

ВНУТРЕННЕЕ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА В ОДНОМЕРНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ. I

О.В.ПИКИЧЯН

Поступила 18 июля 2015

Принята к печати 16 декабря 2015

Принцип инвариантности Амбарцумяна применяется в нелинейной задаче переноса излучения для определения внутреннего поля излучения в рассеивающей и поглощающей одномерной анизотропной среде при освещении обеих ее границ интенсивными потоками излучения. Приводятся формулы сложения и погружения слоев для сред конечных геометрических толщин. Показывается, что при нахождении внутреннего поля излучения, как и в линейном случае, в нелинейной задаче также не возникает необходимость решения каких-либо новых уравнений: достаточно использовать лишь явные выражения и величины, найденные при решении более частной задачи о выходящем из среды излучении, т.е. задачи о диффузном отражении и пропускании. Далее, получен полный набор дифференциальных уравнений инвариантного погружения. Стандартная двух-точечная нелинейная граничная задача переноса сводится к задаче с начальными условиями - задаче Коши. Путем исключения производных по толщине слоя формулируется новая задача Коши, где пространственные переменные выступают лишь в качестве фиксированных параметров. Тем самым приходим к полулинейной системе полной инвариантности.

Ключевые слова: *перенос излучения; нелинейная задача переноса излучения; внутреннее поле излучения; принцип инвариантности*

1. *Введение и цель работы.* В недавней работе автора [1] была подробно обсуждена нелинейная задача об отражении и пропускании (ЗОП) излучения при освещении обеих границ одномерного анизотропного слоя конечной геометрической толщины. Посредством последовательного применения подхода Амбарцумяна [2,3] были представлены соотношения сложения слоев и указана их применимость для рекуррентного или пошагового построения различных слоистых (в частности, однородных или периодических) сред путем наращивания толщины (например, путем "удвоения") или суммирования толщин заданных исходных слоев. С помощью этих формул посредством предельного перехода были получены: полный набор дифференциальных уравнений инвариантного погружения и квазилинейная система, так называемой, "полной" инвариантности Амбарцумяна, приводилась мотивация исследования вместе с достаточно подробной библиографией. Впоследствии автором было обнаружено, что два промежуточных уравнения статьи [1], а именно - (57) и (60), впервые

другим путем были получены Беллманом с соавторами в [4] при рассмотрении переноса частиц (см. также формулы (2.6) и (2.10)), соответственно.

Целью данного исследования, состоящего из двух частей, является задача об определении поля излучения внутри одномерной анизотропной среды, границы которой освещаются извне. Вначале приводятся формулы сложения слоев применительно к задаче об определении поля излучения внутри среды. Обсуждаются возможности их практического использования. Показывается, что после решения задачи о нахождении интенсивности излучения, выходящего из среды, внутреннее поле излучения, аналогично линейному случаю, определяется без решения новых уравнений. Далее дается классическая постановка рассматриваемой задачи в виде "двухточечной" нелинейной граничной задачи переноса и обсуждаются возможности сведения ее к задачам с начальными условиями, т.е., к задачам Коши. При этом принцип инвариантности (ПИ) используется в дифференциальной форме. Из соотношений сложения слоев посредством предельного перехода получается полный набор уравнений инвариантного погружения, описывающий интенсивность поля излучения внутри среды, а через него и система полной инвариантности Амбарцумяна. В ней пространственные переменные играют роль фиксированных параметров, а процедура дифференцирования ведется лишь по интенсивностям двустороннего внешнего освещения среды. При этом, как и в линейном случае, решение более частной ЗОП используется в качестве вспомогательной информации, т.е. считается заранее найденной.

Некоторые частные результаты ранее нами были представлены в [5,6] без приведения доказательств.

