АСТРОФИЗИКА

ТОМ 57 АВГУСТ, 2014 ВЫПУСК 3

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОМПАНЕЙЦА, ОПИСЫВАЮЩЕГО КИНЕТИКУ "КОМПТОНИЗАЦИИ" ФОТОНОВ

А.Е.ДУБИНОВ, И.Н.КИТАЕВ

Поступила 25 января 2014
Принята к печати 30 апреля 2014

Рассматривается нелинейное кинетическое уравнение Компанейца, описывающее эволюцию спектра фотонного газа при его комптоновском рассеянии в разреженной нерелятивистской электронной плазме (т.е. процесс "комптонизации" излучения). Методом разделения переменных получены точные решения уравнения. Решения выражены через трансцендентные функции Гойна и Бесселя.

Ключевые слова: *спектр фотонного газа: уравнение Компанейца: "комптонизация": метод разделения переменных: функции Гойна и Бесселя*

1. *Введение*. Для описания эволюции спектра фотонного газа при его комптоновском рассеянии в разреженной нерелятивистской электронной плазме Компанейцем [1], а затем независимо от него Вейманом [2] было получено нелинейное кинетическое уравнение, имеющее следующий вид

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x}+n+n^2\right)\right], \tag{1}$$

где $t=ukT_e/mc^2$ - безразмерное время, $x=\hbar\omega/kT_e$ - безразмерная частота, $n(x,t)$ - число заполнения фотонов спектрального участка dx, $u=N_e c\sigma t$, T_e и N_e - электронная температура и концентрация, $\sigma=(8\pi/3)\left(e^2/mc^2\right)^2$ - томсоновское сечение рассеяния. Первый член в круглых скобках (1) описывает изменение частоты благодаря эффекту Доплера, второй член - изменение частоты за счет отдачи, третий - за счет индуцированного рассеяния. Процесс, в котором происходит эволюция фотонного газа по (1) получил название "комптонизации". Уравнение Компанейца (1) имеет исключительное значение для астрофизики при расчетах прохождения излучения через вещество.

Как указано в [3], уравнение (1) является нелинейным и, к сожалению, точных аналитических решений оно не имеет. Более того, в [4] проведено исследование уравнения Компанейца с помощью группового анализа и показано, что оно допускает только время-трансляционную группу $\tilde{t}=t+a$.

Это позволяет построить только стационарные решения. И, действительно, точных решений зависящего от времени уравнения Компанейца, насколько нам известно, пока в литературе не было.

Представим краткий обзор известных точных решений "усеченного" уравнения Компанейца, в котором пренебрегают одним или двумя слагаемыми по сравнению с полным уравнением (1).

О стационарных решениях, которые фактически также являются решениями усеченного уравнения (1) без левой части, известно следующее (из [5]): планковское $(\exp x-1)^{-1}$ и бозе-эйнштейновское $[\exp(x+\mu)-1]^{-1}$ выражения обращают внутреннюю скобку (поток фотонов Q в x-пространстве) в нуль (здесь μ - постоянная, имеющая смысл химического потенциала). Там же отмечается, что существуют и другие стационарные решения уравнения (1) с $Q=\text{const}\neq 0$, которые формируются, как указано в [5], за счет постоянного притока фотонов в $x=\infty$ и их стока в $x=0$ при $Q<0$ (или притока в $x=0$ и стока в $x=\infty$ при $Q>0$). Точные решения (1) такого типа недавно были получены в [6], они выражаются через дважды вырожденные функции Гойна $\mathrm{HeunD}(\ldots)$. В статье [7] отмечено, что в [6] упущено еще одно нетривиальное стационарное решение: $(x-c)/x^2$.

Подробные обзоры усеченных вариантов уравнения Компанейца с решениями даются в [3-5]. Отдельным случаям усеченного уравнения (1) посвящены также работы [8-15]. Решение уравнения (1) в пренебрежении третьим членом, когда (1) становится линейным уравнением, дано в [1,8]. Более общее уравнение переноса фотонов с правой частью, но опять же с пренебрежением третьим членом, исследовалось в [9-12]. В [13,14] оно же решалось методом функции Грина. Решение уравнения (1) в пренебрежении вторым членом получено и проанализировано методом характеристик в [5,9,15] и показано, что в спектре фотонов могут устанавливаться ударные волны (квазилинии). Результаты численных исследований (1), подтвердившие аналитические выводы для усеченного уравнения, представлены в [14,16,17].

