АСТРОФИЗИКА

ТОМ 57 МАЙ, 2014 ВЫПУСК 2

ГРУППЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ. I

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 15 января 2014

Работа посвящена теоретико-групповому описанию переноса излучения в неоднородных и многокомпонентных атмосферах с плоскопараллельной геометрией. Она состоит из двух частей и обобщает результаты, полученные недавно автором для простейших скалярных задач переноса в одномерной среде, на матричный случай, когда принимается в расчет пространственно-частотное распределение поля излучения. Дается определение группы композиций сред различных оптических и физических свойств. Получены представления группы, соответствующие двум возможностям освещения составной атмосферы конечной оптической толщины. Описывается алгоритм определения глобальных оптических характеристик неоднородных и композитных атмосфер. Развиваемая теория иллюстрируется на примере задачи диффузии излучения при частичном перераспределении по частотам в атмосфере, неоднородность которой обусловлена изменением с глубиной коэффициента рассеяния.

Ключевые слова: *перенос излучения: частичное перераспределение: группы: представления групп: суперматрицы*

1. *Введение*. Настоящая работа является продолжением начатого в [1] (далее Н1) исследования, посвященного теоретико-групповому описанию переноса излучения в поглощающих и рассеивающих средах. В предыдущей работе мы ограничились рассмотрением простейшей скалярной задачи для одномерных сред. В данной работе будет показано, что полученные там результаты могут быть обобщены на матричный случай, позволяющий охватить широкие классы астрофизических задач, в которых принимается в расчет пространственное и частотное распределение поля излучения. Помимо сугубо теоретического значения, такое обобщение представляет большую важность с практической точки зрения, поскольку позволяет разработать новые способы численного решенеия многих весьма сложных астрофизических задач. В частности, к их числу относятся задачи об образовании спектральных линий в средах с неоднородностями различных типов, в том числе в средах, обладающих тонкой структурой, наблюдение которых находится в пределах возможностей современных мощных инструментов.

Мы рассмотрим процедуру сложения сред, способных поглощать и рассеивать падающее на них излучение. При этом вначале будет предполагаться, что последние не содержат источников энергии. В общем случае, среды могут различаться друг от друга как оптическими толщинами, так

и характером неоднородности в них, связанным с изменением различных параметров, определяющих элементарный акт рассеяния, таких как профиль коэффициента поглощения, коэффициент рассеяния, индикатриса рассеяния, закон распределения излучения по частотам, степень поляризации и т.д. Обсуждаемый в работе матричный случай включает в себя как задачи диффузии излучения в трехмерной плоскопараллельной среде, так и в одномерной среде, когда учитывается перераспределение излучения по частотам. Для простоты, получаемые результаты демонстрируются на последнем из этих двух случаев при частичном перераспределении по частотам, если неоднородность атмосферы обусловлена изменением в ней коэффициента рассеяния.

Содержание работы таково. Вначале, в разделе 2, вводится понятие группы композиций сред (атмосфер), способных поглощать и рассеивать падающее на них излучение. В следующем разделе дается вывод законов сложения для различных оптических характеристик среды, что позволяет построить представления рассматриваемых групп. В качестве иллюстрации в разделе 4 рассматривается задача об образовании спектральных линий в одномерной неоднородной атмосфере при частичном перераспределении излучения по частотам. В разделе 5 описывается алгоритм решения задачи о переносе излучения через многокомпонентную атмосферу в общем случае, когда каждый из компонентов является неоднородным. Полученные в работе результаты обсуждаются в заключительном разделе.

2. *Группы композиции слоев*. Как и в H1, под композицией или преобразованием поглощающих и рассеивающих атмосфер будет пониматься добавление к одной из сторон исходной атмосферы другой, в общем случае, неоднородной атмосферы. Такие преобразования составляют группу, если под групповым произведением (бинарной операцией) в ней понимать результирующее двух последовательных преобразований. Все, что говорилось в H1 относительно условий для образования группы в скалярной задаче, остается в силе и в рассматриваемом матричном случае. В частности, группа обладает свойством ассоциативности, а роль единичного элемента играет тождественное преобразование, оставляющее исходную среду без изменения. Обратному элементу соответствует преобразование, обратное по отношению к тому или иному уже проведенному преобразованию. Такую группу условимся называть группой GN(2,$\mathbb{C}$), которая, как и группа GN(2) в скалярной задаче, является бесконечной и, в общем случае, некоммутативной. Множество атмосфер, получаемых в результате описанной композиции, очевидно, будет состоять из многокомпонентных атмосфер с неоднородными компонентами. Вместе с тем мы рассмотрим две подгруппы GN(2,$\mathbb{C}$), каждая из которых представляет самостоятельный интерес. Первая из них связана с композицией *однородных* сред, которые помимо толщины отличаются друг от друга еще

и некоторыми оптическими свойствами, характеризующими процесс диффузии в ней. Такие группы (назовем их GNH(2,ℂ)) являются некоммутативными и, двух-, трех- или многопараметрическими в зависимости от количества параметров, меняющихся при переходе от одной среды к другой. Такого рода многокомпонентные среды, каждый компонент которой, будучи однородным, отличается от других своими оптическими характеристиками, могут служить прототипом для целого ряда реальных излучающих сред, часто встречаемых в астрофизических приложениях.

