

ПОЛЯРИЗАЦИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ЛИНИЙ В СЛУЧАЕ ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПЕРВИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

А.В.ДЕМЕНТЬЕВ

Поступила 8 марта 2016

Принята к печати 23 марта 2016

Рассматривается перенос поляризованного излучения в резонансной линии в полубесконечной плоскопараллельной атмосфере без магнитного поля. Принимается, что рассеяние происходит с полным перераспределением по частотам в пределах линии; поглощение в непрерывном спектре учитывается. Источники первичного излучения в атмосфере считаются частично поляризованными; при этом описывающая их функция берется в виде произведения полинома от оптической глубины на экспоненту. Вектор Стокса выходящего излучения ищется в рамках общей аналитической теории $\mathbf{I}$ -матриц ($\mathbf{I}$ -матрица является обобщением скалярной H -функции Чандрасекара). Показано, что вектор Стокса излучения, выходящего из атмосферы, в которой распределены первичные источники рассматриваемого вида, выражается через решение одной, так называемой стандартной задачи.

Ключевые слова: *перенос излучения; поляризация; резонансное рассеяние*

1. Введение. Необходимость надежной интерпретации детальных спектрополяриметрических исследований Солнца и других объектов, проводимых в настоящее время, привела, к углубленному развитию теории возникновения и переноса поляризованного излучения в спектральных линиях [1], а также к созданию эффективных методов численного решения уравнения переноса такого излучения (см., например, обзор [2]). В итоге, современные программы расчета интенсивности и поляризации линий позволяют учесть многие физические факторы, которые могут влиять на свойства наблюдаемого излучения, включая и трехмерную неоднородность среды, где излучение возникает и распространяется [3].

В то же время, для задач переноса поляризованного излучения в реальных атмосферах возможность получения каких-либо существенных результатов методами аналитической теории переноса ограничена. Несмотря на это, аналитические методы исследования уравнения переноса служат важным вспомогательным средством к численным методам его решения: во-первых, они позволяют тестировать алгоритмы и программы (см., например, [4]), а, во-вторых, открывают возможность физической интерпретации результатов численных расчетов [5].

Одним из способов аналитического рассмотрения переноса поляризо-

ванного излучения при многократном резонансном рассеянии в спектральных линиях является общая теория $\hat{I}$ -матриц, развитая в работах [6,7]. Эта теория позволяет естественным образом обобщить хорошо известные результаты теории переноса неполяризованного излучения в линии. Нахождение вектора Стокса выходящего излучения в теории $\hat{I}$ -матриц фактически сводится к решению нелинейного интегрального уравнения Амбарцумяна-Чандрасекара, обобщенного на матричный случай. Решение данного уравнения позволяет получить вектор Стокса выходящего излучения без расчета поля излучения внутри атмосферы, что является преимуществом по сравнению с прямым решением уравнения переноса. Однако данная теория использует ряд предположений, ограничивающих круг задач, где она может быть применена.

Перечислим упрощающие предположения, которые делались во всех работах, использующих теорию $\hat{I}$ -матриц:

- 1) рассеяние излучения в линии происходит в плоскопараллельной полубесконечной атмосфере;
- 2) атмосфера состоит из двухуровневых атомов;
- 3) при рассеянии происходит полное перераспределение по частотам;
- 4) излучение в континууме на частотах линии отсутствует;
- 5) в атмосфере от координат не зависят профиль коэффициента поглощения в линии ϕ , вероятность выживания фотона при рассеянии λ , а также β - отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения, среднему по линии.

При дополнительных предположениях:

- а) отсутствует поглощение в континууме на частотах линии ($\beta = 0$);
 - б) в атмосфере нет магнитного поля,
- теория $\hat{I}$ -матриц была применена к задаче о резонансном рассеянии в случае разных видов профиля коэффициента поглощения ϕ :
- доплеровский [6,7];
 - лоренцевский [8];
 - фойгтовский [9];
 - обобщенные доплеровский и лоренцевский [10].

Учет поглощения в континууме ($\beta \neq 0$) был выполнен в работе [11].

Во всех указанных работах предполагалось, что источники первичного излучения неполяризованы и распределены в атмосфере равномерно; кроме того, в [6] были рассмотрены неполяризованные источники, экспоненциально затухающие с увеличением оптической глубины в атмосфере. Случай облучения верхней границы атмосферы параллельными лучами поляризованного монохроматического излучения также сводится к задаче с первичными источниками, распределенными экспоненциально [12]. Однако при этом возникает необходимость принимать во внимание азимутальную

зависимость падающего и отраженного излучения.

В работе [13] $\hat{I}$ -матрицы использовались при рассмотрении резонансного рассеяния в атмосфере с равномерно распределенными первичными источниками, в которой имеется слабое магнитное поле (см. также [14], где использовался схожий подход).

Отметим, что впервые аппарат $\hat{I}$ -матриц был в полной мере использован в работах [15, 16] при рассмотрении обобщенного релеевского рассеяния. Однако матрица, аналогичная $\hat{I}$ -матрице, использовалась ранее авторами работы [17] для получения $\hat{H}$ -матрицы в задаче о молекулярном рассеянии. Также отметим, что теория $\hat{I}$ -матриц тесно связана с принципом инвариантности, впервые сформулированным Амбарцумяном при исследовании задачи о диффузном отражении излучения от полубесконечной атмосферы [18].

В настоящей работе показано, что аналитическая теория $\hat{I}$ -матриц может быть применена к задачам с частично поляризованными источниками первичного излучения, зависимость от оптической глубины которых описывается функцией в виде произведения полинома на экспоненту. При этом оказывается, что нахождение вектора Стокса излучения, выходящего из атмосферы, в которой распределены любые первичные источники рассматриваемого вида, сводится к решению одной, так называемой стандартной задачи и к последующему несложному численному интегрированию.