Обобщенное уравнение Компанейца, в котором $n+n^2$ заменено на произвольную заданную функцию $f(n)$, рассмотрено в [18].

В данной работе впервые находятся точные решения полного уравнения (1) без каких-либо усечений, вопреки утверждению [3] о невозможности этого.

2. *Решение уравнения Компанейца методом разделения переменных.* Будем искать решение уравнения (1) в мультипликативном виде

$$n(x,t)=n_1(x)n_2(t). \tag{3}$$

В дальнейшем для сокращения записи формул сомножитель, зависящий от частоты, будем помечать индексом "1", а сомножитель, зависящий от времени - индексом "2", не выписывая при этом сами аргументы функций.

Подставим (3) в (1) и получим уравнение

$$n_1 \frac{dn_2}{dt} = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx}\left[x^4 \left(n_2 \frac{dn_1}{dx} + n_1 n_2 + n_1^2 n_2^2 \right) \right]. \tag{4}$$

Перепишем (4) в развернутой форме

$$n_1 \frac{dn_2}{dt} - n_2 \left[4x\left(\frac{dn_1}{dx} + n_1 \right) + x^2 \left(\frac{d^2 n_1}{dx^2} + \frac{dn_1}{dx} \right) \right] - n_2^2 \left(4xn_1^2 + 2x^2 n_1 \frac{dn_1}{dx} \right) = 0. \tag{5}$$

Разделим переменные в (5) и получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для n_1 и n_2. Это можно сделать несколькими путями.

2а. Путь I. Поделим уравнение (5) почленно на первое слагаемое и продифференцируем затем его по t. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{n_2}{\frac{dn_2}{dt}} \right) \left[4x\left(\frac{dn_1}{dx} + n_1 \right) + x^2 \left(\frac{d^2 n_1}{dx^2} + \frac{dn_1}{dx} \right) \right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{n_2^2}{\frac{dn_2}{dt}} \right) \left(4xn_1^2 + 2x^2 n_1 \frac{dn_1}{dx} \right) = 0. \tag{6}$$

В (6) уравнения легко разделяются:

$$-\frac{4x\left(\frac{dn_1}{dx} + n_1 \right) + x^2 \left(\frac{d^2 n_1}{dx^2} + \frac{dn_1}{dx} \right)}{4xn_1^2 + 2x^2 n_1 \frac{dn_1}{dx}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{n_2^2}{\frac{dn_2}{dt}} \right)}{\frac{d}{dt}\left(\frac{n_2}{\frac{dn_2}{dt}} \right)}. \tag{7}$$

Видно, что левая часть уравнения (7) зависит только от частоты x, а правая часть - только от времени t. Следовательно, и левая, и правая части равны одной и той же постоянной разделения А. Тогда уравнение (7) распадается на систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left[\begin{aligned} & 4x\left(\frac{dn_1}{dx} + n_1 \right) + x^2 \left(\frac{d^2 n_1}{dx^2} + \frac{dn_1}{dx} \right) = -A\left(4xn_1^2 + 2x^2 n_1 \frac{dn_1}{dx} \right); \\ & \frac{d}{dt}\left(\frac{n_2^2}{\frac{dn_2}{dt}} \right) = A \frac{d}{dt}\left(\frac{n_2}{\frac{dn_2}{dt}} \right). \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Уравнения системы (8) не зависят друг от друга функционально. Единственное, что их связывает - это их общая постоянная разделения А. Это обстоятельство отмечено в (8) квадратной скобкой, объединяющей уравнения системы.

Уравнение из (8) можно переписать в каноническом виде

$$\begin{cases} x^2 \dfrac{d^2 n_1}{dx^2} + \left(2Ax^2 n_1 + x^2 + 4x\right)\dfrac{dn_1}{dx} + 4Axn_1^2 + 4xn_1 = 0; \\ \left(n_2^2 - An_2\right)\dfrac{d^2 n_2}{dt^2} + \left(-2n_2 + A\right)\left(\dfrac{dn_2}{dt}\right)^2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Оба уравнения (8) интегрируются аналитически: первое уравнение близко к уравнению Гойна [19] и его решение выражается через функцию Гойна, второе уравнение тривиально. Выпишем их решения

