=0} = T_L^-(y) \quad \text{или} \quad Y_L^-|_{l=L} = y. \quad (47)$$

Следует отметить, что уравнения (35) другим путем ранее были получены Кагивадой и Калабой в [9] (см, также [10]: глава 3, п. 12, формулы (15-18), там же п. 13 формулы (3-4) и (5-6)).

Выступающие в начальных условиях (28, 30, 36, 41, 43, 45, 47), а также в соотношениях (31, 32, 34, 35, 37, 40, 46), более частные величины R_L^+ и T_L^+ , представляют решения ЗОП, соответствующие опять случаю одностороннего облучения среды извне. Задачу нахождения этих величин уместно определить как вторую вспомогательную задачу Коши, для которой хорошо известны уравнения инвариантного погружения (см., например, в [11] формулы (29-32)):

$$\frac{\partial R_L^-}{\partial L} = \alpha^-(x, R_L^-) \frac{\partial R_L^-}{\partial x} + \alpha^-(x, R_L^-), \quad R_L^-|_{L=0} = 0, \quad R_L^-(0) = 0, \quad (48)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial L} = \alpha^+(x, R_L^-) \frac{\partial T^+}{\partial x}, \quad T_L^+(x) \Big|_{L=0} = x, \quad T_L^+(0) = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial R_L^+}{\partial L} = \alpha^+(R_L^+, y) \frac{\partial R^+}{\partial y} + \alpha^+(R_L^+, y), \quad R_L^+(y) \Big|_{L=0} = 0, \quad R_L^+(0) = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial T_L^-}{\partial L} = \alpha^-(R_L^+, y) \frac{\partial T_L^-}{\partial y}, \quad T_L^-(y) \Big|_{L=0} = y, \quad T_L^-(0) = 0. \quad (51)$$

Уравнения (48) и (50), при этом, квазилинейны, а (49) и (51) - линейны. Как видим, в нелинейной ЗВП при ее двустороннем облучении извне в роли вспомогательных величин выступают характеристики более частных задач одностороннего внешнего освещения среды, в виде решений соответствующих внутренней (29)-(38), (40)-(47) - $X_L^\pm$, $Y_L^\pm$ и внешней (48)-(51) - $R_L^\pm$, $T_L^\pm$ задач, для определения которых и были сформулированы первая и вторая вспомогательные задачи Коши.

6. *Последовательные этапы решения ЗВП.* Из вышесказанного следует естественная последовательность построения решения основной задачи - нахождения интенсивности излучения внутри среды $I_L^\pm(l; x, y)$:

- Сначала решается внешняя задача одностороннего освещения (т.е. вторая вспомогательная задача Коши), определяющая характеристики ЗОП, т.е. - $R_L^\pm(x)$, $T_L^\pm(y)$, при одностороннем освещении среды (здесь имеются в виду уравнения (48)-(51)).

- Затем полученные характеристики внешней задачи одностороннего освещения среды используются как для построения решения внутренней задачи одностороннего освещения среды (т.е. первой вспомогательной задачи Коши) - $X_L^\pm(l; x)$, $Y_L^\pm(l; y)$, для которого имеются уравнения (29)-(38), (40)-(47), так и для решения внешней задачи двустороннего освещения - $u_L^\pm(x, y)$ (например, из (27) или подробнее об этом см. в [11]).

- Решения же основной внутренней задачи, т.е. ЗВП при двустороннем внешнем освещении среды $I_L^\pm(l; x, y)$, сводится к богатому набору новых возможностей в виде дифференциальных уравнений: (6), (10), (39), (11)-(22), (26).

Здесь уместно отметить, что посредством подходящего выбора начальных условий, можно избежать нахождения некоторых указанных выше вспомогательных величин. Выбор конечных расчетных формул зависит от конкретной физической задачи, поскольку каждый из методов имеет свои сильные и слабые стороны. Например, сравним между собой уравнения двух задач Коши: РФ уравнения ПИА (19) или (21) и КУЭ (26). В обоих этих способах поиска решения основной задачи преимуществом является раздельность нахождения вперед и назад идущих излучений, при этом в первом способе (по сравнению со вторым) имеем дополнительное

преимущество - фиксированность пространственных переменных l и L , а слабым местом - полулинейность расчетного уравнения. Во втором же способе преимуществом (по сравнению с первым) является линейность расчетного уравнения, а слабой стороной (в том же сравнении) - потеря фиксированности одной пространственной переменной - l , т.е. имеет место процедура дифференцирования по этой переменной. Подобным образом можно сравнивать между собой также остальные перечисленные выше возможные способы определения внутреннего поля излучения и в каждом конкретном случае, исходя из практической ситуации, выбирать наиболее подходящую схему расчета.

7. Заключение. Перечислим полученные в данной работе результаты нелинейной ЗВП:

- Совместное использование соотношений инвариантности (8)-(9), связывающих между собой влево и вправо идущие внутренние поля, позволяет свести полулинейные системы связанных дифференциальных уравнений переноса излучения, инвариантного погружения и функциональных уравнений ПИА к их новым разделенным формам. Более того, путем решения уравнений здесь достаточно находить интенсивность поля лишь в одном из направлений, а в другом она будет непосредственно определена уже из явного выражения (формулы (8, 9)). При этом решение частной ЗОП будет играть роль необходимой дополнительной информации.