2. Сложение слоев в нелинейной задаче определения поля излучения внутри среды. Пусть имеются две одномерные анизотропные среды, имеющие геометрические толщины A и B , соответственно, в которых происходят процессы многократного поглощения и рассеяния света. При этом слой толщины B , как и в [1], прикладывается к слою толщины A справа. Полученный составной слой толщины $A+B$ слева и справа освещается мощными пучками излучения интенсивности x и y , соответственно (рис.1). Требуется найти интенсивности излучения $I_{A+B}^{\pm}(l; x, y)$, направленные направо - "+" и налево - "-" на глубине l данного слоя толщины $A+B$ при условии, что решения $I_A^{\pm}(l; x, y)$, и $I_B^{\pm}(l; x, y)$ соответствующих задач для его двух составляющих подслоев с толщинами A и B заданы заранее (геометрические толщина и глубина растут слева направо).

Для начала укажем на очевидный с физической точки зрения факт, заключающийся в том, что поле, сформированное в заданной рассеивающей и поглощающей среде, целиком зависит от излучения, падающего на среду

извне и излучения, обусловленного внутренними источниками энергии [1]. Данное утверждение обеспечивает применимость ПИ также и в более общей, по сравнению с ЗОП [1], задаче об определении внутреннего поля.

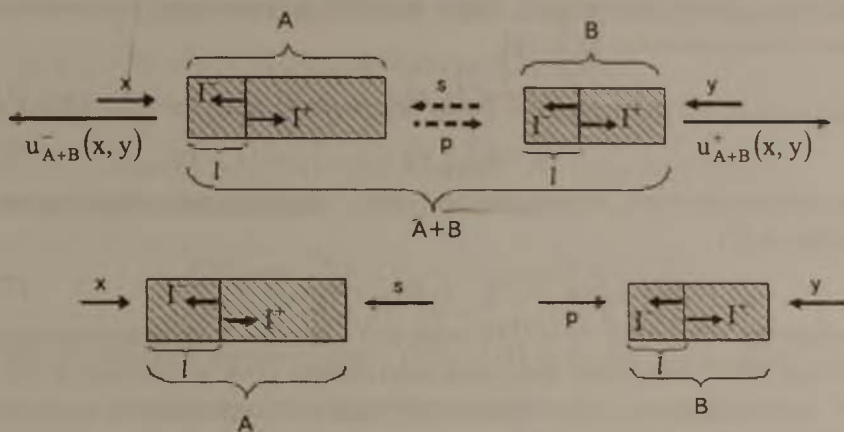


Рис.1. Сложение слоев в нелинейной задаче определения поля излучения внутри среды.

Действительно, интенсивность излучения - $I_{A+B}^{\pm}(l; x, y)$, на данной глубине l исходной составной среды "A+B", при $l < A$ будет идентична интенсивности поля - $I_A^{\pm}(l; x, s)$, в отдельном слое "A", если только на внешней границе $l = A$ этого слоя, падает излучение интенсивности s , сформированное в исходной среде толщины $A+B$. Сказанное можно записать в виде

$$I_{A+B}^{\pm}(l; x, y) = I_A^{\pm}(l; x, s), \quad (1)$$

где

$$s = I_{A+B}^-(A; x, y). \quad (2)$$

Если же рассмотреть поле на глубине $A+l$ исходной среды, то аналогичные соображения приведут к соотношению (при этом $l < B$)

$$I_{A+B}^{\pm}(A+l; x, y) = I_B^{\pm}(l; p, y), \quad (3)$$

где обозначено

$$p \equiv I_{A+B}^+(A; x, y). \quad (4)$$

Величины s и p в соотношениях (2) и (4) представляют интенсивности излучения, направленного соответственно налево и направо внутри среды "A+B", на контактной границе $l = A$. Соотношение (3) в терминах ПИ означает, что интенсивность поля излучения на глубине $A+l$ исходной среды "A+B", сформированное при двустороннем освещении - (x, y) , не изменится, если слева отнять от нее первый слой толщины A , сохраняя при этом величину p в качестве левостороннего освещения для оставшегося второго слоя "B". Аналогичным смыслом обладает соотношение (1) в

случае отнятия от " $A + B$ " правого слоя " B " при неизменности величины результирующего освещения s части " A " со стороны ее правой границы. Принимая, в частности, в (1) $l = A$, с учетом (4), а в (3) $l = 0$, с учетом (2) придем к хорошо известным, более частным выражениям, полученным впервые Амбарцумяном [1,2,5,6]:

$$p = u_A^+(x, s), \quad (5)$$

$$s = u_B^-(p, y). \quad (6)$$

где для интенсивностей, выходящих из среды, мы используем обозначения, принятые в [1]

$$I_A^+(A; x, y) \equiv u_A^+(x, y), \quad I_B^-(0; x, y) \equiv u_B^-(x, y). \quad (7)$$