$$\begin{cases} n_1 = -\dfrac{1}{2}\Big\{\Big[\Big[\left(C_2x^5 - C_2x^4 - 2C_2x^3 + 2C_2x^2 + C_2x - C_2\right)\mathrm{HeunD}^2 + \\ \quad + 8C_2x^2\,\mathrm{HeunD}\mathrm{HeunD}'\Big] + 8C_2x^2\,\mathrm{HeunD}\mathrm{HeunD}'\Big]\displaystyle\int\frac{dx}{\mathrm{HeunD}} + \\ \quad + \left(x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1\right)\mathrm{HeunD}^2 + 8x^2\,\mathrm{HeunD}\mathrm{HeunD}' - \\ \quad - 2C_2x^4 + 4C_2x^2 - 2C_2\Big\}\left[Ax\left(x^2-1\right)^2\mathrm{HeunD}\left(C_2\displaystyle\int\frac{dx}{x\,\mathrm{HeunD}^2} + 1\right)\right]^{-1}; \\ n_2 = -\dfrac{A\exp\left(C_3At + C_4A\right)}{1 + \exp\left(C_3At + C_4A\right)}, \end{cases} \tag{10}$$

в котором C_i - произвольные константы интегрирования, HeunD и HeunD′, как и в [6], есть дважды вырожденная функция Гойна и ее производная, причем каждая из функций везде имеет аргументы

$$\mathrm{HeunD}\left(0, -\frac{1}{2} + AC_1, -2AC_1 - \frac{1}{2}, AC_1, \frac{x^2+1}{x^2-1}\right). \tag{11}$$

Осталось только перемножить n_1 и n_2 и получить в итоге окончательное решение уравнения Компанейца (1).

2b. Путь II. Получим другой вариант решения. Для этого почленно поделим уравнение (5) на его третье слагаемое, а затем продифференцируем по t. В результате этих действий получим

$$n_1\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n_2^2}\frac{dn_2}{dt}\right) + \frac{1}{n_2^2}\frac{dn_2}{dt}\left[4x\left(\frac{dn_1}{dx} + n_1\right) + x^2\left(\frac{d^2 n_1}{dx^2} + \frac{dn_1}{dx}\right)\right] = 0. \tag{12}$$

Переменные в (11) также легко разделяются

$$\frac{n_1}{4x\left(\dfrac{dn_1}{dx} + n_1\right) + x^2\left(\dfrac{d^2 n_1}{dx^2} + \dfrac{dn_1}{dx}\right)} = -\frac{\dfrac{1}{n_2^2}\dfrac{dn_2}{dt}}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{n_2^2}\dfrac{dn_2}{dt}\right)}. \tag{13}$$

Применяя к (13) те же рассуждения, что и для (7), получим еще одну систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} n_1 = A\left[4x\left(\dfrac{dn_1}{dx}+n_1\right)+x^2\left(\dfrac{d^2 n_1}{dx^2}+\dfrac{dn_1}{dx}\right)\right]; \\ An_2\dfrac{d^2 n_2}{dt^2}-2A\left(\dfrac{dn_2}{dt}\right)^2-n_2\dfrac{dn_2}{dt}=0, \end{cases} \tag{14}$$

или то же самое в каноническом виде

$$\begin{cases} x^2\dfrac{d^2 n_1}{dx^2}+\left(x^2+4x\right)\dfrac{dn_1}{dx}+\left(4x-\dfrac{1}{A}\right)n_1=0; \\ \dfrac{1}{n_2^2}\dfrac{dn_2}{dt}=-A\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{n_2^2}\dfrac{dn_2}{dt}\right). \end{cases} \tag{15}$$

Система уравнений (15) также интегрируется аналитически: первое уравнение близко к уравнению Бесселя, второе уравнение тривиально. Результат интегрирования следующий:

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{1}{x^{3/2}}\left\{C_5\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)\left[\left(\dfrac{2}{7}\sqrt{9A+4}+\dfrac{4}{7}\sqrt{A}(x-2)\right)xI_{\nu_1}\left(-\dfrac{x}{2}\right)+\right.\right. \\ \quad +\sqrt{A}\left(x^2-\dfrac{24x}{7}+\dfrac{12}{7}\right)I_{\nu_0}\left(-\dfrac{x}{2}\right)+ \\ \quad \left.\left.+\sqrt{A}\left(\dfrac{4x^2}{7}-\dfrac{12x}{7}\right)I_{\nu_{-1}}\left(-\dfrac{x}{2}\right)+\sqrt{A}\dfrac{x^2}{7}I_{\nu_{-2}}\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]\right\}+ \\ \quad +\dfrac{1}{x^{3/2}}\left\{C_6\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)\left[\left(\dfrac{2}{7}\sqrt{9A+4}+\dfrac{4}{7}\sqrt{A}(x-2)\right)xK_{\nu_1}\left(-\dfrac{x}{2}\right)+\right.\right. \\ \quad +\sqrt{A}\left(x^2-\dfrac{24x}{7}+\dfrac{12}{7}\right)K_{\nu_0}\left(-\dfrac{x}{2}\right)+ \\ \quad \left.\left.+\sqrt{A}\left(\dfrac{4x^2}{7}-\dfrac{12x}{7}\right)K_{\nu_{-1}}\left(-\dfrac{x}{2}\right)+\sqrt{A}\dfrac{x^2}{7}K_{\nu_{-2}}\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]\right\}; \\ n_2 = \dfrac{1}{C_7A\exp\left(-\dfrac{t}{A}\right)-C_8}, \end{cases} \tag{16}$$

