АСТРОФИЗИКА

ТОМ 58 АВГУСТ, 2015 ВЫПУСК 3

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СТАЦИОНАРНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Р.М.АВАКЯН[1], Г.Г.АРУТЮНЯН[1], С.В.СУШКОВ[2]

Поступила 6 мая 2015
Принята к печати 24 июня 2015

Проблему изучения стационарных гравитационных полей и в настоящее время нельзя считать решенной, поскольку нет точного общего решения уравнений Эйнштейна, описывающего стационарное гравитационное поле. В настоящей работе рассматривается подход к этой задаче с использованием изотропных координат, позволивший, в частности, понять, в результате каких упрощений получается решение Керра.

Ключевые слова: *стационарное гравитационное поле:изотропные координаты*

1. *Введение.* Исследование стационарных гравитационных полей относится к разряду проблем, которые не теряют своей актуальности. Необходимой основой такого изучения является построение разнообразных семейств решений уравнений гравитационных теорий. Особенно важно иметь точные решения, поскольку они позволяют выяснить качественные особенности рассматриваемых задач. Как правило, наибольший интерес с точки зрения физических и особенно астрофизических приложений представляют задачи, связанные с исследованием гравитационных полей, наделенных определенной симметрией. Чаще всего это поля, соответствующие стационарному или статическому аксиально- или сферически-симметричному пространству-времени.

Отождествление пульсаров с вращающимися сверхплотными звездами давно установленный факт, поэтому актуальность задачи о гравитационном поле стационарно вращающейся звезды не вызывает сомнений. Однако на сегодняшний день эту задачу нельзя отнести к разряду точно решаемых. Пригодность приближенных методов можно оценить, имея точное решение проблемы, регулярное на оси симметрии, асимптотически плоское на больших расстояниях от источника и корректно сшитое с внутренним решением. Ограниченное число известных сегодня стационарных решений этими свойствами не обладает. Популярное внешнее решение Керра [1] не сшивается с каким-либо внутренним решением. Семейство решений Томиматсу-Сато [2] в отсутствии вращения сохраняет аксиальную симметрию, что не поддается разумной физической интерпретации.

В ОТО немного точных решений полевых уравнений, описывающих стационарные аксисимметричные гравитационные источники. Известных астрофизических решений всего четыре, каждое из которых двухпараметрическое (масса, угловой момент). Первое из них - это решение Керра (1963г.), в основном связанное с интерпретацией физики черных дыр (Хоккинг, Эллис 1973г.). В 1972г. в вытянутых сфероидальных координатах, с использованием формализма комплексного потенциала Эрнста (1968, 1974гг.), получено решение Томиматсу-Сато (TS) для целых значений параметра $\delta=1,2,3,4$, связанного с квадрупольным моментом $Q=m^3\left(q^2+p^2\frac{\left(\delta^2-1\right)}{3\delta^2}\right)$ ($p^2=1-q^2$, m - масса конфигурации). Это решение было обобщено Косгровом (1978г.) для любых значений δ и в результате получено трехпараметрическое решение. В 1990г. получено четырехпараметрическое вакуумное решение осесимметричной стационарной задачи ОТО с необычным выбором координат и предположением о потенциальности поля вектора угловой скорости конгруэнции мировых линий, образующих сопутствующую систему отсчета [3,4]. Это решение в частном случае переходит в модифицированный вариант известного решения НУТ, которое, в отличие от него, асимптотически плоское и регулярно на оси симметрии. Упомянутая методика дает в статическом случае все решения класса А для вырожденных статических гравитационных полей в вакууме, а также решения Шварцшильда. В 1967-1968гг. были опубликованы результаты приближенных исследований твердотельно вращающихся сверхплотных небесных тел, в которых вращение играло роль малого возмущения [5,6].

В настоящей работе сделана попытка исследовать решение проблемы в изотропных координатах. В первой части работы получена формула для интегральных параметров конфигурации, в частности, формула для массы конфигурации, во второй и далее изложен способ интегрирования системы полевых уравнений в рамках ОТО, и,в частности, приведено решение Керра.