2. Постановка задачи. Пусть в полубесконечной плоскопараллельной атмосфере, состоящей из двухуровневых атомов, происходит образование спектральных линий за счет многократного резонансного рассеяния. Магнитного поля в атмосфере нет. Считается, что излучение в континууме на частотах линии отсутствует, при этом поглощение в континууме учитывается. Также предполагается, что профиль коэффициента поглощения в линии ϕ , вероятность выживания фотона при рассеянии λ , а также β - отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения, среднему по линии, от координат не зависят. Профиль $\phi(x)$ нормирован таким образом, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi(x) = 1. \quad (1)$$

Относительно элементарного акта рассеяния принимается полное перераспределение по частотам (ППЧ) внутри линии.

Из-за наличия границы поле излучения в атмосфере анизотропно, что служит причиной возникновения линейной поляризации при рассеянии. Задача состоит в том, чтобы для выходящего из атмосферы излучения найти вектор Стокса и тем самым получить поляризационные характеристики этого излучения.

Поскольку рассматриваемая задача осесимметрична, то поле излучения

не зависит от азимута и не имеет круговой поляризации, но может обладать линейной поляризацией либо параллельной границе атмосферы, либо перпендикулярной к ней. Поэтому параметр Стокса U можно исключить, взяв $Q = I_+ - I_-$, где I_+ и I_- - интенсивности излучения, поляризованного соответственно перпендикулярно границе атмосферы и параллельно ей [19].

Таким образом, все встречающиеся ниже векторы имеют размерность 2, а матрицы - 2×2 . Вектор Стокса, описывающий поле излучения в атмосфере, будем обозначать через $\mathbf{i} = (I, Q)^T$, где индекс T означает транспонирование. При этом $\mathbf{i} = \mathbf{i}(\tau, x, \mu)$ зависит от обычной усредненной по линии оптической глубины в атмосфере τ , частоты излучения x , отсчитанной от центра линии и измеренной в соответствующих единицах (в доплеровских ширинах для доплеровского и фойгтовского профилей ϕ и в лоренцевских ширинах - для лоренцевского), а также от μ - косинуса угла между направлением распространения излучения и внешней нормалью к границе атмосферы.

3. *Векторное уравнение переноса.* В рассматриваемой задаче поле излучения в атмосфере может быть найдено путем решения следующего векторного уравнения переноса (см., например, [20, 21]):

$$\mu \frac{\partial \mathbf{i}(\tau, x, \mu)}{\partial \tau} = [\phi(x) + \beta] \mathbf{i}(\tau, x, \mu) - \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-1}^{+1} d\mu' \bar{\mathbf{R}}(x, \mu; x', \mu') \mathbf{i}(\tau, x', \mu') - \phi(x) \mathbf{s}_i(\tau) \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{i}(0, x, \mu) = \mathbf{0}, \quad \mu < 0; \quad \mathbf{i}(\tau, x, \mu) e^{-\tau|\mu|} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{0}, \quad \mu > 0. \quad (3)$$

В уравнении (2) матрица $\bar{\mathbf{R}}(x, \mu; x', \mu')$ описывает перераспределение излучения при рассеянии по частотам, углам и состояниям поляризации. Аргументы со штрихами относятся к падающему излучению, а без штрихов - к рассеянному. Векторная функция $\mathbf{s}_i(\tau) = (s_i^I(\tau), s_i^Q(\tau))^T$ задает источники первичного излучения в линии и считается известной.

Предположение о ППЧ позволяет отделить частотные переменные в матрице перераспределения так, что

$$\bar{\mathbf{R}}(x, \mu; x', \mu') = \phi(x) \phi(x') \bar{\mathbf{P}}(\mu, \mu'). \quad (4)$$

В свою очередь, в фазовой матрице резонансного рассеяния $\bar{\mathbf{P}}(\mu, \mu')$, которая в нашем случае не зависит от азимута, можно разделить также и угловые переменные

$$\bar{\mathbf{P}}(\mu, \mu') = \bar{\mathbf{A}}(\mu) \bar{\mathbf{A}}^T(\mu'), \quad (5)$$

где

$$\tilde{A}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{W}{8}}(1-3\mu^2) \\ 0 & \sqrt{\frac{W}{8}}3(1-\mu^2) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Здесь W - параметр деполаризации, определяемый квантовыми числами уровней, при переходах между которыми возникает линия ($0 \leq W \leq 1$). Факторизация (5) впервые была использована в работах [22] и [23].

3.1. *Неполяризованные первичные источники.* Пусть $s_i(\tau) \equiv (s_i^T(\tau), 0)^T$. Тогда верхнетреугольный вид матрицы $\tilde{A}(\mu)$ позволяет написать

$$s_i(\tau) = \tilde{A}(\mu)s_i(\tau). \quad (7)$$

Представим исходный вектор Стокса в следующем виде:

$$i(\tau, x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} \tilde{A}(\mu) i_*(\tau, x, \mu). \quad (8)$$

Подставим (4)-(5) и (7)-(8) в уравнение (2), умножим обе его части слева на $\tilde{A}^{-1}(\mu)$ и сократим на $\phi(x)$. В итоге получим, что вектор $i_*(\tau, x, \mu)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mu}{\phi(x) + \beta} \frac{\partial i_*(\tau, x, \mu)}{\partial \tau} = i_*(\tau, x, \mu) - s(\tau) \quad (9)$$

с граничными условиями вида (3). Здесь

$$s(\tau) = s_*(\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\phi^2(x')}{\phi(x') + \beta} \int_{-1}^{+1} d\mu' \tilde{\Psi}(\mu') i_*(\tau, x', \mu'), \quad (10)$$

$$s_*(\tau) = s_i(\tau), \quad (11)$$

$$\tilde{\Psi}(\mu) \equiv \frac{\lambda}{2} \tilde{A}^T(\mu) \tilde{A}(\mu). \quad (12)$$

Из уравнения (9) следует, что $i_*(\tau, x, \mu)$ зависит от x и μ не по отдельности, а от их комбинации

$$z \equiv \frac{\mu}{\phi(x) + \beta}, \quad (13)$$

так что вместо (9) можно записать уравнение

$$z \frac{\partial i_*(\tau, z)}{\partial \tau} = i_*(\tau, z) - s(\tau) \quad (14)$$

с граничными условиями

$$i_*(0, z) = 0, \quad z < 0; \quad i_*(\tau, z) e^{-\tau/z} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0, \quad z > 0. \quad (15)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению векторной функции только

двух переменных, а не трех, как было изначально.

