АСТРОФИЗИКА

ТОМ 57 АВГУСТ, 2014 ВЫПУСК 3

ГРУППЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ. II

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 26 февраля 2014

Операторно-матричный метод описания переноса излучения, развитый в первой части работы, применяется для нахождения поля излучения внутри неоднородной атмосферы. Важным результатом на этом пути является разделение переменных оптической толщины и глубины. Вводится понятие группы трансляций оптических глубин. Показывается, что последняя эквивалентна введенной в первой части группе композиций сред различных оптических и физических свойств. Находятся представления группы трансляций. Рассматриваются задачи переноса излучения в неоднородной атмосфере с внутренними источниками энергии, и в атмосфере бесконечно большой оптической толщины.

Ключевые слова: *перенос излучения:частичное перераспределение:группы: представления групп:суперматрицы*

1. *Введение*. В первой части работы [1] (далее H1) было введено понятие группы композиций атмосфер с плоскопараллельной геометрией. В результате таких композиций можно составить многослойные атмосферы, компоненты которых, в общем случае, являются неоднородными. Были получены представления групп, позволяющие определить глобальные оптические свойства (коэффициенты отражения и пропускания) указанного типа атмосфер, если эти свойства для их компонентов известны.

В данной части нас, в первую очередь, будет интересовать вопрос о теоретико-групповом описании поля излучения внутри неоднородных атмосфер. Будет дано определение группы трансляций оптических глубин и показана ее эквивалентность группе композиций атмосфер. Это обстоятельство позволяет определить режим излучения в среде без решения каких-либо новых уравнений. Полученные результаты значительно упрощают решение задачи рассеяния света в среде, содержащей источники энергии.

2. *Поле излучения внутри неоднородной атмосферы*. Как и в скалярной задаче, групповой подход может быть применен при определении поля излучения внутри среды, в которой те или иные параметры, характеризующие процесс диффузии излучения, непрерывным образом зависят от оптической глубины.

Рассмотрим некоторую неоднородную плоскопараллельную атмосферу оптической толщины τ_0, освещаемую со стороны границы $\tau = \tau_0$ (верхний

чертеж на рис.1). Рассеяние света в среде, в общем случае, может сопровождаться перераспределением как по частотам, так и по направлениям. Для описания поля излучения внутри атмосферы введем матрицы $U(\tau,\tau_0)$ и $V(\tau,\tau_0)$, задающие вероятность того, что квант с пространственно-частот-

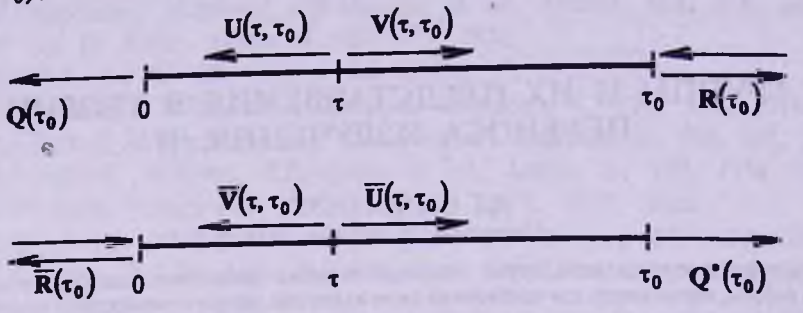

Рис.1. К определению поля излучения внутри среды.

ными характеристиками (η, x), падающий на границу $\tau=\tau_0$, в результате диффузии в среде окажется на глубине τ, движущимся соответственно к границам $\tau=0$ и $\tau=\tau_0$ с некоторыми, в общем случае, другими характеристиками (η', x').

Обратимся к процедуре перехода от одной оптической глубины к другой путем приращения к ней нового слоя. Очевидно, бесконечное множество такого рода трансляций образует группу, поскольку, если в качестве группового произведения понимать результат двух последовательных трансляций, то оно будет удовлетворять всем групповым постулатам. В согласии с физическим смыслом задачи, значение оптической глубины, получаемой в результате трансляций, не должно превышать значение оптической толщины рассматриваемой среды ($\tau \le \tau_0$). Такая группа, будучи подгруппой группы GN(2,C), эквивалентна аналогичной подгруппе, введенной в первой части работы для композиции сред различных оптических толщин [2,3].