2. *Уравнения Эйнштейна.* Метрика аксисимметричного гравитационного поля выбрана в виде

$$dS^2=e^{2\nu}dt-e^{2\lambda}\left(dr^2+r^2d\theta^2\right)-r^2e^{2\mu}\sin^2\theta\left(d\varphi+\omega dt\right)^2, \tag{1}$$

где компоненты метрического тензора удобно представить в виде

$$\begin{aligned}
g_{00}&=e^{2\nu}-\omega^2L, & g^{00}&=e^{-2\nu},\\
g_{11}&=-e^{2\lambda}, & g^{11}&=-e^{-2\lambda},\\
g_{22}&=-r^2e^{2\lambda}, & g^{22}&=-1/r^2e^{2\lambda},\\
g_{33}&=-L, & g^{33}&=\omega^2e^{-2\nu}-1/L,\\
g_{03}&=-\omega L, & g^{03}&=-\omega e^{-2\nu},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $L \equiv f^2 e^{-2\nu}$, $f \equiv r\sin\theta\, e^{\mu+\nu}$, $\sqrt{-g} = rfe^{2\lambda}$ и в случае твердотельного вращения $u^3 = \Omega u^0$, $(u^0)^2 = \left[e^{2\nu} - L(\Omega+\omega)^2\right]^{-1}$.

Соответствующие уравнения Эйнштейна имеют вид

$$G_0^0 = \frac{rf}{2\sqrt{-g}}\left\{4\nu_1\frac{f_1}{f} - 2\left(\lambda_{11} + \frac{f_{11}}{f}\right) + \frac{2}{r}\left(\nu_1 - \lambda_1 - \frac{f_1}{f}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\left[4\nu_2\frac{f_2}{f} - 2\left(\lambda_{22} + \frac{f_{22}}{f}\right)\right]\right\} - \frac{fr}{2\sqrt{-g}}L\left(\omega_1^2 + \frac{\omega_2^2}{r^2}\right) = \frac{x\left[P + PL(\omega+\Omega)^2\right]}{1 - L(\omega+\Omega)^2}. \tag{3}$$

$$G_1^1 = -\frac{rf}{2\sqrt{-g}}\left\{2\nu_1\left(\mu_1 + \frac{1}{r}\right) + 2\lambda_1\frac{f_1}{f} + \frac{2}{r}\frac{f_1}{f} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\left[2\nu_2(\mu_2 + \mathrm{ctg}\theta) + 2\lambda_2\frac{f_2}{f} + 2\frac{f_{22}}{f}\right]\right\} - \frac{1}{4}\frac{fr}{\sqrt{-g}}L\left(\omega_1^2 - \frac{\omega_2^2}{r^2}\right) = -xP. \tag{4}$$

$$G_2^2 = rf\left\{-\frac{2f_{11}}{f} + 2\lambda_1\frac{f_1}{f} + 2\nu_1\left(\mu_1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\left[2\lambda_2\frac{f_2}{f} + 2\nu_2(\mu_2 + \mathrm{ctg}\theta)\right]\right\} +$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{fr}{\sqrt{-g}}L\left(\omega_1^2 - \frac{\omega_2^2}{r^2}\right) = -xP. \tag{5}$$

$$G_3^3 = \frac{fr}{2\sqrt{-g}}\left\{-2(\nu_{11} + \lambda_{11}) - \frac{2(\nu_1 + \lambda_1)}{r} - 2\nu_1^2 - \frac{1}{r^2}\left[2(\nu_{22} + \lambda_{22}) + 2\nu_2^2\right]\right\} +$$
$$+ \frac{3}{4}\frac{fr}{\sqrt{-g}}L\left(\omega_1^2 + \frac{\omega_2^2}{r^2}\right) = -\frac{x\left(P + \rho L(\omega+\Omega)^2\right)}{1 - L(\omega+\Omega)^2}. \tag{6}$$

$$G_3^0 = -\frac{rf}{2\sqrt{-g}}\left\{\frac{(rfL\omega_1)_1}{rf} + \frac{1}{r^2}\frac{(rfL\omega_2)_2}{rf}\right\} = -x\frac{(P+\rho)L(\omega+\Omega)}{1 - L(\omega+\Omega)^2}. \tag{7}$$

$$G_2^1 = \frac{rf}{\sqrt{-g}}\left\{\left(\frac{f_2}{f}\right)_1 - \lambda_2\frac{f_1}{f} - \left(\lambda_1 + \frac{1}{r}\right)\frac{f_2}{f} + \nu_1\nu_2 + \left(\mu_1 + \frac{1}{r}\right)(\mu_2 + \mathrm{ctg}\theta)\right\} -$$
$$- \frac{frL}{2\sqrt{-g}}\omega_1\omega_2 = 0. \tag{8}$$

Наиболее простая комбинация уравнений

$$G_1^1 + G_2^2 = -2xP$$

может быть представлена в виде

$$r^2 f_{11} + rf_1 + f_{22} = 2x\sqrt{-g}\, rP. \tag{9}$$

Здесь $\chi = 8\pi G/c^4$.