Сделаем замену переменной $z' \equiv \mu' / (\phi(x') + \beta)$ во внутреннем интеграле в (10) и поменяем порядок интегрирования по x' и z' (см. [24], §5.1, а также [25]). Тогда (10) запишется как

$$s(\tau) = s_*(\tau) + \int_{-1/\beta}^{1/\beta} dz' \tilde{G}(z') i_*(\tau, z'). \quad (16)$$

Здесь

$$\tilde{G}(z) = 2 \int_{\phi(x)}^{\infty} dx' \phi^2(x') \Psi[z(\phi(x') + \beta)], \quad (17)$$

так что функция $x(z)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} x(z) &= 0, & |z| < 1/[\phi(0) + \beta]; \\ \phi[x(z)] &= 1/|z| - \beta, & 1/\beta \geq |z| \geq 1/[\phi(0) + \beta]. \end{aligned} \quad (18)$$

Матрица $\tilde{G}(z)$ имеет следующую нормировку:

$$2 \int_0^{1/\beta} dz' \tilde{G}(z') = \text{diag}(\bar{\lambda}, 0.7 W \bar{\lambda}), \quad (19)$$

где

$$\bar{\lambda} = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\phi^2(x')}{\phi(x') + \beta}. \quad (20)$$

Для получения (19) необходимо взять двойной интеграл по z' и по x' , см. определение $\tilde{G}(z)$ (17)-(18). Это легко сделать, если от переменных z' и x' вернуться к переменным μ' и x' , поменяв также и порядок интегрирования.

3.2. Частично поляризованные первичные источники. Пусть теперь

$$s_i(\tau) \equiv (s_i^1(\tau), s_i^2(\tau))^T, \quad (21)$$

где $s_i^2(\tau)$ не равняется нулю тождественно. Тогда в общем случае (7) не имеет места. Для того, чтобы и при таких источниках воспользоваться разделением переменных (4)-(5), представим исходный вектор Стокса в виде следующей суммы:

$$i(\tau, x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} [i_d(\tau, x, \mu) + \tilde{A}(\mu) i_s(\tau, x, \mu)], \quad (22)$$

где первое слагаемое соответствует излучению, пришедшему непосредственно от первичных источников, а второе - диффузному излучению, т.е. излучению, которое испытало хотя бы одно рассеяние. Подстановка (22) в векторное уравнение переноса дает для векторов i_d и i_s уравнения

$$z \frac{\partial i_d(\tau, z)}{\partial \tau} = i_d(\tau, z) - s_i(\tau) \quad (23)$$

и

$$z \frac{\partial \mathbf{i}_s(\tau, z)}{\partial \tau} = \mathbf{i}_s(\tau, z) - \mathbf{s}(\tau) \quad (24)$$

с граничными условиями вида (15) и для $\mathbf{i}_e$ и для $\mathbf{i}_s$. В отличие от случая неполяризованных первичных источников вектор $\mathbf{i}_s(\tau, z')$ под интегралом в (16) заменяется на $\mathbf{i}_s(\tau, z')$; при этом

$$\mathbf{s}_s(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\phi^2(x')}{\phi(x') + \beta} \int_{-1}^1 d\mu' \hat{\mathbf{A}}^T(\mu') \mathbf{i}_s(\tau, z(x', \mu')). \quad (25)$$

В соответствии со своим определением (25), векторная функция источников $\mathbf{s}_s(\tau)$ описывает испытывавшее первое рассеяние излучение первичных источников.

Решение дифференциального уравнения (23) при известной функции $\mathbf{s}_l(\tau)$ находится элементарно:

$$\mathbf{i}_d(\tau, z) = \begin{cases} - \int_0^\tau \frac{d\tau'}{z} e^{-(\tau-\tau')/z} \mathbf{s}_l(\tau'), & z < 0 \\ \int_\tau^\infty \frac{d\tau'}{z} e^{-(\tau'-\tau)/z} \mathbf{s}_l(\tau'), & z > 0. \end{cases} \quad (26)$$

В частности, при экспоненциальном распределении первичных источников, когда

$$\mathbf{s}_l(\tau) = e^{-\tau/z_0} \mathbf{s}_0, \quad (27)$$

где параметр $z_0 \in (0, +\infty)$, а $\mathbf{s}_0 = (s_0^I, s_0^Q)^T$ - некоторый известный постоянный вектор, получаем, что

$$\mathbf{i}_d(\tau, z) = \begin{cases} \frac{z_0}{z_0 + z} (e^{-\tau/z_0} - e^{-\tau/z}) \mathbf{s}_0, & z < 0 \\ \frac{z_0}{z_0 + z} e^{-\tau/z_0} \mathbf{s}_0, & z > 0. \end{cases} \quad (28)$$

4. *Матричное уравнение переноса.* Следуя работе [6], введем матрицу Стокса $\hat{I}(\tau, z)$, которая по определению является решением матричного уравнения переноса

$$z \frac{\partial \hat{I}(\tau, z)}{\partial \tau} = \hat{I}(\tau, z) - \hat{S}(\tau) \quad (29)$$

с граничными условиями

$$\hat{I}(0, z) = \hat{0}, \quad z < 0; \quad \hat{I}(\tau, z) e^{-\tau/z} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \hat{0}, \quad z > 0. \quad (30)$$

Матричная функция источников $\hat{S}(\tau)$ выбирается в следующем виде:

$$\hat{S}(\tau) = \hat{S}_s(\tau) + \int_{-1}^1 dz' \hat{G}(z') \hat{I}(\tau, z'), \quad (31)$$

при этом первичные источники описываются диагональной матрицей

$$\hat{S}_*(\tau) = \text{diag}(s_*^1(\tau), s_*^2(\tau)), \quad (32)$$

где $s_*^1(\tau)$ и $s_*^2(\tau)$ являются компонентами векторной функции источников (11) или (25).