Вторая подгруппа содержится в первой и относится к случаю, когда добавляемые слои обладают одинаковыми свойствами и отличаются друг от друга лишь толщинами (группа GH(2,ℂ)). Очевидно, что в результате любого преобразования в этом случае будем иметь дело лишь с однородными средами. Такая группа коммутативна (абелева), является однопараметрической, бесконечной и непрерывной при непрерывном изменении оптической толщины [1,2].

3. *Представления групп.* Для нахождения представлений названных групп рассмотрим конфигурацию, состоящую из двух сред, в общем случае отличающиеся друг от друга как оптическими толщинами, так и функциональным поведением в них параметров, определяющих элементарный акт рассеяния (рис.1). Это означает, что оба компонента являются неоднородными и потому, как было показано в [3,4], обладают свойством полярности. В отличие от рассмотренного в H1 скалярного случая, коэффициенты отражения и прохождения помимо толщины теперь зависят от частоты (в трехмерных задачах также от направления), поэтому их удобно записать в операторно-матричной форме. Обозначим их соответственно через $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{Q}_i$ ($i=1, 2$), если среда освещается справа (верхний чертеж на рис.1), и через $\overline{\mathbf{R}}_i$ и $\overline{\mathbf{Q}}_i$ - если освещается слева (нижний чертеж). Напомним также, что $\overline{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{Q}_i^*$, где звездочкой обозначается транспонированная матрица. Поэтому в дальнейшем изложении будем придерживаться обозначения $\mathbf{Q}_i^*$.

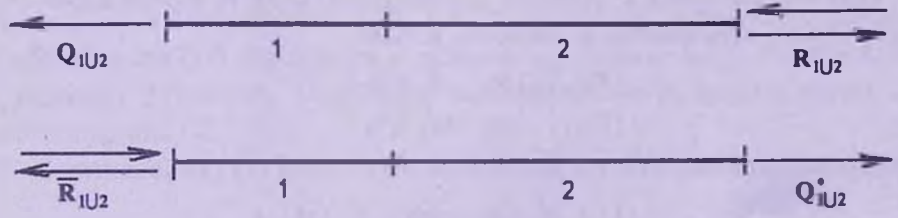

Рис.1. Отражение и пропускание неоднородной композитной атмосферы.

Наряду с коэффициентами пропускания $\mathbf{Q}_i$ важную роль в нашем исследовании играют обратные им матрицы $\mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_i^{-1}$, $\mathbf{P}_i^* = \left(\mathbf{Q}_i^*\right)^{-1}$, которые существуют ввиду невырожденности матриц $\mathbf{Q}_i$, а также матрицы $\mathbf{S}_i = \mathbf{R}_i\mathbf{P}_i$, $\overline{\mathbf{S}}_i = \mathbf{P}_i\overline{\mathbf{R}}_i$.

Рассмотрим процесс прохождения излучения через композитную среду, когда она освещается справа. Принимая в расчет возможность многократных отражений между ее компонентами, можно написать (здесь и всюду далее условимся индексом $1\cup 2$ обозначать величины, относящиеся к композитной атмосфере)

$$\mathbf{Q}_{1\cup 2} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{T} \mathbf{Q}_2 , \tag{1}$$

где

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\overline{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_1\right)^k . \tag{2}$$

Отсюда имеем $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \overline{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{T}$, или

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I} - \overline{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_1 . \tag{3}$$

Теперь соотношение (1) может быть переписано в виде $\mathbf{P}_{1\cup 2} = \mathbf{P}_2 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_1$, или с учетом (3)

$$\mathbf{P}_{1\cup 2} = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 - \overline{\mathbf{S}}_2 \mathbf{S}_1 . \tag{4}$$

Это первое из нужных нам соотношений.