3. *Вакуумное решение уравнения (9).* Имея в виду асимптотическое

поведение e^{μ} и e^{ν} на бесконечности ($e^{\mu}=e^{\nu}=1$) решение уравнения (9) целесообразно искать в виде

$$f = r\sin\theta + \sum_{n=0} \frac{c_n}{r^n}\Phi^{(n)}(\theta), \tag{10}$$

в результате чего для $\Phi(\theta)$ получается

$$\Phi(\theta)^{(n)}_{22} + n^2\Phi^{(n)}(\theta) = 0. \tag{11}$$

С учетом симметрии относительно экваториальной плоскости вращающегося тела ($\theta \to \pi - \theta$) общее решение принимает вид

$$f(r,\theta) = r\sin\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{2n-1}}{r^{2n-1}}\sin((2n-1)\theta), \tag{10a}$$

и соответственно,

$$e^{\mu+\nu} = y(r,\theta) = 1 + \sum_{n=1} \frac{c_{2n-1}}{r^{2n}}\frac{\sin((2n-1)\theta)}{\sin\theta}, \tag{12}$$

в которых отброшены члены, пропорциональные $\cos\theta$, так что в (12) отличны от нуля только константы c_{2n-1} [7].

4. *Внутреннее решение уравнения (9).* Уравнение, которому удовлетворяет $y(r,\theta)$ внутри конфигурации, имеет вид

$$y_{11} + \frac{3y_1}{r} + \frac{y_{22}}{r^2} + \frac{2y_2}{r^2}\mathrm{ctg}\theta = 2xP(r,\theta)fe^{2\lambda}r^2. \tag{13}$$

В соответствии с (12) внутреннее решение будем искать в виде

$$f_b = r\sin\theta\, y(0) + \sum_{n=1} F^{(2n-1)}\sin((2n-1)\theta), \tag{14}$$

$$y_b = y(0) + \sum_{n=1} \frac{F^{(2n-1)}}{r}\frac{\sin((2n-1)\theta)}{\sin\theta}. \tag{15}$$

В результате подстановки в (9) или (13) имеем

$$\sum_{n=1}\sin(2n-1)\theta\left\{r^2F_{11}^{(2n-1)} + rF_1^{(2n-1)} - (2n-1)^2F^{(2n-1)}\right\} = 2xP(r,\theta)\cdot r\sqrt{-g}. \tag{16}$$

Воспользовавшись известным соотношением [7]

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin((2n-1)\theta)\sin m\theta\, d\theta = \pi\delta_{2n-1,m},$$

умножим обе части (16) на r^{m-1} и получим

$$\int_0^R\left(r^{m+1}F_{11}^{(m)} + r^mF_1^{(m)} - m^2r^{m-1}F^{(m)}\right)dr = \frac{2x}{\pi^2}\int Pr^m\sqrt{-g}\sin(m\theta)d^3x. \tag{17}$$

Интегрирование (17)по частям с учетом внешнего решения $F_1^{(m)} = -mc_m/R^{m+1}$ дает

$$-2mc_m = \frac{2x}{\pi}\int Pr^m \sin(m\theta)\sqrt{-g}\,d^3x. \tag{18}$$

В отсутствии вращения ($\omega = 0$) из решения сферически-симметричной задачи в изотропных координатах имеем [8]

$$e^{\mu+\nu} = 1 - \frac{4G^2M^2}{c^4r^2}, \tag{19}$$

(здесь M - масса конфигурации).