С учетом вероятностного смысла величин $U(\tau,\tau_0)$ и $V(\tau,\tau_0)$, можно написать

$$Q(\tau_0)=Q(\tau)U(\tau,\tau_0), \quad V(\tau,\tau_0)=R(\tau)U(\tau,\tau_0), \tag{1}$$

откуда

$$U(\tau,\tau_0)=P(\tau)Q(\tau_0), \quad V(\tau,\tau_0)=S(\tau)Q(\tau_0). \tag{2}$$

Мы видим, что при векторно-матричном описании переменные в $U(\tau,\tau_0)$ и $V(\tau,\tau_0)$ разделяются, что является одним из преимуществ применяемого нами подхода.

Из (2) непосредственно следует, что подгруппа представлений $\mathfrak{I}(g)$, соответствующая композиции сред различных оптических толщин, является одновременно группой представлений для трансляций оптических глубин.

Заметим, что в этом смысле группу композиций сред различных толщин условно можно назвать группой трансляций оптических толщин.

Теперь, с учетом полученного в первой части правила преобразования величин $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$, можно написать

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P}(\tau+\delta\tau)\\ \mathbf{S}(\tau+\delta\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}(\delta\tau) & -\bar{\mathbf{S}}(\delta\tau)\\ \mathbf{S}(\delta\tau) & \mathbf{M}(\delta\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}(\tau)\\ \mathbf{S}(\tau)\end{pmatrix}, \tag{3}$$

откуда

$$\begin{pmatrix}\mathbf{U}(\tau+\delta\tau,\tau_0)\\ \mathbf{V}(\tau+\delta\tau,\tau_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}(\delta\tau) & -\bar{\mathbf{S}}(\delta\tau)\\ \mathbf{S}(\delta\tau) & \mathbf{M}(\delta\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{U}(\tau,\tau_0)\\ \mathbf{V}(\tau,\tau_0)\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где под $\delta\tau$ подразумевается толщина приращения к оптической глубине τ.

Таким образом, суперматрица $\tilde{\mathbf{A}}$ играет фундаментальную роль как при сложении атмосфер различных оптических толщин, так и при трансляции оптических глубин внутри заданной неоднородной атмосферы. Другими словами, она может рассматриваться одновременно как формирователь (composer) неоднородной атмосферы, так и как транслятор (translator) для перехода от одной глубины среды к другой.

Важно отметить, что, как это следует из (2), при переходе от одной глубины к другой представляют важность лишь глобальные оптические характеристики добавляемого слоя, в то время как характеристики поля излучения внутри слоя при таком преобразовании роли не играют. При этом не имеет значения, изменением какого именно параметра, или каких параметров, обусловлена неоднородность сред. Поэтому описанный подход пригоден и в тех задачах, в которых приходится сталкиваться с атмосферами с различного рода неоднородностями, распределенными произвольным образом.

3. *Задача о диффузном отражении излучения в линии от одномерной атмосферы конечной толщины при частичном перераспределении по частотам*. Данная матричная задача переноса излучения рассматривалась нами в первой части работы, где мы ограничились определением глобальных оптических характеристик атмосферы. Напомним, что сама атмосфера строится путем композиций сред равной и достаточно малой оптической толщины, характеризующихся некоторыми постоянными значениями коэффициента рассеяния λ так, что в пределе, когда толщины компонентов стремятся к нулю, его можно представить непрерывной функцией оптической глубины. Теперь нас будет интересовать вопрос о нахождении поля излучения внутри такой атмосферы.

Как нетрудно понять, группа трансляций оптических глубин вместе с группой ее представления являются группами Ли размерности, равной единице. Для производной оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ в H1 было получено

$$\tilde{\Xi}(\tau)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\tilde{\mathbf{A}}(\tau+\Delta\tau)-\tilde{\mathbf{A}}(\tau)}{\Delta\tau}=\begin{pmatrix}\mathbf{m}(\tau) & -\mathbf{n}(\tau)\\ \mathbf{n}(\tau) & -\mathbf{m}(\tau)\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{m}(\tau)=\alpha-\frac{\lambda(\tau)}{2}\Gamma,\quad \mathbf{n}(\tau)=\frac{\lambda(\tau)}{2}\Gamma, \tag{6}$$