Соотношения сложения (1) и (3) совместно с системой функциональных уравнений (5-6) позволяют находить внутреннее поле в составном слое " $A + B$ ", когда известны соответствующие поля составляющих ее подслоев " A " и " B ". Таким образом переход от задачи о нахождении выходящих интенсивностей $u_{A+B}^\pm$ (т.е. от ЗОП, см., (2), (3) в [1]), к более общей задаче определения внутреннего поля $I_{A+B}^\pm(l; x, y)$, задающиеся формулами (1), (3), как и в линейном случае, (см., например, [7], а также [8]), не требует решения новых уравнений: достаточно воспользоваться уже известным решением функциональной системы (5), (6) и явными выражениями (1) и (3). Аналогично линейному случаю здесь также, исходя из конкретных вычислительных целей, соотношения сложения позволяют построить множество точных процедур эффективного определения полей излучения внутри различных сред путем пошагового "наращивания" (например удвоения) толщины наперед заданного слоя, конструирования разных слоистых сред, в частности, и периодических, сложения различных слоев с заранее заданными произвольными характеристиками внутренних и внешних полей.

Переименовав $A + B \equiv L$, $A \equiv l$, с учетом обозначений (2), (4), перепишем (5), (6) в виде функциональной системы:

$$I_L^+(l; x, y) = u_l^+(x, I_L^-(l; x, y)), \quad (8)$$

$$I_L^-(l; x, y) = u_{L-l}^-(I_L^+(l; x, y), y). \quad (9)$$

Система функциональных уравнений (8-9) позволяет, для произвольной глубины l в среде толщины L , определить интенсивности излучения, идущего в обе стороны, если известны решения более частных задач о выходящих излучениях для ее двух составляющих частей с толщинами l и $L - l$ в отдельности.

В некоторых приложениях расчета внутренних полей, как и в линейном случае [7,8], может возникнуть необходимость использования алгоритмов

для более общего трехслойного сложения, когда одна среда не приложена, а погружена во вторую среду.

Пусть слой "B" является срединной частью заданной составной среды "A+B+C", тогда для поля внутри этого слоя ($0 < l < B$) можно написать

$$I_{A+B+C}^{\pm}(A+l; x, y) = I_B^{\pm}(l, p, \tilde{s}), \quad (10)$$

а выходящее из среды излучение будет определяться из соотношений

$$I_{A+B+C}^{-}(0; x, y) = u_A^{-}(x, s), \quad I_{A+B+C}^{+}(A+B+C; x, y) = u_C^{+}(\tilde{p}, y), \quad (11)$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} p &\equiv I_{A+B+C}^{+}(A; x, y), \quad \tilde{s} \equiv I_{A+B+C}^{-}(A+B; x, y), \\ s &\equiv I_{A+B+C}^{-}(A; x, y), \quad \tilde{p} \equiv I_{A+B+C}^{+}(A+B; x, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Для нахождения неизвестных в (10) и (11) величин будем иметь систему:

$$p = u_A^{+}(x, s), \quad s = u_B^{-}(p, \tilde{s}), \quad \tilde{s} = u_C^{-}(\tilde{p}, y), \quad \tilde{p} = u_B^{+}(p, \tilde{s}). \quad (13)$$

Очевидно, что соотношения (10-13) в частном случае двухслойного сложения превращаются в (1-7).

3. Краевая задача определения внутреннего поля излучения.

