

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ:
ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРА ПРИ МНОГОКРАТНОМ
КОМПТОНОВСКОМ РАССЕЯНИИ

С.И.ГРАЧЕВ

Поступила 13 июня 2014

Принята к печати 19 сентября 2014

Используется новый метод численного решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения переноса излучения, описывающего эволюцию спектра однородного излучения в результате комптоновского рассеяния на равновесных свободных электронах в бесконечном однородном пространстве. При этом температура электронного газа считается постоянной, и на нее не накладываются ограничения: электроны могут быть как нерелятивистскими, так и релятивистскими. Показано, что эволюция спектра существенным образом зависит от величины начальной безразмерной концентрации фотонов. Имеется некоторое граничное ее значение, такое, что при меньших значениях существует предельное равновесное бозе-эйнштейновское распределение фотонов, а при больших - нет. В последнем случае формируется квазилиния, которая со временем перемещается в сторону малых частот, причем ее ширина уменьшается, а интенсивность в максимуме растет. Расчеты проводились с использованием двух функций перераспределения фотонов по частотам - точной и упрощенной (в предположении об изотропном рассеянии в лабораторной системе отсчета). Проведено также сравнение с результатами решения уравнения Компанейца.

Ключевые слова: *перенос излучения; нестационарный; эволюция спектра; комптоновское рассеяние*

1. *Введение.* Многократное комптоновское рассеяние играет важную роль в физике различных астрофизических объектов. Но оно и само по себе является объектом изучения в физике вообще (см., например, обзор Зельдовича [1]) и, в частности, в теории переноса излучения. В астрофизических приложениях используется, как правило, приближенное описание переноса излучения при комптоновском рассеянии, достаточное, однако, для объяснения спектров конкретных объектов. Что же касается точной теории, то ввиду нелинейности основного уравнения, дальнейшее продвижение здесь возможно лишь путем решения сравнительно простых модельных задач численными методами. Одной из них является расчет эволюции спектра изотропного однородного излучения в бесконечном пространстве в результате многократного комптоновского рассеяния на электронах. Считается, что равновесный электронный газ равномерно заполняет пространство, и его температура не зависит от координат и времени. Зельдовичем и Сюняевым [2] было показано, что в этом случае

в спектре рассеянного излучения могут возникать квазилинии, которые со временем смещаются в длинноволновую сторону. В настоящей работе мы применяем новый численный метод решения основного уравнения в этой задаче. При этом используются как точная, так и приближенная функции перераспределения по частотам из работы Нагирнера и др. [3].

2. Основное уравнение и методы численного решения. Основное интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения имеет вид

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = - \int_0^{\infty} [r(x, x_1) f(x, t) (x_1^2 + f(x_1, t)) - r(x_1, x) f(x_1, t) (x^2 + f(x, t))] dx_1, \quad (1)$$

где безразмерная концентрация фотонов $f(x, t) = x^2 n(x, t)$, $n(x, t)$ - среднее число заполнения состояний фотонов с энергией x в момент t , причем x и t измеряются в единицах mc^2 и $1/c\sigma_0 n_e$, соответственно, где σ_0 - томсоновское сечение, а n_e - концентрация электронов в сопутствующей системе. Функция перераспределения по частотам $r(x, x_1) = \bar{R}(x, x_1)/(x x_1)$, причем $r(x_1, x) = e^{y(x_1 - x)} r(x, x_1)$, где $y = mc^2/kT$. Для усредненной функции перераспределения $\bar{R}(x, x_1)$ имеются упрощенное (в предположении об изотропном рассеянии в лабораторной системе отсчета) и точное выражения (см. Нагирнер и др. [3]; Nagirner, Routanen [4]).