α - диагональная матрица, соответствующая профилю коэффициента поглощения, а матрицей Γ задается закон перераспределения излучения по частотам. Пользуясь (4) и правилом трансляции оптических глубин (4), приходим к обычным уравнениям переноса для оператор-функций $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau}=\mathbf{m}(\tau)\mathbf{U}(\tau,\tau_0)-\mathbf{n}(\tau)\mathbf{V}(\tau,\tau_0), \tag{7}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\tau}=\mathbf{n}(\tau)\mathbf{U}(\tau,\tau_0)-\mathbf{m}(\tau)\mathbf{V}(\tau,\tau_0), \tag{8}$$

с начальными условиями $\mathbf{U}(0,\tau_0)=\mathbf{Q}(\tau_0)$, $\mathbf{V}(0,\tau_0)=\mathbf{0}$.

Уравнения (7) и (8) могли быть написаны сразу на основе физического смысла величин $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. Как было показано в первой части, такой же системе уравнений удовлетворяют функции $\mathbf{P}(\tau)$ и $\mathbf{S}(\tau)$, однако при начальных условиях $\mathbf{P}(0)=\mathbf{I}$, $\mathbf{S}(0)=\mathbf{0}$. Сравнивая начальные условия указанных двух систем уравнений, приходим к соотношению (1), написанному выше из физических соображений (см. также [4]).

Легко видеть, что группа трансляций оптических глубин в данной задаче совпадает с подгруппой группы композиций сред $GNH(2,\mathbb{C})$, введенной в рассмотрение в первой части работы. Отсюда можно заключить, что при определении поля излучения внутри рассматриваемой среды можно обойтись без решения каких-либо новых уравнений, поскольку для его нахождения достаточно воспользоваться результатами, полученными в H1, и умножить найденное там значение $\mathbf{Q}(\tau_0)$ на полученные при промежуточных вычислениях значения величин $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$.

Далеко идущая аналогия между группой $GN(2,\mathbb{C})$ и группой трансляций оптических глубин позволяет перенести различные результаты, полученные для глобальных оптических характеристик атмосфер, на случай величин, описывающих поле излучения внутри них. В частности, если среда однородная, то для величин $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ можно получить закон сохранения подобно тому, как это было сделано в H1. На этом мы здесь не остановимся, а укажем лишь, что континуальные аналоги такого типа законов сохранения были получены нами в [5,6].

В том случае, когда среда освещается со стороны границы $\tau=0$ (нижний чертеж на рис.1), вместо (1) будем иметь

$$\mathbf{Q}^*(\tau_0)=\mathbf{Q}^*(\tau_0-\tau)\overline{\mathbf{U}}(\tau,\tau_0),\quad \overline{\mathbf{V}}(\tau,\tau_0)=\overline{\mathbf{R}}(\tau_0-\tau)\overline{\mathbf{U}}(\tau,\tau_0), \tag{9}$$

или

$$\overline{\mathbf{U}}(\tau,\tau_0)=\mathbf{P}^*(\tau_0-\tau)\mathbf{Q}^*(\tau_0),\quad \overline{\mathbf{V}}(\tau,\tau_0)=\overline{\mathbf{S}}^*(\tau_0-\tau)\mathbf{Q}^*(\tau_0). \tag{10}$$

Используя полученное в первой части работы правило преобразований

величин $\mathbf{P}^*$ и $\bar{\mathbf{S}}^*$ (уравнение (36) в H1), а также (10), находим

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}(\tau,\tau_0) \\ \bar{\mathbf{V}}(\tau,\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^*(\delta\tau) & -\mathbf{S}^*(\delta\tau) \\ \bar{\mathbf{S}}^*(\delta\tau) & \mathbf{M}^*(\delta\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}(\tau+\delta\tau,\tau_0) \\ \bar{\mathbf{V}}(\tau+\delta\tau,\tau_0) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

или

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}(\tau+\delta\tau,\tau_0) \\ \bar{\mathbf{V}}(\tau+\delta\tau,\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\delta\tau) & \mathbf{S}(\delta\tau) \\ -\bar{\mathbf{S}}(\delta\tau) & \mathbf{P}(\delta\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}(\tau,\tau_0) \\ \bar{\mathbf{V}}(\tau,\tau_0) \end{pmatrix} \tag{12}$$

Суперматрицы преобразований в (11) и (12) совпадают в обозначениях H1 с $\bar{\mathbf{C}}$ и $\bar{\mathbf{C}}^{-1}$. Способ получения соотношений (10), идентичен способу, использованному в [4] для скалярной задачи. Они представляют особую важность с точки зрения задачи переноса излучения в полубесконечной атмосфере.