Очевидно, решение матричного уравнения (29)–(30) записывается в виде, аналогичном (26). В данном случае это решение будет формальным, поскольку матрица $\hat{S}(\tau)$ неизвестна. В частности, на границе атмосферы

$$\hat{I}(0, z) = \int_0^\infty \frac{d\tau'}{z} e^{-\tau'/z} \hat{S}(\tau'). \quad (33)$$

Подстановка формального решения уравнения переноса (29) в выражение (31) дает следующее интегральное уравнение для матричной функции источников $\hat{S}(\tau)$:

$$\hat{S}(\tau) = \hat{S}_*(\tau) + \int_0^\infty d\tau' \hat{K}(\tau - \tau') \hat{S}(\tau'), \quad (34)$$

где

$$\hat{K}(\tau) = \int_0^{1/\beta} \frac{dz'}{z'} e^{-\tau/z'} \hat{G}(z'). \quad (35)$$

Применение резольвентного метода [26, 27] к (34) дает возможность получить выражение для матрицы Стокса выходящего из атмосферы излучения через матричную функцию первичных источников

$$\hat{I}(0, z) = \hat{H}(z) \int_0^\infty \frac{d\tau'}{z} \left[e^{-\tau'/z} \hat{E} + \int_0^\tau d\tau'' e^{-(\tau-\tau'')/z} \hat{\Phi}^T(\tau'') \right] \hat{S}_*(\tau'), \quad (36)$$

где через $\hat{E}$ обозначена единичная матрица, $\hat{H}(z)$ и $\hat{\Phi}(\tau)$ являются матричным обобщением известных скалярных H -функции и функции Соболева соответственно. При этом

$$\hat{H}(z) = \hat{E} + \int_0^\infty d\tau' e^{-\tau'/z} \hat{\Phi}(\tau'), \quad (37)$$

$$\hat{\Phi}(\tau) = \hat{K}(\tau) + \int_0^\infty d\tau' \hat{K}(\tau - \tau') \hat{\Phi}(\tau'). \quad (38)$$

Выражение (36) может быть получено точно таким же образом, как получается аналогичное выражение для интенсивности выходящего излучения в скалярной теории переноса (см. [24], §5.1).

Введем обозначение $e = (1, 1)^T$. Пусть источники первичного излучения в линии неполяризованы. Тогда, в соответствии с (11),

$$\hat{S}_*(\tau) = \text{diag}(s^1(\tau), 0). \quad (39)$$

Сравнение (29)–(31) с (14)–(16) дает, что

$$i_*(\tau, z) = \hat{I}(\tau, z) e, \quad (40)$$

где $\hat{I}(\tau, z)$ является решением уравнения (29) при матричной функции первичных источников (39). Таким образом, если решить уравнение переноса

(29) и найти матрицу $\hat{I}$ при соответствующей матрице $\hat{S}_*(\tau)$, то искомым вектор Стокса получается по формулам (40) и (8). Аналогичным образом, очевидно, находится вектор Стокса и для задач с другим видом $\hat{S}_*(\tau)$.

4.1. *Стандартная задача.* Будем использовать терминологию, аналогичную принятой в [6], и назовем стандартной задачу с матрицей первичных источников

$$\hat{S}_* = \hat{\varepsilon}^{1/2}, \quad (41)$$

где

$$\hat{\varepsilon}^{1/2} = \text{diag} \left(\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}, \sqrt{1 - 0.7W\tilde{\lambda}} \right). \quad (42)$$

Матрица $\hat{\varepsilon}$ представляет собой обобщение обычной вероятности гибели фотона. Введем обозначение для матрицы Стокса выходящего излучения в стандартной задаче $\hat{I}(0, z) = \hat{I}(z)$. В работе [6] указано, что $\hat{I}$ -матрица удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению Амбарцумяна-Чандрасекара, обобщенному на матричный случай. При учете поглощения в континууме это уравнение записывается следующим образом [11]:

$$\hat{I}^{-1}(z) = \hat{\varepsilon}^{1/2} + \int_0^{1/\beta} \frac{z' dz'}{z + z'} \hat{I}^T(z') \hat{G}(z'). \quad (43)$$

$\hat{I}$ -матрица непосредственно связана с известной в теории переноса поляризованного излучения $\hat{H}$ -матрицей таким образом, что

$$\hat{H}(z) = \hat{I}(z) \hat{I}^T(0). \quad (44)$$

При этом

$$\hat{I}(0) \hat{I}^T(0) = \hat{E}, \quad (45)$$

т.е. $\hat{I}(0)$ является ортогональной матрицей [7], а также

$$\hat{I}^T(\infty) = \hat{I}(\infty) = \hat{\varepsilon}^{-1/2}, \quad (46)$$

см. [6].

Матрица, аналогичная матрице $\hat{I}$, впервые появилась в работе [17], посвященной молекулярному рассеянию. В используемом нами виде $\hat{I}$ -матрица была введена в работах [16] и [6]: первая из этих работ рассматривает обобщенное релеевское рассеяние, а вторая - резонансное рассеяние в линии без учета поглощения в континууме.

Матричное уравнение Амбарцумяна-Чандрасекара (43) для $\hat{I}$ -матрицы обладает существенным преимуществом с точки зрения численного решения по сравнению с аналогичным уравнением для $\hat{H}$ -матрицы, что подчеркивается во всех трех вышеупомянутых работах. Данное обстоятельство оправдывает введение $\hat{I}$ -матрицы в качестве обобщения скалярной H -функции. В работе [11] предложена универсальная схема численного решения уравнения (43) в случае фойгтовского профиля ϕ , применимая как при наличии поглощения

в континууме, так и при его отсутствии.