Для вычисления интегралов в правой части основного уравнения (1) использовалось представление искомой функции в виде квадратичного сплайна:

$$f(x) = f_j + b_j (x - x_j) + c_j (x - x_j)^2, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad c_j = \frac{b_{j+1} - b_j}{2(x_{j+1} - x_j)}. \quad (2)$$

причем для определения коэффициентов b_j имеется рекуррентное соотношение

$$b_j = -b_{j+1} + 2 \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j}. \quad (3)$$

Мы полагаем в последней точке $b_N = 0$. В итоге имеем

$$\int_0^{\infty} r(x_k, x) f(x) dx = \sum_{m=0}^N q_{km} f_m, \quad (4)$$

где

$$q_{k0} = \Delta x_0 (A_{k0} - 2B_{k0} + C_{k0}), \quad (5)$$

$$q_{km} = \Delta x_m (A_{km} - 2B_{km} + C_{km}) + \Delta x_{m-1} C_{km-1} - 2(-1)^m \frac{\Delta x_m + \Delta x_{m-1}}{\Delta x_m \Delta x_{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (\Delta x_j)^2 (B_{kj} - C_{kj}), \quad 1 \leq m \leq N-1, \quad (6)$$

$$q_{kN} = \Delta x_{N-1} C_{kN-1} - 2 \frac{(-1)^N}{\Delta x_{N-1}} \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta x_j)^2 (B_{kj} - C_{kj}). \quad (7)$$

Здесь $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, а коэффициенты

$$\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}\} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} r(x_k, x_j + t \Delta x_j) \{1, t, t^2\} dt. \quad (8)$$

Входящие сюда интегралы рассчитывались по квадратурной формуле Гаусса с 12-ю узлами.

Аналогично получаем для интеграла

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} r(x, x_k) f(x) dx = \sum_{m=0}^N \bar{q}_{km} f_m. \quad (9)$$

где коэффициенты \bar{q}_{km} вычисляются по тем же формулам, что и q_{km} , но с заменой $r(x_k, x_j + t \Delta x_j)$ на $r(x_j + t \Delta x_j, x_k)$ при вычислении коэффициентов по формуле (8).

В итоге основное уравнение (1) переписывается в следующем дискретизованном виде:

$$\frac{\partial f_k(t)}{\partial t} = -f_k(t) \alpha_k + x_k^2 \sum_{m=0}^N \bar{q}_{km} f_m(t) + f_k(t) \sum_{m=0}^N (\bar{q}_{km} - q_{km}) f_m(t), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (10)$$

где $f_k(t) = f(x_k, t)$,

$$\alpha_k = \int_0^{x_k} r(x_k, x_1) x_1^2 dx_1, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

Система уравнений (10) решалась нами двумя различными способами. Пусть $\{t_i\}$, $i = 0, 1, \dots, I$ - некоторая сетка по времени, причем можно считать $t_0 = 0$. Проинтегрируем уравнение (10) по времени от момента t_i до t_{i+1} , считая t_{i+1} текущим моментом времени. Имеем

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_k(t) dt = f_k(t_{i+1/2}) + O\left[\Delta t_i\right]^3, \quad (12)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_k(t) f_m(t) dt = f_k(t_{i+1/2}) f_m(t_{i+1/2}) + O\left[\Delta t_i\right]^3, \quad (13)$$

где $t_{i+1/2} = (t_i + t_{i+1})/2$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Для значения функции в полуселой точке имеем, очевидно,

$$f_k(t_{i+1/2}) = \frac{1}{2}(\dot{f}_k + f_k) + O\left[\Delta t_i\right]^2, \quad (14)$$

где обозначено $\dot{f}_k = f_k(t_{i+1})$, $f_k = f_k(t_i)$. В итоге для определения текущего вектора \dot{f}_k , $k = 0, 1, \dots, N$, получается следующая нелинейная система уравнений

$$\begin{aligned} & \dot{f}_k \left[1 + \frac{\Delta t_i}{2} - \frac{\Delta t_i}{4} \sum_{m=0}^N (\bar{q}_{km} - q_{km}) f_m \right] - \\ & - \frac{\Delta t_i}{2} \sum_{m=0}^N \dot{f}_m \left[x_k^2 \bar{q}_{km} + \frac{1}{2} (\bar{q}_{km} - q_{km}) (\dot{f}_k + f_k) \right] = \\ & = f_k \left[1 - \frac{\Delta t_i}{2} \alpha_k + \frac{\Delta t_i}{4} \sum_{m=0}^N (\bar{q}_{km} - q_{km}) f_m \right] + \frac{\Delta t_i}{2} x_k^2 \sum_{m=0}^N \bar{q}_{km} f_m, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (15)$$