Нелинейную стационарную задачу переноса для простейшего случая одномерной анизотропной среды рассмотрим теперь в ее стандартной дифференциальной постановке в виде классической двухточечной граничной задачи. Ищется поле излучения внутри среды при внешнем освещении двух его границ мощными потоками излучения. Хорошо известно, что уравнение распространения лучистой энергии в рассеивающей-поглощающей среде, т.е. уравнение переноса излучения, представляет собой классическое уравнение Больцмана, записанное для частиц фотонного газа, и является краевой задачей:

$$\frac{\partial I_L^{\pm}}{\partial l} = \pm \alpha(I_L^{+}, I_L^{-}), \quad (14)$$

$$I_L^{+}(0; x, y) = x, \quad I_L^{-}(L; x, y) = y, \quad (15)$$

при этом $I_L^{\pm} \equiv I_L^{\pm}(l; x, y)$, $0 \leq x, y \leq \infty$, $L \geq 0$, $0 \leq l \leq L$.

Здесь $I_L^{\pm}$ - искомая интенсивность на глубине l одномерной среды геометрической толщины L , зависящая от мощностей (x, y) потоков излучения, падающих соответственно на левую ($l=0$) и правую ($l=L$) границы среды, а $\alpha^{\pm}(I_L^{+}, I_L^{-})$ - интеграл столкновений в данной задаче переноса, т.е. закон переработки излучения, в каждой точке среды, веществом ее элементарного объема, находящегося под всесторонним воздействием поля излучения. В частности, для линейной задачи изотропной среды при изотропном рассеянии

$$\alpha^{\pm}(I_L^+, I_L^-) = -k \cdot I_L^+ + \frac{\lambda}{2} \cdot k \cdot (I_L^+ + I_L^-), \quad (16)$$

где k - коэффициент поглощения, а λ - вероятность переизлучения фотона при элементарном акте взаимодействия излучения с веществом. В линейной задаче переноса характеристики среды, такие как k и λ , не зависят от интенсивности диффундирующего в ней излучения, поэтому решение краевой задачи двустороннего освещения среды извне (14) в этом случае сильно упрощается. Оно явным образом, посредством простой линейной комбинации выражается через решения $G_L^{\pm}$ и $\tilde{G}_L^{\pm}$ двух - более частных задач об освещении среды со стороны ее каждой границы по отдельности

$$I_L^{\pm}(l; x, y) = x \cdot G_L^{\pm}(l) + y \cdot \tilde{G}_L^{\pm}(l), \quad (17)$$

т.е. через поверхностные функции Грина

$$G_L^{\pm}(l) = I_L^{\pm}(l; 1, 0) \quad \text{и} \quad \tilde{G}_L^{\pm}(l) = I_L^{\pm}(l; 0, 1). \quad (18)$$

Цифрой "1", здесь обозначен единичный поток излучения в исходной линейной задаче, падающий на соответствующую внешнюю границу среды. Величины $G_L^{\pm}$ и $\tilde{G}_L^{\pm}$, как видно из (18), представляют не зависящие друг от друга интенсивности внутреннего поля излучения на геометрической глубине l рассеивающего и поглощающего слоя толщины L , образуемые под воздействием указанных единичных потоков, освещающих слой с одной или другой стороны по отдельности. Таким образом в линейном случае для нахождения поля излучения внутри среды путем решения краевой задачи (14), при двустороннем освещении (x, y) , достаточно рассмотреть в отдельности две более простые задачи, соответствующие частным условиям одностороннего освещения $(x, 0)$ и $(0, y)$ и составить из полученных решений комбинацию (17). Положение сложнее в нелинейном случае, ибо прямая связь (17) не имеет места, вследствие чего исходную граничную задачу двустороннего освещения среды приходится решать в ее общей постановке (14). Теперь излучение изменяет рассеивающие и поглощающие способности среды, а среда в свою очередь видоизменяет характеристики диффундирующего в ней излучения. Поэтому возникает необходимость поиска эффективных путей решения задачи (14). В нелинейном случае будем использовать неявную запись интеграла столкновений - $\alpha^{\pm}(I_L^+, I_L^-)$, считая ее форму наперед заданной.