4.2. *Равномерно распределенные источники* $\hat{S}_*$. Если $\hat{S}_*(\tau) = \hat{S}_*$, то в выражении (36) матрицу $\hat{S}_*$ можно вынести справа из-под знака интеграла. Проинтегрировав оставшееся подынтегральное выражение по τ , найдем, что

$$\tilde{I}(0, z) = \tilde{I}(z) = \hat{\varepsilon}^{-1/2} \hat{S}_* = \tilde{I}(z) \begin{pmatrix} \frac{s_*^I}{\sqrt{1-\bar{\lambda}}} & 0 \\ 0 & \frac{s_*^Q}{\sqrt{1-0.7W\bar{\lambda}}} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Отметим, что при рассматриваемых нами физически допустимых значениях параметров λ , β и W , именно,

$$0 \leq \lambda, \beta, W \leq 1, \quad (48)$$

а также в силу нормировки профиля коэффициента поглощения (1), выполняется неравенство $0 \leq \bar{\lambda} \leq 1$. Поэтому $1 - 0.7W\bar{\lambda} > 0$, а $1 - \bar{\lambda} \geq 0$, причем равенство имеет место только тогда, когда одновременно $\beta = 0$ и $\lambda = 1$. Только в этом случае решение (47) может иметь особенность.

Пусть источники первичного излучения в линии распределены равномерно и неполяризованы, т.е. $s_i = (s_i^I, 0)^T$. Тогда, в силу (39), $S_*^I = s_i^I$, а $S_*^Q = 0$. С учетом выражений (8), (40) и (47), вектор Стокса выходящего излучения при таких источниках можно найти с помощью двух элементов матрицы $\tilde{I}(z)$ по следующей формуле:

$$i(\tau = 0, x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta \sqrt{1-\bar{\lambda}}} \frac{s_i^I}{\sqrt{1-\bar{\lambda}}} \hat{A}(\mu) (I_{11}(z), I_{21}(z))^T. \quad (49)$$

Отсюда получаем параметры Стокса выходящего излучения

$$I(x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta \sqrt{1-\bar{\lambda}}} \left[I_{11}(z) + \sqrt{\frac{W}{8}} (1 - 3\mu^2) I_{21}(z) \right], \quad (50)$$

$$Q(x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta \sqrt{1-\bar{\lambda}}} \frac{s_i^I}{\sqrt{1-\bar{\lambda}}} \sqrt{\frac{W}{8}} 3(1 - \mu^2) I_{21}(z). \quad (51)$$

Аналогичные формулы при $\beta = 0$ (без учета поглощения в континууме на частотах линии) получены в работе [7].

Пусть теперь равномерно распределенные неполяризованные первичные источники нормированы следующим образом:

$$s_i = s_* = (\sqrt{1-\bar{\lambda}}, 0)^T. \quad (52)$$

Если $\beta \neq 0$, $\lambda \rightarrow 1$, то из (49) имеем, очевидно, $i(\tau = 0, x, \mu) = 0$. Таким образом, в этом случае однородное векторное уравнение переноса (2) (т.е. задача Милна для этого уравнения) имеет только нулевое решение. В

случае же, когда $\lambda \rightarrow 1$ при $\beta = 0$, это однородное уравнение имеет нетривиальное решение

$$\mathbf{i}(\tau = 0, x, \mu) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 1} \hat{\mathbf{A}}(\mu)(I_{11}(z), I_{21}(z))^T \quad (53)$$

Отметим, что ненулевой элемент S_0^Q , не зависящий от τ , не соответствует никаким реальным первичным источникам. Действительно, согласно (25) и (32), S_0^Q может не зависеть от оптической глубины τ , если от нее не зависит вектор $\mathbf{i}_s$, то есть $\partial \mathbf{i}_s(\tau, z)/\partial \tau \equiv 0$ при любых z . При этом, как следует из уравнения (23), должно быть $\mathbf{i}_d(\tau, z) = \mathbf{s}_l(\tau) = \mathbf{s}_l$, а граничное условие $\mathbf{i}_d(0, z) = 0$ при $z < 0$, требует, чтобы $\mathbf{s}_l = 0$, и мы приходим к задаче, в которой первичные источники излучения отсутствуют. Соответственно, первичные источники стандартной задачи (41) также не отвечают никакому реальному случаю.

4.3. *Экспоненциальные источники s_l* . Рассмотрим случай первичных источников вида (27). Подставив (28) в (25) и записав матричную функцию первичных источников в соответствии с (32), после некоторых преобразований получим:

$$\hat{\mathbf{S}}_*(\tau) = z_0 e^{-\tau/z_0} \int_{-1/\beta}^{1/\beta} \frac{dz'}{z_0 + z'} \hat{\mathbf{F}}(z') - z_0 \int_0^{1/\beta} \frac{dz'}{z_0 - z'} e^{-\tau/z'} \hat{\mathbf{F}}(z'), \quad (54)$$

где

$$\hat{\mathbf{F}}(z) = \begin{pmatrix} s_0^I G_{11}(z) & 0 \\ 0 & \sqrt{W/2} s_0^Q G_{11}(z) + (s_0^I + s_0^Q) G_{12}(z) \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Во втором интеграле мы воспользовались тем, что $\hat{\mathbf{G}}(-z) = \hat{\mathbf{G}}(z)$. Выразить элементы матрицы $\hat{\mathbf{F}}(z)$ через элементы $\hat{\mathbf{G}}(z)$ позволяет сравнение элементов $\hat{\mathbf{A}}^T(\mu)$ с элементами $\hat{\Psi}(\mu)$ см. (6), (12) и (17):

$$\frac{\lambda}{2} A_{11}^T(\mu) = \Psi_{11}(\mu), \quad \frac{\lambda}{2} A_{21}^T(\mu) = \Psi_{12}(\mu), \quad \frac{\lambda}{2} A_{22}^T(\mu) = \sqrt{\frac{W}{2}} \Psi_{11}(\mu) + \Psi_{12}(\mu). \quad (56)$$