Эта система решалась итерациями методом Ньютона: текущее значение

вектора представлялось в виде суммы предыдущего значения и поправки ($\hat{f}_k = \hat{f}_k^{(s)} + \delta \hat{f}_k^{(s)}$), и система линеаризовалась относительно поправок. Получаемая при этом линейная система для поправок решалась методом исключения Гаусса. Начальное приближение $\hat{f}_k^{(0)}$ получалось в результате замены $(\hat{f}_k + f_k)/2$ на f_k в последнем слагаемом в левой части системы (15). Итерации заканчивались при выполнении условия $\max_k |\delta \hat{f}_k^{(s)}| < \varepsilon$ (обычно полагалось $\varepsilon = 10^{-3}$).

Второй метод, предложенный нами ранее [5] для решения других нестационарных задач, состоит в том, что мы используем разложение Тейлора

$$f(x, t_{i+1}) = f(x, t_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta t_i)^n}{n!} a_n(x), \quad (16)$$

которое сходится на достаточно частой временной сетке. Подстановка этого разложения в основное уравнение (10) дает для определения коэффициентов разложения $\alpha_{nk} = \alpha_n(x_k)$ следующее рекуррентное (по n) соотношение

$$a_{n+1k} = -\alpha_k a_{nk} + \sum_{m=0}^k \left[x_k^2 \bar{q}_{km} a_{nm} + (\bar{q}_{km} - q_{km}) \sum_{l=0}^n C_n^l a_{lk} a_{n-lm} \right], \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (17)$$

где C_n^l - биномиальные коэффициенты, причем начальное значение определяется, очевидно, по распределению в предыдущий момент: $a_{0k} = f(x_k, t_i)$, $k = 0, 1, \dots, N$. В этом (безитерационном) методе не требуется решения каких-либо дополнительных уравнений.

Использовалась адаптивная частотно-временная сетка. Начальные распределения брались в виде очень узкой линии

$$f(x, 0) = \frac{C}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-(x-x_0)^2/\varepsilon^2}, \quad (18)$$

где $\varepsilon = 10^{-2}$, $x_0 = 1$ и в виде показательно-степенной функции

$$f(x, 0) = \frac{Cs}{\Gamma(p+1)} (xx_0)^p e^{-2xy} \quad (19)$$

при $p = 3$, $s = 2$. Использовались как упрощенная, так и точная функции перераспределения по частотам. Проводилось сравнение с полученными ранее (Нагирнер и др. [6]) решениями уравнения Компанейца.

Следует отметить, что наряду с упомянутым выше новым безитерационным методом применялся и обычный итерационный метод теории теплопроводности, который, однако, не всегда приводил к цели за приемлемое время: иногда итерации сходились слишком медленно. В тех же случаях, когда итерации сходились достаточно быстро, оба метода давали совпадающие результаты. При этом время счета новым методом всегда оказывалось заметно меньше.

3. *Результаты расчетов.* На рис. 1-3 приведены результаты расчетов

при использовании упрощенной функции перераспределения, причем на рис.3 даются для сравнения и результаты решения уравнения Компанейца. На рис.4 сравниваются решения для упрощенной и точной функций перераспределения.

Следует отметить, что равновесные решения уравнения (1) имеют вид распределения Бозе-Эйнштейна $f_{eq} = y^3 x^2 / (e^{y^3 x^2} - 1)$, так что интеграл от равновесного решения по всем x не может быть больше, чем $C_{max} = 2\zeta(3)$, где $\zeta(z)$ - функция Римана. Поэтому для начального распределения с $C > C_{max}$ не существует предельного (при $t \rightarrow \infty$) равновесного решения.