Из (12) вытекают уравнения переноса излучения, которые в данном случае имеют вид

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}}{d\tau} = -\mathbf{m}(\tau_0)\bar{\mathbf{U}}(\tau,\tau_0) + \mathbf{n}(\tau_0)\bar{\mathbf{V}}(\tau,\tau_0), \tag{13}$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{d\tau} = -\mathbf{n}(\tau_0)\bar{\mathbf{U}}(\tau,\tau_0) + \mathbf{m}(\tau_0)\bar{\mathbf{V}}(\tau,\tau_0), \tag{14}$$

с условиями $\bar{\mathbf{U}}(\tau_0,\tau_0) = \mathbf{Q}^*(\tau_0)$, $\bar{\mathbf{V}}(\tau_0,\tau_0) = \mathbf{0}$.

4. *Внутренние источники энергии.* Знание величин **U** и **V** на разных глубинах позволяет определить интенсивности излучения, выходящего из атмосферы с источниками энергии, распределенными внутри нее произвольным образом. Это следует из принципа обратимости оптических явлений, вследствие чего указанным величинам можно приписать альтернативный физический смысл, а именно, они определяют вероятности выхода из среды квантов той или иной частоты, движущихся на данной глубине в том или ином направлении.

В качестве примера, вернемся к задаче о свечении одномерной неоднородной атмосферы и предположим, что она теперь излучает не под действием падающего извне излучения, а благодаря внутренним источникам энергии. Допустим, что мощность источников не зависит от направления, но зависит от частоты, так что представляет собой векторную величину, которую мы обозначим через $\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)$. Далее, введем величины $\mathbf{I}_1(\tau_0)$ и $\mathbf{I}_2(\tau_0)$, представляющие собой интенсивности излучения, выходящие из среды через границы $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, соответственно. Тогда с учетом (2) и (10) и принципа обратимости оптических явлений будем иметь

$$\mathbf{I}_1(\tau_0) = \left\{ \int_0^{\tau_0} \left[\mathbf{P}^*(\tau_0 - \tau) + \bar{\mathbf{S}}^*(\tau_0 - \tau) \right] \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\, d\tau \right\} \mathbf{Q}^*(\tau_0), \tag{15}$$

$$\mathbf{I}_2(\tau_0)=\left\{\int_0^{\tau_0}[\mathbf{P}(\tau)+\mathbf{S}(\tau)]\,\varepsilon(\tau)d\tau\right\}\mathbf{Q}(\tau_0). \tag{16}$$

Формулы (15), (16) показывают, что вычисления, необходимые для решения данной задачи, могут быть произведены параллельно с вычислениями, требуемыми при рассмотрении задачи о диффузном отражении и пропускании, описанной в Н1. Дополнительно приходится лишь произвести суммирование найденных значений величин $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}$ и $\overline{\mathbf{S}}$ для вычисления соответствующих интегралов.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении поля излучения внутри атмосферы, для чего применим процедуру инвариантного погружения. В данном случае она заключается в добавлении к границе $\tau=\tau_0$ среды слоя малой толщины $\Delta\tau_0$ и учете внесенных им изменений с дальнейшим переходом к пределу при $\Delta\tau_0\to 0$. В результате имеем

$$\frac{d\mathbf{I}^-}{d\tau_0}=\mathbf{U}(\tau,\tau_0)\left[\varepsilon(\tau_0)+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Gamma\mathbf{I}_2(\tau_0)\right], \tag{17}$$

$$\frac{d\mathbf{I}^+}{d\tau_0}=\mathbf{V}(\tau,\tau_0)\left[\varepsilon(\tau_0)+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Gamma\mathbf{I}_2(\tau_0)\right], \tag{18}$$