4. *Применение принципа инвариантности.* Теория линейных задач переноса получила существенный прогресс в связи с введением Амбарцумяном ПИ [9-14]. В астрофизике и атмосферной оптике подход ПИ впоследствии успешно применялся в работах Соболева [15], Чандрасекара [16] и других, а также в различных областях физики,

математики [17]. Область применения данного подхода сильно расширилась, благодаря разработке и широкому применению Беллманом и другими [18], так называемого, инвариантного погружения в теории переноса частиц, волн [19] и задачах прикладной математики [20,21]. В дальнейшем внимание исследователей было направлено к нелинейным задачам переноса. В [4] они рассматривались с использованием инвариантного погружения. Путем дальнейшего развития метода сложения слоев и предельного перехода от функциональных уравнений к дифференциальным Амбарцумяну [2,3] удалось нелинейную ЗОП свести к задаче Коши для квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных (см. также [4]). Аналогично линейному случаю, здесь также знание решения ЗОП $u_L^*(x, y)$ позволяет двухточечную граничную задачу (14) о нахождении поля излучения внутри среды свести к более простой задаче с начальными условиями, заданными только на одной из границ среды.

Для этого, как известно [4], граничное условие (15) достаточно заменить начальным условием

$$I_L^+|_{l=0} = x, \quad I_L^-|_{l=0} = u_L^-(x, y) \quad \text{или} \quad I_L^+|_{l=L} = u_L^+(x, y), \quad I_L^-|_{l=L} = y. \quad (19)$$

Последовательное применение подхода Амбарцумяна позволило пополнить количество дифференциальных уравнений инвариантного погружения в нелинейной ЗОП излучения, и получить полный набор таких уравнений [1,5,6]. Это позволило свести решение ЗОП к новой квазилинейной системе уравнений - системе полной инвариантности Амбарцумяна. Все пространственные переменные здесь выступают в качестве фиксированных параметров, а процедура дифференцирования проводится только по параметрам внешнего излучения, падающего на обе границы среды.

Применением ПИ рассмотрим теперь новые, по сравнению с (14), возможности определения поля излучения внутри среды. В соотношениях (3) и (1) для геометрических толщин слоев примем значения $A \equiv \Delta$ и $B \equiv \Delta$ соответственно, устремим $\Delta \rightarrow 0$ и выполним необходимые разложения в их левых частях:

$$I_{\Delta+\Delta}^{\pm}(\Delta + l; x, y) = I_L^{\pm}(l; x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{\partial}{\partial l} \right) I_L^{\pm}(l; x, y) \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad (20)$$

$$I_{L+\Delta}^{\pm}(l, x, y) = I_L^{\pm}(l; x, y) + \frac{\partial}{\partial L} I_L^{\pm}(l; x, y) \cdot \Delta + O(\Delta^2). \quad (21)$$

Для упрощения правых частей (3) и (1) воспользуемся соотношениями (13,14) и (20,21) из [1]:

$$p = x + \alpha^+(x, u_L^-) \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad s = u_L^- + \alpha^+(x, u_L^-) \cdot \frac{\partial u_L^-}{\partial x} \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad (22)$$

$$\tilde{s} = y + \alpha^-(u_L^+, y) \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad \tilde{p} = u_L^+ + \alpha^-(u_L^+, y) \cdot \frac{\partial u_L^+}{\partial y} \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad (23)$$

где

$$u_L^+ \equiv u_L^+(x, y) = I_L^+(L; x, y), \quad u_L^- \equiv u_L^-(x, y) = I_L^-(0; x, y). \quad (24)$$

Подставляя (22) и (23) в правые части (3) и (1) и используя (20) и (21), после несложных выкладок получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{\partial}{\partial l} \right) I_L^\pm = \alpha^\pm(x, u_L^\pm) \frac{\partial I_L^\pm}{\partial x}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial I_L^\pm}{\partial L} = \alpha^\pm(u_L^\pm, y) \frac{\partial I_L^\pm}{\partial y}. \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) новые, они выгодно отличаются от исходных полулинейных систем - (14,15) и (14,19) (классификация уравнений по [22]). Действительно, во-первых, правые части уравнений (14) $\alpha^\pm(I_L^+, I_L^-)$ зависят одновременно от обоих искомым величин I_L^+ и I_L^- (свойство связности уравнений $I_L^\pm$), во-вторых, функциональная зависимость от интенсивностей I_L^+ , I_L^- здесь нелинейна (свойство полулинейности уравнений). Уравнения же (25) и (26) выгодно отличаются от (14) тем, что по отношению к $I_L^\pm$ они являются, как раздельными, так и линейными. Напомним, что задача Коши (14,19) была сформулирована путем замены двухточечного граничного условия в (14,15) для величины I_L^- , новым - начальным условием, заданного теперь на противоположной границе $l=0$, вследствие чего потребовалась дополнительная информация о решении вспомогательной ЗОП. В отличие от этого здесь (уравнения (25) и (26)) задача Коши возникает естественным образом за счет свойства разделенности между I_L^+ и I_L^- , поскольку характеристики ЗОП фигурируют уже в самих уравнениях. Исключая из (25) производную по глубине с помощью (14), получим новую полулинейную и связную систему инвариантного погружения