где индексы функций Бесселя 1-го рода I_{ν_i} и 2-го рода K_{ν_i} имеют вид $\nu_j = j+\sqrt{\dfrac{9A+4}{4A}}$.

3. *Заключение*. Таким образом, в работе методом разделения переменных получены точные решения нелинейного кинетического уравнения Компанейца, для которого ранее считалось невозможным найти аналитическое решение. Решения выражены через трансцендентные функции Гойна и Бесселя.

Работа поддержана грантом РФФИ № 12-02-90433-Ukr_a.

Российский Федеральный Ядерный Центр - Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Нижегородская обл., Россия,
e-mail: dubinov-ae@yandex.ru rmtmkitaeva@yandex.ru

EXACT SOLUTIONS OF THE KOMPANEETS EQUATION DESCRIBING KINETICS OF PHOTON COMPTONIZATION

A.E.DUBINOV[1,2], I.N.KITAYEV[2]

The non-linear kinetic Kompaneets equation, describing evolution of spectrum of photon gas subject to Compton scattering in rarefied non-relativistic electron plasma (i.e. "comptonization" of radiation) is considered. Exact solutions of the equation were obtained by the method of separation of variables for the first time. The solutions are expressed via transcendent Heun and Bessel functions.

Key words: *spectrum of photon gas: equation of Kompaneets:comptonization: method of separation of variables: functions of Heun and Bessel*

ЛИТЕРАТУРА

1. *А.С.Компанеец*, ЖЭТФ, 31, 876, 1956.
2. *R.Weymann*, Phys. Fluids, 8, 2112, 1965.
3. *Д.И.Нагирнер*, Комптоновское рассеяние в астрофизических объектах, изд-во С-ПбГУ, Санкт-Петербург, 2001.
4. *N.H.Ibragimov*, J. Phys.: Math. Theor., 43, 1, 2010.
5. *Я.Б.Зельдович*, УФН, 115, 161, 1975.
6. *А.Е.Дубинов*, Письма в ЖТФ, 35, 25, 2009.
7. *G.W.Bluman*, *S.-f.Tian*, *Z.Yang*, J. Eng. Math. (Online First Articles, 2013, http://link.springer.com/article/10.1007/s10665-012-9552-2).
8. *В.В.Железняков*, Излучение в астрофизической плазме, Янус-К, М., 1997.
9. *Я.Б.Зельдович*, *Е.Ф.Левич*, ЖЭТФ, 55, 2423, 1968.

10. *P.A.Becker*, *M.C.Begelman*, Astrophys. J., **310**, 534, 1986.
11. *P.A.Becker*, *M.C.Begelman*, Astrophys. J., **310**, 552, 1986.
12. *P.A.Becker*, Astrophys. J., **327**, 772, 1988.
13. *D.I.Nagirner*, *V.M.Loskutov*, Astrophysics, **40**, 62, 1997.
14. *D.I.Nagirner*, *V.M.Loskutov*, *S.I.Grachev*, Astrophysics, **40**, 227, 1997.
15. *Я.Б.Зельдович*, *Р.А.Сюняев*, ЖЭТФ, **62**, 153, 1972.
16. *J.Deng*, *J.Chen*, *J.Yiu*, Science in Chine (Series A), **41**, 1107, 1998.
17. *P.Procopio*, *C.Burigana*, Astro. Astrophys., **507**, 1243, 2009.
18. *Е.Д.Авдонина*, *Н.Х.Ибрагимов*, Уфимский матем. ж., **4**, 6, 2012.
19. *H.Exton*, Le Matematiche, **43**, 11, 1998.