где $\mathbf{I}^-(\tau,\tau_0)$ и $\mathbf{I}^+(\tau,\tau_0)$ представляют собой интенсивности излучения на глубине τ в направлении к границам среды $\tau=0$ и $\tau=\tau_0$, соответственно. Из приведенных уравнений нетрудно увидеть, что переменные у интенсивностей разделяются, поэтому окончательно находим

$$\mathbf{I}^-(\tau,\tau_0)=\mathbf{P}(\tau)\mathbf{F}(\tau_0),\quad \mathbf{I}^+(\tau,\tau_0)=\mathbf{S}(\tau)\mathbf{F}(\tau_0), \tag{19}$$

где

$$\mathbf{F}(\tau_0)=\int_0^{\tau_0}\mathbf{Q}(\tau)\left[\varepsilon(\tau)+\frac{\lambda(\tau)}{2}\Gamma\mathbf{I}_2(\tau)\right]d\tau. \tag{20}$$

Сложность определения поля излучения внутри среды заключается в необходимости знания коэффициента пропускания для различных оптических толщин.

5. *Диффузное отражение света от полубесконечной неоднородной атмосферы.* Переходя в (11) к пределу при $\tau_0\to\infty$ в предположении, что пределы соответствующих матриц существуют (что следует из физических соображений), будем иметь

$$\begin{pmatrix}\mathbf{U}(\tau)\\ \mathbf{V}(\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}^*(\delta\tau) & -\mathbf{S}^*(\delta\tau)\\ \overline{\mathbf{S}}^*(\delta\tau) & \mathbf{M}^*(\delta\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{U}(\tau+\delta\tau)\\ \mathbf{V}(\tau+\delta\tau)\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Здесь для предельных значений матриц $\overline{\mathbf{U}}$ и $\overline{\mathbf{V}}$ используются те же обозначения, но без верхних черточек, которые для упрощения записи опускаются. Полученное преобразование является представлением группы

трансляций оптических глубин для полубесконечной атмосферы, причем оно не зависит как от характера неоднородностей, так и от элементарного акта рассеяния. Оно генерирует целый ряд соотношений, в том числе и несколько известных формул. Так, например, из первого из соотношений (21)

$$\mathbf{U}(\tau)=\mathbf{P}^{*}(\delta\tau)\mathbf{U}(\tau+\delta\tau)-\mathbf{S}^{*}(\delta\tau)\mathbf{V}(\tau+\delta\tau) \tag{22}$$

с учетом того, что $\mathbf{V}(\tau+\delta\tau)=\mathbf{R}_{\infty}\mathbf{U}(\tau+\delta\tau)$, ($\mathbf{R}_{\infty}$ - матрица отражения от полубесконечной атмосферы) следует

$$\mathbf{U}(\tau+\delta\tau)=\left[\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{*}(\delta\tau)\overline{\mathbf{S}}^{*}(\delta\tau)\mathbf{R}_{\infty}\right]^{-1}\mathbf{Q}^{*}(\delta\tau)\mathbf{U}(\tau), \tag{23}$$

или

$$\mathbf{U}(\tau+\delta\tau)=\overline{\mathbf{T}}_{\infty}\mathbf{Q}^{*}(\delta\tau)\mathbf{U}(\tau), \tag{24}$$

где

$$\overline{\mathbf{T}}_{\infty}=\left[\mathbf{I}-\mathbf{R}(\delta\tau)\mathbf{R}_{\infty}\right]^{-1}=\mathbf{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathbf{R}(\delta\tau)\mathbf{R}_{\infty}\right]^{k}. \tag{25}$$

Но, с другой стороны, исходя из физических соображений, легко увидеть, что

$$\overline{\mathbf{T}}_{\infty}\mathbf{Q}^{*}(\delta\tau)=\mathbf{U}(\delta\tau), \tag{26}$$

поэтому из (23) окончательно находим

$$\mathbf{U}(\tau+\delta\tau)=\mathbf{U}(\delta\tau)\mathbf{U}(\tau). \tag{27}$$

Указанное полугрупповое свойство величины U хорошо известно в теории переноса излучения в однородной атмосфере, и, теперь мы видим, что оно отражает свойства симметрии задачи и верно в общем случае неоднородной атмосферы.