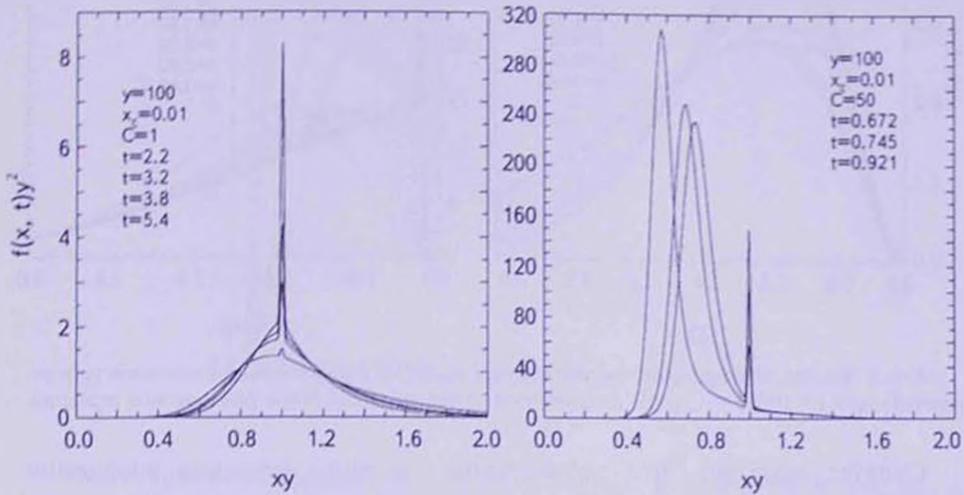


Рис.1. Эволюция начального распределения вида (18) (узкая линия) при $y = 100$, $x_0 = 0.01$. (Высота начального пика на $xu = 1$ уменьшается со временем.

Решение сильно зависит от величины интеграла C . Так при $C = 1$ (см. рис.1) начальное распределение (на рис.1 его "остатки" видны в виде очень узкой линии на $xu = 1$) эволюционирует к равновесному распределению (на рис.2 оно отмечено звездочками). При $C = 50$, когда не существует предельного равновесного распределения, формируется узкое распределение по частоте (квазилиния), движущееся со временем к оси ординат, причем его ширина уменьшается. Заметим, что при этом интеграл от распределения по частоте сохраняется с точностью не хуже 10^{-4} . Образование квазилиний было предсказано ранее из качественных соображений Зельдовичем и Сюняевым [2].

На рис.3 проведено сравнение результатов решения уравнения Компанейца (сплошная линия) и точного интегро-дифференциального уравнения (звездочки), из которого уравнение Компанейца получается в диффузионном приближении. Видно, что до момента времени $t = 0.02$ они хорошо согласуются между собой на всех частотах, а при $t = 0.025$ возникают

большие различия на левом краю распределения. Точное уравнение дает квазилинию, а уравнение Компанейца - нет. Дело в том, что при тех больших градиентах по частоте, которые возникают на временах $t \geq 0,025$, уравнение Компанейца неприменимо, так как нарушаются условия, при которых оно выводится из точного уравнения.

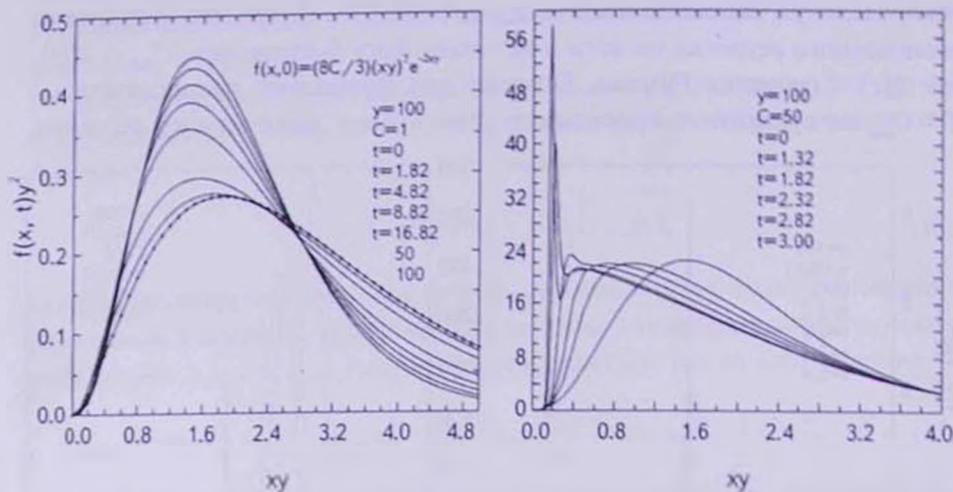


Рис. 2. Эволюция начального распределения вида (19) (показательно-степенное распределение) при $y = 100$, $p = 3$, $s = 3$. Звездочками отмечено предельное равновесное решение.