Подстановка матричной функции (54) в выражение (36) и последующее интегрирование по τ дает матрицу Стокса выходящего излучения в виде

$$\hat{I}(0, z) = \hat{\mathbf{I}}(z) \left[\frac{z_0^2}{z_0 + z} \hat{\mathbf{I}}^T(z_0) \int_{-1/\beta}^{1/\beta} \frac{dz'}{z_0 + z'} \hat{\mathbf{F}}(z') - z_0 \int_0^{1/\beta} \frac{z' dz'}{(z_0 - z')(z' + z)} \hat{\mathbf{I}}^T(z') \hat{\mathbf{F}}(z') \right]. \quad (57)$$

Заметим, что здесь матрица $\hat{I}(0, z)$ описывает только диффузное выходящее излучение. Для того, чтобы получить полный вектор Стокса, необходимо, в соответствии с выражением (22), учесть и излучение, приходящее от первичных источников. Привлекая (28), (57), а также соотношение (40), записанное для вектора $\mathbf{i}_s(\tau, z)$, имеем следующие параметры Стокса выходящего из атмосферы излучения:

$$I(x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} \left\{ \frac{z_0}{z_0 + z} s_0^I + I_{11}(0, z) + I_{12}(0, z) + \sqrt{\frac{W}{8}} (1 - 3\mu^2) [I_{21}(0, z) + I_{22}(0, z)] \right\}, \quad (58)$$

$$Q(x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} \left\{ \frac{z_0}{z_0 + z} s_0^Q + \sqrt{\frac{W}{8}} 3(1 - \mu^2) [I_{21}(0, z) + I_{22}(0, z)] \right\}. \quad (59)$$

4.4. *Равномерно распределенные источники s_i* . Устремляя в (27) и (28) $z_0 \rightarrow \infty$, получаем задачу с равномерно распределенными первичными источниками $s_i(\tau) = s_0$. Предельный переход в (57) дает соответствующую матрицу Стокса выходящего излучения:

$$\hat{I}(0, z) = \hat{I}(z) \left[\begin{array}{cc} \frac{s_0^I}{\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{W}{2}} \frac{s_0^Q}{\sqrt{1 - 0.7W\tilde{\lambda}}} \end{array} \right] - \int_0^{1/\beta} \frac{z' dz'}{z' + z} \hat{I}^T(z') \hat{F}(z'). \quad (60)$$

Здесь при преобразовании первого слагаемого учтено соотношение (46), а также нормировка (19) для матрицы $\hat{G}(z)$. Параметры Стокса выходящего излучения получаются предельным переходом $z_0 \rightarrow \infty$ в (58) и (59).

Применим выражение (60) для неполяризованных равномерно распределенных первичных источников, когда $s_0^Q = 0$. Тогда, учитывая, что в этом случае, в соответствии с (7) и (28), вектор $i_d(0, z) = s_0 = \hat{A}(\mu) s_0$, получим вектор Стокса выходящего излучения в следующем виде:

$$i(\tau = 0, x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} \hat{A}(\mu) \left\{ (s_0^I, 0)^T + \frac{\tilde{\lambda} s_0^I}{\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}} (I_{11}(z), I_{21}(z))^T - s_0^I \hat{I}(z) \left[\int_0^{1/\beta} \frac{z' dz'}{z' + z} \hat{I}^T(z') \hat{F}_0(z') \right] e \right\}, \quad (61)$$

где

$$\hat{F}_0(z) = \text{diag}(G_{11}(z), G_{12}(z)). \quad (62)$$

Этот результат должен совпадать с тем, что дает формула (49). Приравнявая правые части этих выражений друг другу, после небольших преобразований будем иметь

$$\sqrt{1 - \tilde{\lambda}} (I_{11}(z), I_{21}(z))^T = (1, 0)^T - \hat{I}(z) \left[\int_0^{1/\beta} \frac{z' dz'}{z' + z} \hat{I}^T(z') \hat{F}_0(z') \right] e. \quad (63)$$

Данное соотношение может быть использовано для проверки точности численной схемы нахождения матрицы $\hat{I}(z)$. Отметим, что если $z \rightarrow \infty$, то, привлекая (46), мы получаем из (63) очевидное тождество.

4.5. *Источники s_i других видов.* Известно, что в скалярном варианте рассматриваемой задачи в случае функции первичных источников, представляющей собой произведение полинома от τ на экспоненту, интенсивность выходящего излучения можно выразить через H -функцию [28]. Покажем, что при учете поляризации в задачах с источниками подобного вида вектор Стокса выходящего излучения выражается через $\hat{\mathbf{I}}$ -матрицу.

Пусть первичные источники имеют следующий вид:

$$s_i(\tau) = s_{ik}(\tau) = \tau^k e^{-\tau/z_0} s_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (64)$$

(векторные и матричные величины, отвечающие задаче с векторной функцией первичных источников $s_{ik}(\tau)$, мы будем также снабжать индексом k). Уравнение переноса (2) линейно. Поэтому, если известны его решения в случае первичных источников (64), то можно легко построить решение уравнения (2) и для первичных источников, которые описываются конечной суммой элементов рассматриваемого вида, причем эти слагаемые могут различаться между собой и степенью полинома k , и величиной параметра z_0 , и значениями компонентов вектора s_0 .