Обратимся теперь к отражательной способности композитной атмосферы. На основе простых физических рассуждений имеем

$$\mathbf{R}_{1\cup 2} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2^* \mathbf{R}_1 \mathbf{T} \mathbf{Q}_2 . \tag{5}$$

Используя (4), получаем

$$\mathbf{S}_{1\cup 2} = \mathbf{R}_{1\cup 2} \mathbf{P}_{1\cup 2} = \mathbf{S}_2 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_2^* \mathbf{S}_1 . \tag{6}$$

С другой стороны, если учесть (3), то

$$\mathbf{S}_2 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}_1 = \mathbf{S}_2 \left(\mathbf{P}_1 - \overline{\mathbf{R}}_2 \mathbf{S}_1\right), \tag{7}$$

и тогда вместо (6) находим

$$\mathbf{S}_{1\cup 2} = \mathbf{S}_2 \mathbf{P}_1 + \mathbf{M}_2 \mathbf{S}_1 , \tag{8}$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^* - \mathbf{S}\overline{\mathbf{R}}$.

Если воспользоваться понятием суперматрицы [2,5], то соотношения (4) и (8) можно объединить и записать в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{1\cup 2} \\ \mathbf{S}_{1\cup 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 & -\overline{\mathbf{S}}_2 \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Введем обозначение

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & -\overline{\mathbf{S}} \\ \mathbf{S} & \mathbf{M} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где тильда означает, что величина является суперматрицей (или, как еще принято называть, клеточной или блочной матрицей).

Как нетрудно убедиться, суперматрицы $\widetilde{\mathbf{A}}$, также образуют группу и являются представлением группы $GN(2,\mathbf{C})$, отображая ее в линейном

супервекторном пространстве. Важно обратить внимание на тот факт, что способ композиции поглощающих и рассеивающих сред, описываемый $\tilde{\mathbf{A}}$, (преобразование g), не зависит от того, изменениями какого именно параметра обусловлено свойство неоднородности объединяемых сред. Поэтому полученные результаты в равной мере относятся и к таким средам, составляющие которых обладают неоднородностями различной природы.

Нетрудно понять, что преобразование (9) лишь частично дает ответ об оптических свойствах результирующей атмосферы. Оно позволяет определить отражательную и пропускательную способность среды только со стороны ее освещения, что может считаться достаточным лишь в случае однородной атмосферы. Для нахождения недостающих свойств получаемой атмосферы поступим следующим образом.

Очевидно, что двукратное добавление к исходной среде новых слоев справа эквивалентно действию произведения матриц (10). Отсюда следуют правила сложения для величин $\bar{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{M}$.

$$\bar{\mathbf{S}}_{1U2} = \mathbf{P}_2\bar{\mathbf{S}}_1 + \bar{\mathbf{S}}_2\mathbf{M}_1, \quad \mathbf{M}_{1U2} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 - \mathbf{S}_2\bar{\mathbf{S}}_1. \tag{11}$$

Указанные правила можно получить непосредственно, если принять во внимание, что

$$\bar{\mathbf{R}}_{1U2} = \bar{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{Q}_1\bar{\mathbf{R}}_2\bar{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_1^*, \tag{12}$$

где

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{R}_1\bar{\mathbf{R}}_2. \tag{13}$$

Покажем это на примере первого из соотношений (11). Пользуясь определением величины $\bar{\mathbf{S}}$ и соотношением (12) и тем, что $\bar{\mathbf{T}}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_1\bar{\mathbf{R}}_2$, получаем

$$\bar{\mathbf{S}}_{1U2} = \mathbf{P}_{1U2}\bar{\mathbf{R}}_{1U2} = \mathbf{P}_2\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{S}_1 + \bar{\mathbf{R}}_2\bar{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_1^*\right), \tag{14}$$

или с учетом (3)

$$\bar{\mathbf{S}}_{1U2} = \mathbf{P}_2\bar{\mathbf{S}}_1 - \bar{\mathbf{S}}_2\mathbf{R}_1\bar{\mathbf{S}}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{R}}_2\bar{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_1^*. \tag{15}$$

Но несложно показать, что $\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{R}}_2 = \bar{\mathbf{R}}_2\bar{\mathbf{T}}^{-1}$, и потому последнее слагаемое в правой части (15) упрощается и оказывается равным $\bar{\mathbf{S}}_2\mathbf{Q}_1^*$. Это приводит к нужному результату. Подобным образом можно проверить второе из соотношений (11).

Соотношения (11) могут быть записаны в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix}\mathbf{M}_{1U2}\\ \bar{\mathbf{S}}_{1U2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{M}_2 & -\mathbf{S}_2\\ \bar{\mathbf{S}}_2 & \mathbf{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1\\ \bar{\mathbf{S}}_1\end{pmatrix}, \tag{16}$$

Таким образом, приходим к еще одному представлению преобразования g, осуществляемому посредством суперматрицы

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix}\mathbf{M} & -\mathbf{S}\\ \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{P}\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Обозначим через $\mathfrak{I}(g)$ и $\overline{\mathfrak{I}}(g)$ вышеупомянутые представления группы GN(2,C), соответствующие преобразованиям исходной среды справа. Тогда групповым произведениям $g_1 \otimes g_2$ будут соответствовать произведения суперматриц $\tilde{\mathbf{A}}_{1U2} = \tilde{\mathbf{A}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_1$ и $\tilde{\mathbf{B}}_{1U2} = \tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_1$, т.е., $\mathfrak{I}(g_1 \otimes g_2) = \mathfrak{I}(g_2)\mathfrak{I}(g_1)$ и $\overline{\mathfrak{I}}(g_1 \otimes g_2) = \overline{\mathfrak{I}}(g_2)\overline{\mathfrak{I}}(g_1)$. Тождественному преобразованию e соответствует суперматрица

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $\mathbf{I}$ - единичная матрица.