Следует отметить, что приведенные на рис.3 решения уравнения Компанейца были получены ранее в упомянутой выше работе Нагирнера и др. [6], где показано, что в тех случаях, когда не существует предельного равновесного решения, в распределении фотонов по частоте возникает очень крутой передний фронт, движущийся со временем к оси ординат. Возникновение таких фронтов (и даже их "опрокидывание", т.е. возникновение неоднозначности) было предсказано Зельдовичем и Левичем [7]. Наши численные эксперименты показывают, что указанные фронты не опрокидываются на конечном расстоянии от оси ординат, а их эволюция заканчивается слиянием в определенный момент времени $t_*(C)$ с осью ординат, в результате чего значение f в нуле меняется скачком от 0 до некоторого значения $f_*(C)$. Далее решение должно эволюционировать к стационарному, но неравновесному распределению $f(x, \infty)$, которое отлично от 0 в нуле и убывает на бесконечности $\propto x^{-2}$. С физической точки зрения возникновение устойчивого крутого переднего фронта объясняется конкуренцией диффузии, которая стремится сгладить градиенты, и нелинейности, которая стремится их увеличить. По сути это явление аналогично возникновению уединенных волн (солитонов) в гидродинамике.

Что касается сравнения решений, полученных с использованием

упрощенной и точной функций перераспределения по частотам при рассеянии, то согласие между этими решениями улучшается с ростом параметра $y = mc^2/kT$. Для иллюстрации были проведены расчеты при начальном распределении в виде узкой линии (18) с $C = 0.1$, так что имеется предельное (по времени) равновесное решение. Оказалось, что

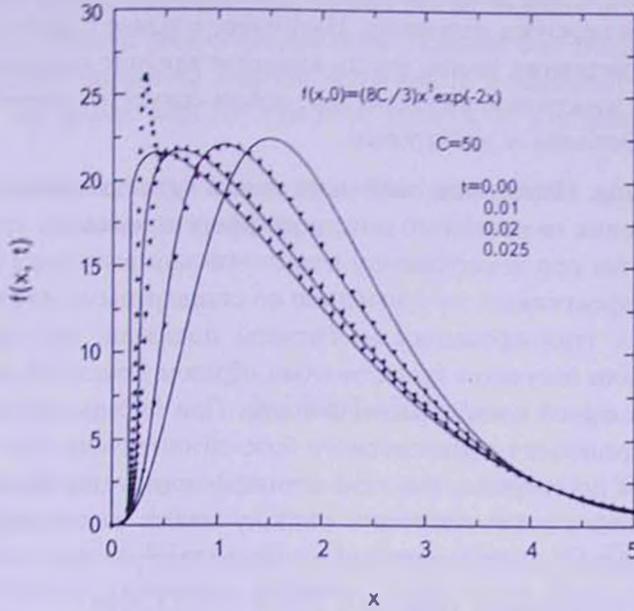


Рис.3. Сравнение решений нелинейного уравнения Компанейца (линии) и нелинейного интегрального уравнения (звездочки) для начального распределения вида (19) (показательно-степенное распределение) при $y = 100$, $\rho = 3$, $s = 3$ и $C = 50$.