Сравнивая (19) с полученным результатом (18), получаем, в частности,

$$-c_1 = \frac{M^2}{4} \quad (G=1,\ c=1). \tag{20}$$

5. *Решение Керра в изотропных координатах*. Сравнение метрики Керра (в представлении Бойера-Линквиста) с метрикой (1) дает связь радиальной координаты r (изотропная) и r_k (керровская)

$$r_k = R + \frac{r_g}{2} + \frac{r_g^2 - 4a^2}{16R}. \tag{21}$$

Соответственно (21) метрические коэффициенты керровского решения в изотропных координатах

$$e^{2\nu} = \frac{\Delta\rho^2}{\Delta\rho^2 + r_k r_g\left(r_k^2 + a^2\right)}, \tag{22}$$

$$e^{2\mu} = \frac{\Delta\rho^2 + r_k r_g\left(r_k^2 + a^2\right)}{R^2\rho^2}, \tag{23}$$

$$e^{2\lambda} = \frac{\rho^2}{R^2} = \left(\frac{r_k^2}{R^2} + \frac{a^2}{R^2}\cos^2\theta\right), \tag{24}$$

$$\omega = \frac{a r_k r_g}{\left[\Delta\rho^2 + r_k r_g\left(r_k^2 + a^2\right)\right]}, \tag{25}$$

где $\Delta = r_k^2 + a^2 - r_k r_g$, $\rho^2 = r_k^2 + a^2\cos^2\theta$.

Из (22) и (23) имеем

$$e^{\mu+\nu} = \left(1 - \frac{\left(r_g^2 - 4a^2\right)}{16R^2}\right), \tag{26}$$

откуда $\nu_2 + \lambda_2 = 0$, тогда как в общем решении (12) угловая часть решения отсутствует только в статическом случае.

6. *Метрика Керра как частный случай 4-х параметрического решения*. Можно показать, что метрика Керра является частным случаем аксисимметричной стационарной задачи, при решении которой использован необычный выбор координат, а также предположение о потенциальности

поля вектора угловой скорости конфигурации мировых линий, образующих используемую сопутствующую систему координат, иными словами предполагая эти поля безвихревыми.

Метрика вакуумной задачи в этом случае с координатами Φ и ρ

$$dS^2 = \Phi^2 (dt - q d\varphi)^2 - e^{2\alpha}(d\rho - l d\Phi)^2 - e^{2\beta} d\Phi^2 - \rho^2 d\varphi^2 ,$$

переписанная для частного случая $2ka^2 = 1$, с переобозначенными константами $Ca^2 \equiv A$ и $b/a^2 \equiv B$ приобретает вид

$$e^{2\alpha} = \left[1 - \rho^2 f(\Phi)\right]^{-1}, \quad f(\Phi) = \left[Ae^{\beta}\left(1 + \frac{B^2}{4}\right)\sqrt{1 - B^2 \Phi^4} \right]^{-1},$$

$$q = 2AB\left(1 + \frac{B^2}{4}\right)\left(e^{-\alpha} - 1\right), \quad l = \frac{1}{2}\rho L(\Phi),$$

$$e^{\beta} = 2AB\sqrt{1 - B^2 \Phi^4}\left[\frac{L^2}{4} + \frac{L}{\Phi} - \frac{B^2 \Phi^2}{1 + B^2 \phi^4}\right],$$

$$L(\Phi) = \frac{2\Phi}{\sqrt{1 - B^2 \Phi^4}} \frac{\left(1 - \frac{B^2}{4}\right) + \left(1 + \frac{B^2}{4}\right)\sqrt{1 - B^2 \Phi^4}}{1 - \left(1 + \frac{B^2}{4}\right)\Phi^2}.$$

Переписывая часть исходной метрики (t, φ) в эквивалентной форме

$$\frac{\rho^2 \Phi^2}{\rho^2 - q^2 \Phi^2} dt^2 - \left(\rho^2 - q^2 \Phi^2\right)\left(d\varphi + \omega dt\right),$$

где $\omega = \dfrac{q\Phi^2}{\rho^2 - q^2 \Phi^2}$, осуществляя переход к новой сопутствующей системе координат преобразованием

$$d\varphi = d\varphi' + (\omega - \omega_k) dt, \quad \omega_k = \frac{2aMr}{\left(r^2 + a^2\right)R^2 + 2Ma^2 r \sin^2\theta}, \quad R^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta,$$

приводим метрику к виду с исчезающим на бесконечно больших расстояниях метрическим коэффициентом g_{03}.