$$\frac{\partial I_L^\pm}{\partial L} = \alpha^\pm(x, u_L^\pm) \frac{\partial I_L^\pm}{\partial x} \mp \alpha^\pm(I_L^+, I_L^-). \quad (27)$$

В задаче определения внутреннего поля раздельные линейные уравнения (26), совместно с полулинейной связной системой (27), представляют (в смысле терминологии Беллмана) полный набор уравнений инвариантного погружения. С помощью начальных условий например:

$$I_L^\pm \Big|_{y=0} \equiv I_L^\pm(l; x, 0) = X_L^\pm(l; x) \quad \text{и} \quad I_L^\pm \Big|_{x=0} \equiv I_L^\pm(l; 0, y) = Y_L^\pm(l; y), \quad (28)$$

формулируется задача Коши для (26) и (27) соответственно, иначе для обоих уравнений можно взять

$$I_L^+|_{L=l} = u_l^+(x, y), \text{ и } I_L^-|_{L=l} = y. \quad (29)$$

Примечательно, что комбинирование уравнений (26) и (27) выявляет возможность определения внутреннего поля излучения без применения операции дифференцирования по какой-либо пространственной переменной, позволяя тем самым получить новую полулинейную систему полной инвариантности Амбарцумяна

$$\left[\alpha^+(x, u_L^-) \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right] I_L^\pm = \pm \alpha^\pm(I_L^+, I_L^-), \quad (30)$$

$$I_L^\pm|_{x=0} = Y_L^\pm(l; y) \text{ или } I_L^\pm|_{y=0} = X_L^\pm(l; x), \quad (31)$$

где, в отличие от (26) и (27), пространственные переменные выступают лишь в качестве фиксированных параметров. Задача (30,31) обобщает аналогичный результат, полученный нами в ЗОП (ниже - формула (33,34)). Величины $X_L^\pm$ и $Y_L^\pm$ при этом, описывают задачу одностороннего освещения среды и здесь считаются известными (о нахождении этих вспомогательных, частных величин см. во второй статье данного исследования), дифференциальный же оператор полной инвариантности Амбарцумяна [1]

$$\hat{A} \equiv \alpha^+(x, u_L^-) \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \quad (32)$$

как и в ЗОП [1,5,6], описывает изменение (реакцию) установившегося поля излучения в исходной среде, когда интенсивности, освещающие извне обе ее внешние границы, подвергаются бесконечно малому варьированию посредством операции добавления слева и, одновременно, отнятия справа элементарного слоя толщины $\Delta \rightarrow 0$. Примечательно, что появление этого оператора является следствием именно нелинейности задачи, а его построение, как известно [1,5,6], осуществляется посредством решения ЗОП:

$$\begin{cases} \left[\alpha^+(x, u_L^-) \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right] u_L^+ = +\alpha^+(u_L^+, y) \\ \left[\alpha^+(x, u_L^-) \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^-(u_L^+, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right] u_L^- = -\alpha^-(x, u_L^-), \end{cases} \quad (33)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } u_L^+|_{y=0} &\equiv T_L^+(x), \quad u_L^-|_{y=0} \equiv R_L^-(x) \text{ или} \\ \text{б) } u_L^+|_{x=0} &\equiv R_L^+(y), \quad u_L^-|_{x=0} \equiv T_L^-(y). \end{aligned} \quad (34)$$