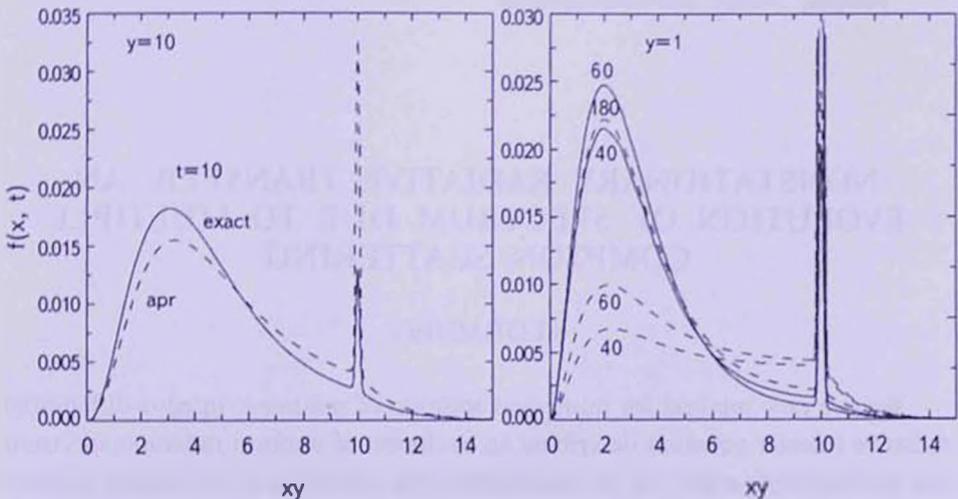


Рис.4. Сравнение точного (сплошная линия) и упрощенного (штриховая линия) решений нелинейного интегрального уравнения для начального распределения вида (18) при $C = 0.1$. Числа у кривых - время t .

при $u = 100$ (нерелятивистские электроны) различие между упомянутыми решениями становится несущественным при $t > 5$. С увеличением параметра u происходит замедление выхода упрощенного решения на стационарный режим по сравнению с точным решением (см. рис.4).

Следует отметить, что использованный нами новый численный метод можно применять и для решения других кинетических уравнений, а не только уравнения переноса излучения. Например, в задаче о многократном комптоновском рассеянии можно учесть взаимное влияние поля излучения и распределения электронов по скоростям, решив совместно кинетические уравнения для фотонов и электронов.

4. *Заключение.* Использованный нами новый безитерационный метод численного решения нелинейного интегродифференциального уравнения переноса излучения при многократном комптоновском рассеянии оказался гораздо более эффективным по сравнению со стандартными численными методами теории теплопроводности. Расчеты показали, что эволюция спектра рассеянного излучения существенным образом зависит от величины начальной безразмерной концентрации фотонов. При ее больших значениях не существует предельного равновесного бозе-эйнштейновского распределения фотонов по энергии, и в этом случае формируется квазилиния, которая со временем перемещается в сторону малых частот, причем ее ширина уменьшается, а интенсивность в максимуме растет.

Работа была поддержана грантом СПбГУ 6.38.18.2014.

Астрономический институт им. В.В.Соболева,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, e-mail: stas@astro.spbu.ru

NONSTATIONARY RADIATIVE TRANSFER: AN EVOLUTION OF SPECTRUM DUE TO MULTIPLE COMPTON SCATTERING

S.I.GRACHEV

We use new method for numerical solution of nonlinear integro-differential radiative transfer equation describing an evolution of uniform radiation spectrum due to Compton scattering on equilibrium free electrons in an infinite uniform medium. A temperature of electron gas is suggested to be constant and it is not subjected to any limitations so that electrons can be both nonrelativistic

and relativistic ones. It is shown that spectrum evolution essentially depends on the value of initial nondimensional photon density. There exists some boundary value for it such that for lower values the electrons have terminated Bose-Einstein distribution and for greater values they have not this distribution. In the last case a quasi-line is formed which moves with time towards small frequencies and its width becomes smaller but its intensity in maximum grows. We use two different photon redistribution functions over frequencies: exact one and simplified (supposing isotropic scattering in a laboratory frame). We also compare our results with the results of solution of Kompaneets equation.

Key words: radiative transfer: nonstationary: evolution of spectrum: compton scattering

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.Б.Зельдович, Успехи физических наук, **115**, 161, 1975.
2. Я.Б.Зельдович, Р.А.Сюняев, Журн. эксперим. и теор. физ., **62**, 153, 1972.
3. Д.И.Нагирнер, Е.В.Кикец, Ю.Й.Поутанен, Труды АО ЛГУ, **43**, 28, 1991.
4. D.I.Nagirner, J.Poutanen, Astrophys. Space Phys. Rev., **9**, 1, 1994.
5. С.И.Грачев, Астрофизика, **44**, 619, 2001.
6. Д.И.Нагирнер, В.М.Лоскутов, С.И.Грачев, Астрофизика, **40**, 349, 1997.
7. Я.Б.Зельдович, Е.В.Левич, Журн. эксперим. и теор. физ., **55**, 2423, 1968.