Вводя обозначения

$$\Phi^2 = 1 - \frac{2Mr}{R^2} \quad \text{и}$$

$$\rho^2 = \left[r^2 + a^2 + \frac{r r_g a^2 \sin^2\theta}{R}\left(1 + \frac{r r_g \sin^2\theta}{R^2 - r r_g}\right)\right] \sin^2\theta ,$$

окончательно получаем решение Керра.

Отметим, что исходное решение обладает свойством регулярности на оси вращения, и в результате рассмотренное частное решение асимптотически псевдоевклидово. Таким образом, существует принципиальная возможность сшивки вакуумного решения с соответствующим внутренним решением.

7. *Заключение*. В работе выполнены расчеты [9,10], на основе которых выявлены ограничения, приводящие общее точное решение для гравитационного поля равномерно вращающейся конфигурации к решению Керра . Выяснено, что в процессе вывода решения Керра отброшены все мультипольные моменты, и кроме константы интегрирования *M*, введен параметр *a*, ответственный за вращение [11].

Уже в первой статье Керра [12] было отмечено, что это решение является примером алгебраически специальной метрики того же класса, что и известное решение НУТ [13]. Это позволило обнаружить, что решение Керра частный случай известного 4-х параметрического решения [14], полученного в предположении о потенциальном характере поля вектора угловой скорости конфигурации мировых линий, образующих используемую сопутствующую систему координат.В результате открылась также возможность построения внутреннего решения.

Работа выполнена при поддержке Госкомитета по науке МОН РА в рамках совместного русско-армянского исследовательского проекта 15RF-009.

[1] Кафедра теоретической физики им. акад. Г.С.Саакяна, ЕГУ, Армения, e-mail: rolavag@ysu.am hagohar@ysu.am

[2] Казанский (Приволжский) федеральный университет, e-mail: sergey_sushkov@mail.ru

ON SOME PROPERTIES OF THE STATIONARY GRAVITATIONAL FIELD

R.M.AVAGYAN[1], G. H. HARUTYUNYAN[1], S.V.SUSHKOV[2]

Currently the problem of the study of stationary gravitational fields cannot be considered as solved, because there is no exact general solution of Einstein's equations describing the stationary gravitational field. In this paper we consider the approach to this problem using the isotropic coordinates that, in particular, allowed to understand after which simplifications one can obtain the Kerr solution.

Key words: *stationary gravitational field: isotropic coordinates*

ЛИТЕРАТУРА

1. *R.Kerr*, Phys. Rev. Lett., **11**, 18, 1963.
2. *A.Tomimatsu*, *S.H.Sato*, Progr. Theor. Phys., **50**, 95, 1973.
3. *Р.М.Авакян*, *Г.Г.Арутюнян*, *В.В.Папоян*, Астрофизика, **32**, 465, 1990, (Astrophysics, **32**, 269, 1990).
4. *Г.Арутюнян*, *В.Папоян*, Астрофизика, **32**, 453, 1990, (Astrophysics, **32**, 262, 1990).
5. *Д.М.Седракян*, *Э.В.Чубарян*, Астрофизика, **4**, 239, 1968, (Astrophysics, **4**, 87, 1968).
6. *Г.Г.Арутюнян*, *Д.М.Седракян*, *Э.В.Чубарян*, Астрон. ж., **50**, 60, 1973.
7. *И.Н.Бронштейн*, Справочник по математике, М., Наука, 1980.
8. *Л.Д.Ландау*, *Е.М.Лифшиц*, Теория поля, М., Наука, 1973.
9. *R.M.Avakian*, *G.Oganessian*, Mod. Phys. Lett., **A10**, 841, 1995.
10. *R.M.Avakian*, *G.Oganessian*, Phys. Lett., **A209**, 261, 1995.
11. *S.Chandrasekhar*, The Matematical Theory of Black Holes, Oxford University Press, New York, 2000.
12. *Р.Керр*, Эйнштейн и теория гравитации, М., Мир, с.208, 1979.
13. *D.Kramer*, *H.Stefani*, *M.Maccallum*, Exact solutions of the Einsteins field equations, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.
14. *В.В.Папоян*, ЭЧАЯ, **34**, 190, 2003.