Очевидно,

$$s_{ik}(\tau) = z_0^2 \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\tau^{k-1} e^{-\tau/z_0} s_0 \right) = z_0^2 \frac{\partial}{\partial z_0} s_{i,k-1}(\tau). \quad (65)$$

В силу линейности уравнения переноса, а также линейности операции взятия производной можно написать

$$i_{ik}(\tau, z) = z_0^2 \frac{\partial}{\partial z_0} i_{i,k-1}(\tau, z), \quad (66)$$

$$\hat{S}_{*k}(\tau) = z_0^2 \frac{\partial}{\partial z_0} \hat{S}_{*,k-1}(\tau) \quad (67)$$

и, наконец,

$$\hat{I}_k(0, z) = z_0^2 \frac{\partial}{\partial z_0} \hat{I}_{k-1}(0, z). \quad (68)$$

Случай $k=0$ соответствует задаче с экспоненциально распределенными внутренними источниками (27), для которой получено соотношение (57), выражающее вектор Стокса выходящего излучения через $\hat{\mathbf{I}}$ -матрицу. Таким образом, поскольку к указанной задаче сводятся случаи, когда первичные источники описываются произведением полинома от τ на экспоненту (см. (64), $k \neq 0$), то и в них выходящее излучение описывается вектором Стокса, который можно найти по значениям самой $\hat{\mathbf{I}}$ -матрицы и ее производной. Последняя находится дифференцированием уравнения (43):

$$\frac{d\hat{\mathbf{I}}(z)}{dz} = \hat{\mathbf{I}}(z) \left[\int_0^{1/z} \frac{z' dz'}{(z+z')^2} \hat{\mathbf{I}}^T(z') \hat{\mathbf{G}}(z') \right] \hat{\mathbf{I}}(z). \quad (69)$$

Данный результат является обобщением соотношений, известных в скалярной теории [28].

5. *Некоторые численные результаты.* Приведем пример численного расчета по полученным выше формулам для случая частично поляризованных первичных источников, распределенных равномерно. Определим степень поляризации как $p = -Q/I$. В этом случае положительная величина p соответствует поляризации излучения, параллельной границе атмосферы. Согласно (22), (28), (58), (59) и выражению (40), записанному для i_s , предельная степень поляризации на краю диска p_0 (т.е. при $\mu = 0$, а, значит, и $z = 0$) звезды с рассеивающей атмосферой равна

$$p_0 = \frac{\sqrt{8} s_0^Q + 3\sqrt{W} [I_{21}(0, 0) + I_{22}(0, 0)]}{\sqrt{8} [s_0^I + I_{11}(0, 0) + I_{12}(0, 0)] + \sqrt{W} [I_{21}(0, 0) + I_{22}(0, 0)]} \quad (70)$$

На рис.1 представлена рассчитанная степень поляризации p_0 выходящего из атмосферы излучения в зависимости от степени и направления поляризации равномерных первичных источников для разных значений λ . Принималось, что $s_0^I = \sqrt{1 - \lambda}$, а $s_0^Q = p_s s_0^I$, где p_s - степень поляризации первичного излучения. При вычислениях использовался доплеровский профиль и принималось $\beta = 0$; также бралось $W = 1$, что соответствует дипольному рассеянию. Вид этих графиков вполне предсказуем: рост λ , т.е. увеличение роли рассеяния, приводит к замытию исходной поляризации, сколь велика бы она ни была.

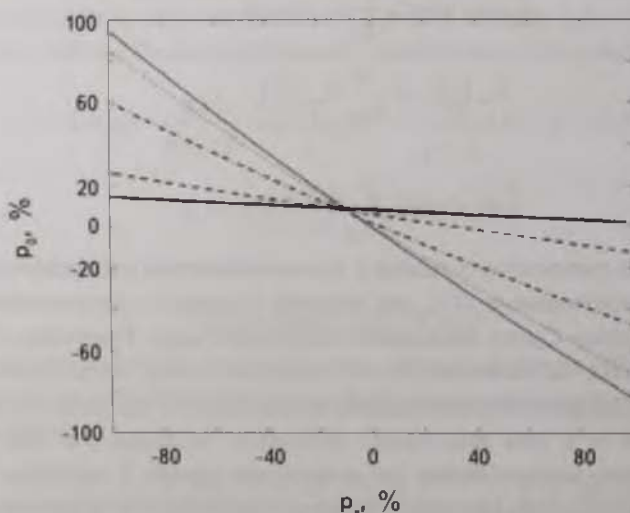


Рис.1. Степень поляризации p_0 на краю диска звезды в зависимости от степени поляризации p_s излучения равномерно распределенных первичных источников (доплеровский профиль, $\beta = 0$, $W = 1$). Жирная сплошная линия соответствует $\lambda = 0.999$, штриховая - $\lambda = 0.99$, штрих-пунктирная - $\lambda = 0.9$, пунктирная - $\lambda = 0.7$, тонкая сплошная - $\lambda = 0.5$.

6. *Заключение.* В работах [6,7] показано, что с помощью теории $\hat{\mathbf{I}}$ -матриц хорошо известные результаты скалярной аналитической теории, которая описывает перенос излучения в спектральной линии в плоско-параллельной немагнитной атмосфере в предположении ППЧ, могут быть использованы и при учете поляризации излучения. В частности, оказывается, что в случае равномерно распределенных в атмосфере неполяризованных источников первичного излучения формулы для матрицы Стокса выходящего из атмосферы излучения имеют вид, аналогичный соотношениям для интенсивности выходящего излучения в соответствующей скалярной задаче. То же самое имеет место и для случая внешнего облучения атмосферы параллельными лучами монохроматического излучения [12]. Данное обстоятельство является следствием того, что в этих случаях в выражении для функции первичных источников s_i можно выделить матрицу $\hat{\mathbf{A}}(\mu)$ в качестве множителя см. (7).

В настоящей работе рассмотрены частично поляризованные первичные источники s_p , которые не допускают выделения такого множителя. При этом функция $s_p(\tau)$, описывающая излучение первичных источников, которое испытало первое рассеяние, имеет достаточно громоздкий вид (25). В результате выражение (36) достаточно сложно и для анализа, и для вычисления значений элементов матрицы Стокса выходящего излучения. Однако, оказывается, что если зависимость s_i от оптической глубины τ описывается функцией в виде произведения полинома на экспоненту, то матрица Стокса (соответственно, и вектор Стокса) выходящего излучения при любых таких источниках выражается через решение одной, стандартной задачи (57), (68).