- Исходную нелинейную граничную ЗВП удастся свести к поэтапному, последовательному решению более частных задач с начальными условиями. При этом на каждом последующем этапе для решения очередной задачи Коши используются результаты предыдущего. В частности, последовательно решаются вспомогательные: ЗОП и ЗВП для одностороннего освещения среды, затем - ЗОП при двустороннем освещении среды, после чего, путем завершающей задачи Коши, строится решение ЗВП при двустороннем освещении среды.

- Выявлено и математически сформулировано новое понятие эквивалентности между различными операторами, по отношению к определенной математической форме - конструкции, соотношения, выражения, функционала и т.п., вследствие чего, в частности, двухточечная полулинейная граничная задача непосредственно сводится к линейной задаче Коши.

- В нелинейной задаче переноса излучения свойство взаимной эквивалентности дифференциальных операторов кинетического УБ и функционального уравнения ПИА, по отношению соответствующего интеграла столкновений, позволило внутреннее поле излучения помимо полулинейных: связанной системы ПИА (6) или же ее РФ - (19), (21), описать также посредством новых - линейных и раздельных дифференциальных уравнений - (26), именуемых, как КУЭ.

Обобщение полученных выше результатов на более реалистический, с точки зрения астрофизических приложений, случай многоуровневых атомов (т.е. полихроматическая задача переноса) будет представлено нами отдельно в последующих публикациях.

Автор весьма признателен профессору А.Г.Никогосяну за сделанные ценные замечания, которые послужили существенному улучшению и упрощению данного изложения.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна,
Армения, e-mail: hovpik@gmail.com hovpik@bao.sci.am

INTERNAL FIELD IN ONE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC MEDIUM OF NON-LINEAR RADIATIVE TRANSFER PROBLEM. II

H.V.PIKICHYAN

In the non-linear boundary-value problem of determining the internal field of radiation in a one-dimensional anisotropic medium with both boundaries illuminated from outside, it is shown that application of layers adding formulas in semi-linear systems of differential equations of radiative transfer, invariant imbedding and a Ambartsumian's complete invariance, allows to reduce them to the separated semi-linear differential equations with the initial conditions. Thereby the fields of to the left and to the right directed radiation are obtained independently. Moreover, being obtained one of them, the second can immediately be obtained from explicitly. A general feature of a certain reciprocal equivalence of operators with respect to definite mathematical: form, expression, or functional is mathematically formulated. From equivalence of differential operators of the Boltzmann kinetic equations and functional equation of Ambartsumian's complete invariance follows a new, the so-called, kinetic equations of equivalence, which are separated and linear. The formulas of more particular problems of the one-sided illumination of a medium are presented as well. They play a role of additional information in the initial conditions of the Cauchy problem.

Key words: *radiative transfer: non-linear problem of radiative transfer:
internal field of radiation: principle of invariance*

ЛИТЕРАТУРА

1. *О.В.Пикичян*, *Астрофизика*, **59**, 131, 2016, (*Astrophysics*, **59**, 114, 2016).
2. *Н.Б.Енгибарян, М.А.Мнацаканян*, *ДАН СССР*, **217**, 533, 1974.
3. *G.B.Rybicki, L.D.Usher*, *Astrophys. J.*, **146**, 871, 1966.
4. *H.V.Pikichian*, pp.302-315, in *Proc. of the Conf. "Evolution of Cosm. Obj. through their Phys. Activity"* (dedic. to V.Ambartsumian's 100-th anniversary, 15-18 sept. 2008 Yerevan-Buyurakan, Armenia), Eds.: *H.Narutyunian, A.Mickaelian, Y.Terzian*, Publ. House of NAS RA, Yerevan, 2010, 356p.
5. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, *Теоретическая физика (том X)* - *Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский*, *Физическая кинетика*, М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979, 528с.
6. *H.V.Pikichian*, pp.226-232, in "Proc. of international conf. on "Lasers' 97"" (New Orleans, LA, December 15-19, 1997), Ed. by *J.J.Carrol & T.A.Goldman*, STS press., McLEAN, VA, 1998, 1011p.
7. *О.В.Пикичян*, с.127-131, в сб. "Третье Российско-Армянское Совещание по мат. физ., компл. анализу и смежным вопросам - Краткие сообщения", Ереван, 2010, 168с.
8. *H.V.Pikichian*, pp.126-135, in: "Instability&Evolution of Stars", *Proc. of the Buyurakan-Abastumani Colloquium* (26-28 August 2013, Buyurakan), Eds.: *H.Narutyunian, N.Melikian, E.Nikoghosyan*, Gituthyun Publ. House, Yerevan, 2014, 158p.
9. *H.Kagiwada, R.Kalaba*, *J. Opt. Theory and Appl.*, **2**, 378, 1968.
10. *Дж.Касти, Р.Калаба*, *Методы погружения в прикладной математике*, М., Мир, 1976, 224с.
11. *О.В.Пикичян*, *Астрофизика*, **53**, 285, 2010, (*Astrophysics*, **53**, 251, 2010).