Напомним, что в линейном случае вместо задачи Коши (33, 34) имеются явные выражения:

$$u_L^+ = x \cdot \tilde{T}_L^+ + y \cdot \tilde{R}_L^+, \quad u_L^- = x \cdot \tilde{R}_L^- + y \cdot \tilde{T}_L^-,$$

при этом

$$\begin{aligned} \tilde{T}_L^+ &\equiv G_L^+(L) = I_L^+(L; 1, 0), & \tilde{R}_L^+ &\equiv \tilde{G}_L^+(L) = I_L^+(L; 0, 1), \\ \tilde{R}_L^- &\equiv G_L^-(0) = I_L^-(0; 1, 0), & \tilde{T}_L^- &\equiv \tilde{G}_L^-(0) = I_L^-(0; 0, 1). \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{R}_L^\pm$ и $\tilde{T}_L^\pm$ - линейные коэффициенты отражения и пропускания среды при освещении одной из ее границ потоком единичной мощности. Таким образом, сначала независимым образом, посредством квазилинейной системы (33) (или любым иным путем см., например, [1]), решается задача о нахождении выходящего из среды излучения - $u_L^\pm$, т.е. ЗОП, а затем ее решение используется для определения искомого внутреннего поля $I_L^\pm$ из системы (30). Следует обратить внимание на то, что при переходе от частной задачи выходящего излучения (33) к более общей задаче об определении поля внутри среды (30) дифференциальный оператор полной инвариантности Амбарцумяна (32), во-первых, сохраняет свою форму (т.е. не усложняется), во-вторых, как и в ЗОП (33), оперирует лишь энергетическими переменными, оставляя значения пространственных переменных фиксированными и, наконец, в-третьих - искомые функции уже не входят в коэффициенты операторов дифференцирования, т.е. задача с начальными условиями здесь формулируется лишь для полулинейной системы (30), в отличие от квазилинейной - (33).

5. *Заключение.* В качестве заключения кратко перечислим изложенные выше результаты данной статьи:

1. Получены формулы сложения и погружения слоев ((1), (3) и (10), (12)) в нелинейной задаче лучистого переноса энергии для определения внутреннего поля излучения при освещении одномерного анизотропного слоя конечной геометрической толщины со стороны обеих ее границ. При этом показано:

- В методе сложения или погружения слоев при переходе от ЗОП, т.е. - определения выходящего из составной среды излучения, к задаче нахождения поля излучения внутри среды не возникает необходимость решения каких-либо новых уравнений, используются явные выражения и решения систем (5-6) или (13), которые были уже найдены в задаче определения выходящего из среды излучения.

- Соотношения инвариантности (8-9), связывающие между собой налево и направо идущие внутренние поля на каждой глубине составной среды, позволяют непосредственно определить интенсивности поля на любой заданной глубине путем решения системы функциональных уравнений (8-9). В ней глубина является фиксированным параметром, а решения ЗОП для двух соответствующих подслоев данной среды считаются известными.

2. Путем систематического применения ПИ исходная нелинейная граничная задача об определении поля излучения внутри одномерной анизотропной среды, освещенной со стороны обеих ее внешних границ, интенсивными потоками излучения удастся свести к поэтапному, последовательному решению задач лишь с начальными условиями, при этом, результаты решения предыдущих задач используются для нахождения решений последующих задач. В частности:

- В задаче поиска внутреннего поля излучения при двустороннем внешнем освещении среды получен "полный набор" дифференциальных уравнений инвариантного погружения: линейные - (26), полулинейные - (27).

- Граничная задача определения поля излучения внутри среды при ее двустороннем внешнем освещении сводится к более частным задачам той же среды: к задаче о выходящем излучении - ЗОП и задачам ее одностороннего освещения.

- Получена новая система функциональных уравнений полной инвариантности Амбарцумяна (30), которая представляет собой задачу Коши, при этом, значения пространственных переменных являются фиксированными параметрами, а дифференцирование ведется лишь по энергетическим переменным, относящимся к возбуждающему средо внешнему излучению.