Из того же первого соотношения (21) можно вывести другую полезную связь между матриц-функциями отражения и пропускания слоя толщины τ и полем излучения на глубине τ полубесконечной атмосферы. Для этого достаточно положить в нем $\tau=0$, а затем заменить $\delta\tau$ на τ:

$$\mathbf{U}(\tau)=\mathbf{Q}^{*}(\tau)+\mathbf{R}(\tau)\mathbf{V}(\tau). \tag{28}$$

Еще одну связь между этими же величинами дает второе из соотношений (21)

$$\mathbf{R}_{\infty}=\overline{\mathbf{R}}(\tau)+\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{U}(\tau). \tag{29}$$

Соотношения (27)-(29) для скалярной задачи были приведены нами в [7,8]. Последние две формулы, записанные для однородной атмосферы, были получены также в [9], где они трактуются как принципы инвариантности. Однако, как мы убедились, существование такого рода соотношения обусловлено свойством симметрии задачи, связанной с процедурой композиции в общем случае неоднородных рассеивающих и поглощающих атмосфер.

6. *Заключение*. В работе, состоящей из двух частей, впервые для решения астрофизических задач переноса излучения в поглощающих и

рассеивающих атмосферах используется теоретико-групповой подход. Путем введения в рассмотрение дискретных аналогов некоторых комбинированных величин, описывающих оптические свойства сред, удается развить матрично-операторный метод, который весьма эффективен при построении численного решения различных задач рассеяния света. Мы продолжаем развивать идею о целесообразности предварительного определения глобальных оптических характеристик атмосферы при решении тех или иных часто встречаемых в астрофизике задач переноса. Значение найденных представлений групп, с практической точки зрения, заключается в том, что они позволяют обойти трудности, связанные с нелинейностью соответствующих уравнений, сводя большинство расчетов к простым алгебраическим операциям с матрицами. Метод особенно эффективен при решении задач рассеяния света в многокомпонентных атмосферах, что позволяет охватить достаточно широкий класс сложных астрофизических задач, связанных с формированием линейчатого спектра в таких средах.

Использование инфинитезимальных операторов рассмотренных групп позволяет установить органическую связь классических уравнений переноса и уравнений инвариантного погружения с этими группами. По сути дела, первые из них связаны с группой трансляций оптических глубин, в то время как второй тип уравнений - с группой композиций сред различных оптических толщин.

Предложенный метод обладает большой общностью, поскольку не зависит от характера неоднородности среды и от пространственно-частотной зависимости поля излучения. Он допускает обобщения в различных направлениях, однако уже на данном этапе может быть применен для решения актуальных астрофизических задач, связанных с многократным рассеянием света.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: nikoghoss@bao.sci.am

GROUPS AND THEIR REPRESENTATIONS IN THE THEORY OF RADIATIVE TRANSFER. II

A.C.NIKOGHOSSIAN

The matrix-operator method we developed in the first part of the paper in describing the radiation transfer is applied to find the field of radiation inside the inhomogeneous atmosphere. An important result obtained in the paper is

the separation of variables of optical depth and thickness in the requisite quantities. We introduce the concept of a group of translation of optical depths. It is shown that this group is equivalent to the group we introduced in the previous part for composition of media with different optical and physical properties. The proper representations for the group of translations are found. The problems of both the radiation transfer in inhomogeneous atmosphere with internal energy sources, and in a semi-infinite atmosphere, are considered.

Key words: *radiative transfer: partial redistribution: groups: groups representations: supermatrices*

ЛИТЕРАТУРА

1. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **57**, 295, 2014 (H1).
2. *Г.Я.Любарский*, Теория групп и ее применение в физике, М., Физматгиз, 1958.
3. *J.-Q.Chen*, *J.Ping*, *F.Wang*, Representation Theory for Physicists, World Sci. Publ. Co., MA., 2002.
4. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **54**, 149, 2011.
5. *A.G.Nikoghossian*, Astrophys. J., **483**, 849, 1997.
6. *A.G.Nikoghossian*, J. Quant Spectrosc. Radiat. Transfer, **61**, 345, 1999.
7. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **54**, 617, 2011.
8. *A.G.Nikoghossian*, Light Scat. Reviews, **8**, 377, 2013.
9. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953.