Таким образом, для того, чтобы найти параметры Стокса излучения, выходящего из атмосферы с любыми поляризованными первичными источниками, сводящимися к произведению полинома на экспоненту, достаточно при заданных ϕ , λ и β один раз рассчитать элементы матрицы $\hat{\mathbf{G}}(z)$, а также решить матричное интегральное уравнение Амбарцумяна-Чандрасекара, получив $\hat{\mathbf{I}}(z)$; далее все сводится к достаточно простому численному интегрированию. Во всех указанных выше работах, которые используют теорию $\hat{\mathbf{I}}$ -матриц, имеются соответствующие формулы, выражающие вектор Стокса выходящего излучения через решение стандартной задачи. Это отражает тот факт, что источники первичного излучения в атмосфере, предполагаемые в данных работах, представляют собой частные случаи произведения полинома на экспоненту. Отметим также, что вектор Стокса выходящего излучения зависит от двух переменных, в то время как $\hat{\mathbf{I}}$ -матрица - только от одной.

Общие формулы, соответствующие частично поляризованным первичным источникам, очевидно, могут быть записаны и для частного вида таких

источников - неполяризованных. Таким образом, для последних имеются два независимых способа нахождения вектора Стокса выходящего из атмосферы излучения: 1) с помощью общих формул; 2) используя верхнетреугольный вид матрицы $A(\mu)$. Сравнение результатов, полученных двумя способами, приводит к соотношению (63), которое дает возможность для оценки точности вычисления матрицы $I(z)$.

Работа выполнена в рамках НИР СПбГУ 6.38.669.2013.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия, e-mail: a.dementiev@spbu.ru

POLARIZATION OF RESONANCE LINES IN THE CASE OF POLARIZED PRIMARY SOURCES OF RADIATION

A.V.DEMENTYEV

Transfer of polarized radiation in a resonance line in a nonmagnetic semi-infinite plane-parallel atmosphere is considered. Complete frequency redistribution is assumed; continuum absorption is taken into account. It is supposed that primary sources of the radiation distributed in the atmosphere are partially polarized; the dependence on the optical depth of these sources is described by the product of a polynomial in the exponent. The Stokes vector of the emergent radiation is derived by means of general analytical theory of $\bar{I}$ -matrices ($\bar{I}$ -matrix is a generalisation of the scalar Chandrasekhar's H -function). It is shown that the Stokes vector of the radiation emerging from the atmosphere with primary sources under consideration is expressed through the solution of the so-called standard problem.

Key words: *radiative transfer: polarization: resonance scattering*

ЛИТЕРАТУРА

1. E.Landi Degl'Innocenti, M.Landolfi, Polarization in Spectral Lines, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
2. K.N.Nagendra, M.Sampoorna, in "Solar Polarization 5", eds. S.V.Berdyugina,

- K.N.Nagendra, R.Ramelli, ASP Conf. Ser., **405**, 261, 2009.
3. J. Stępn, J.Trujillo Bueno, Astron. Astrophys., **557**, A143, 2013.
 4. J. Stępn, V.Bommier, Astron. Astrophys., **468**, 797, 2007.
 5. V.V.Ivanov, in "Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models", eds. L.Crivellari, I.Hubeny, D.G.Hummer, NATO Advanced Science Institutes Series C, **341**, 81, 1991.
 6. V.V.Ivanov, S.I.Grachev, V.M.Loskutov, Astron. Astrophys., **318**, 315, 1997.
 7. V.V.Ivanov, S.I.Grachev, V.M.Loskutov, Astron. Astrophys., **321**, 968, 1997.
 8. В.М.Лоскутов, В.В.Иванов, Астрофизика, **50**, 199, 2007, (Astrophysics, **50**, 157, 2007).
 9. А.В.Дементьев, Письма в Астрон. ж., **34**, 633, 2008, (Astron. Lett., **34**, 574, 2008).
 10. В.М.Лоскутов, Астрофизика, **54**, 475, 2011, (Astrophysics, **54**, 421, 2011).
 11. А.В.Дементьев, Астрофизика, **52**, 605, 2009, (Astrophysics, **52**, 545, 2009).
 12. В.М.Лоскутов, Астрон. ж., **81**, 24, 2004, (Astron. Reports, **48**, 21, 2004).
 13. С.И.Грачев, Астрофизика, **44**, 455, 2001, (Astrophysics, **44**, 369, 2001).
 14. H.Frisch, in "Solar Polarization 2", eds. K.N.Nagendra, J.O.Stenflo, ASSL, **243**, 97, 1999.
 15. V.V.Ivanov, Astron. Astrophys., **303**, 609, 1995.
 16. V.V.Ivanov, Astron. Astrophys., **307**, 319, 1996.
 17. W.A. de Rooij, P.B.Bosma, J.P.C. van Hooff, Astron. Astrophys., **226**, 347, 1989.
 18. В.А.Амбарцумян, ДАН СССР, **38**, 257, 1943, (Nauchnye Trudy, vol. 1, Yerevan, 1960, in Russian).
 19. С.Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953, (Radiative Transfer, Dover Publ., New York, 1960).
 20. M.Faurobert, Astron. Astrophys., **178**, 269, 1987.
 21. J.O.Stenflo, Solar Magnetic Fields: Polarized Radiation Diagnostics, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
 22. С.И.Гонасюк, Д.Н.Рачковский, Изв. Крымской астрофиз. общ., **67**, 65, 1983, (Izvestia Crimean Astrophys. Obs., **67**, 65, 1983, in Russian).
 23. Д.Н.Рачковский, Изв. Крымской астрофиз. общ., **67**, 78, 1983, (Izvestia Crimean Astrophys. Obs., **67**, 78, 1983, in Russian).
 24. В.В.Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, М., Наука, 1969, (Transfer of Radiation in Spectral Lines, NBS Special Publication No 385, US Department of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, 1973).
 25. M.A.Heaslet, R.F.Warming, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf., **8**, 1101, 1968.
 26. В.В.Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956, (A Treatise on Radiative Transfer, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1963).
 27. K.M.Case, Rev. Mod. Phys., **29**, 651, 1957.
 28. В.В.Иванов, Д.И.Нагирнер, Астрофизика, **1**, 143, 1965, (Astrophysics, **1**, 86, 1965).