Выражаю искреннюю признательность профессору А.Г.Никогосяну за сделанные ценные замечания, послужившие улучшению представленной работы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна,
Армения, e-mail: hovpik@gmail.com hovpic@bao.sci.am

INTERNAL FIELD IN ONE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC MEDIUM OF NON-LINEAR RADIATIVE TRANSFER PROBLEM. I

H.V.PIKICHYAN

Ambartsumian's principle of invariance is applied to the non-linear problem of radiative transfer in determining the internal radiation field in one-dimensional scattering and absorbing anisotropic medium, both boundaries of which are illuminated by intense fluxes of radiation. The formulas of addition and imbedding of layers for a medium of finite geometrical thickness are presented.

It is shown that by analogy to the linear case, there is no need to solve any new equations, it is sufficient to use only explicit expressions and quantities found by solving a more particular problem of diffuse reflection and transmission. Further, a complete set of differential equations of invariant imbedding is derived. Thus, a standard two-point boundary-value problem of radiative transfer is reduced to a initial-value problem, i.e. to the Cauchy problem. A new Cauchy problem can be readily formulated by excluding the partial derivatives over the thickness of a layer, where the spatial variables play a role of fixed parameters, i.e., we arrive at a semi-linear system of Ambartsumian's complete invariance.

Key words: *radiative transfer: non-linear problem: internal field of radiation: principle of invariance*

ЛИТЕРАТУРА

1. О.В.Пикичян, Астрофизика, **53**, 285, 2010, (Astrophysics, **53**, 251, 2010).
2. В.А.Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, **38**, 225, 1964.
3. В.А.Амбарцумян, в кн.: "Теория звездных спектров", под. ред. В.В.Соболева и др., с.91, М., Наука, 1966, 388с.
4. R.Bellman, R.Kalaba, M.Wing, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **46**, 1646, 1960.
5. H.V.Pikichian, p.302, in Proc. of the Conf. "Evolution of Cosm. Obj. through their Phys. Activity" (dedic. to V.Ambartsumian's 100-th anniversary, 15-18 sept. 2008 Yerevan-Byurakan, Armenia), Eds. H.Harutyunian, A.Mickaelian, Y.Terzian, Publ. House of NAS RA, Yerevan, 2010, 356p.
6. H.Pikichian, p.226, in "Proc. of international conf. on "Lasers'97"" (New Orleans, LA, December. 15-19, 1997), Ed. by J.J.Carrol, T.A.Goldman, STS press, McLEAN, VA, 1998, 1011p.
7. Э.Г.Яновицкий, Астрон. ж., **56**, 833, 1979.
8. О.В.Пикичян, Сообщ. Бюр. Обс., **5**, 1984.
9. В.А.Амбарцумян, Астрон. ж., **19**, 30, 1942.
10. В.А.Амбарцумян, ДАН СССР, **38**, 257, 1943.
11. В.А.Амбарцумян, ЖЭТФ, **13**, N9-10, 323, 1943.
12. В.А.Амбарцумян, ДАН СССР, **43**, 106, 1944.
13. В.А.Амбарцумян, Изв. АН Арм. ССР, Естеств. науки, N1-2, 31, 1944.
14. В.А.Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, **7**, 199, 1947.
15. В.В.Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956, 391с.
16. С.Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953, 432с.
17. "Принцип инвариантности и его приложения" (труды симпозиума провед. 26-30 окт. 1981г. в Бюракане), под. ред. М.А.Мнацаканяна, О.В.Пикичяна,

Изд. АН Арм.ССР, с.88, Ереван, 1989, 522с.

18. *R.Bellman, G.M.Wing*, An introduction to Invariant Imbedding, (Classics in Appl. Math., vol.8), John Wiley & Sons, Inc., New York, p.248, 1975 (Philadelphia: SIAM, 1992).
19. *В.И.Кляцкин*, Метод погружения в теории распространения волн (серия: Совр. пробл. физ.), М., Наука-ГРФМЛ, 1986, 256с.
20. *Дж.Касты, Р.Калаба*, Методы погружения в прикладной математике, М., Мир, 1976, 224с.
21. *Р.Беллман*, Динамическое программирование, М., ИЛ, 1960, 400с.
22. *Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко*, Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., Наука, 1978, 688с.