Ввиду невырожденности матриц, входящих в $\tilde{\mathbf{A}}$ (ниже будет показано, что супердетерминант $\tilde{\mathbf{A}}$ также отличен от нуля), последняя имеет двустороннюю обратную матрицу (см. [6])

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{P} + \overline{\mathbf{S}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\right)^{-1} & \left(\mathbf{S} + \mathbf{M}\overline{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{P}\right)^{-1} \\ -\left(\overline{\mathbf{S}} + \mathbf{P}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\right)^{-1} & \left(\mathbf{M} + \mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\overline{\mathbf{S}}\right)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Теперь покажем, что на самом деле субматрицы в $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ равны матрицам, получаемым в результате транспонирования соответствующих матриц, участвующих в $\tilde{\mathbf{A}}$, Например,

$$\left(\mathbf{M} + \mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\overline{\mathbf{S}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{Q}^* - \mathbf{S}\overline{\mathbf{R}} + \mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\overline{\mathbf{R}}\right)^{-1} = \mathbf{P}^*. \tag{20}$$

Аналогичным образом

$$\left(\overline{\mathbf{S}} + \mathbf{P}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\right)^{-1} = \left[\overline{\mathbf{S}} + \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{Q}^* - \mathbf{S}\overline{\mathbf{R}}\right)\right]^{-1} = \mathbf{P}^*\mathbf{R} = \mathbf{S}^*, \tag{21}$$

$$\left(\mathbf{S} + \mathbf{M}\overline{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{P}\right)^{-1} = \left[\mathbf{S} + \left(\mathbf{Q}^* - \mathbf{S}\overline{\mathbf{R}}\right)\overline{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\right]^{-1} = \overline{\mathbf{R}}\mathbf{P}^* = \overline{\mathbf{S}}^*. \tag{22}$$

Докажем, наконец, что

$$\left(\mathbf{P} + \overline{\mathbf{S}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\right)^{-1} = \mathbf{Q} - \overline{\mathbf{R}}\mathbf{P}^*\mathbf{R} = \mathbf{M}^*, \tag{23}$$

где $\mathbf{M}^* = \mathbf{Q} - \overline{\mathbf{S}}^*\mathbf{R}$. Соотношение (23) будет иметь место, если

$$\left(\mathbf{P} + \overline{\mathbf{S}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\right)\left(\mathbf{Q} - \overline{\mathbf{R}}\mathbf{P}^*\mathbf{R}\right) = \mathbf{I}, \tag{24}$$

или

$$\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{P}\overline{\mathbf{R}}\mathbf{P}^*\right) = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}\overline{\mathbf{S}}^*\right) = \mathbf{P}^*. \tag{25}$$

Последняя формула является тождеством, поскольку из (25) следует

$$\mathbf{M} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{S}\overline{\mathbf{S}}^*\right)\left(\mathbf{P}^*\right)^{-1} = \mathbf{Q}^* - \mathbf{S}\overline{\mathbf{R}}, \tag{26}$$

что доказывает исходное утверждение.

Таким образом, вместо (19) имеем

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^* & \overline{\mathbf{S}}^* \\ -\mathbf{S}^* & \mathbf{P}^* \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Проводя аналогичные выкладки, находим

$$\tilde{\mathbf{B}}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}^{*} & \mathbf{S}^{*}\\ -\bar{\mathbf{S}}^{*} & \mathbf{M}^{*}\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Отметим, что суперматрицы (27) и (28) отличаются от соответствующих супертранспонированных суперматриц.

Рассмотрим суперматрицу (27). Из равенств $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}=\mathbf{E}$ и $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{E}$ следует ряд полезных соотношений

$$\mathbf{PM}^{*}+\bar{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{*}=\mathbf{I},\quad \mathbf{M}^{*}\mathbf{P}+\bar{\mathbf{S}}^{*}\mathbf{S}=\mathbf{I}, \tag{29}$$

$$\mathbf{MP}^{*}+\mathbf{S}\bar{\mathbf{S}}^{*}=\mathbf{I},\quad \mathbf{P}^{*}\mathbf{M}+\mathbf{S}^{*}\bar{\mathbf{S}}=\mathbf{I}. \tag{30}$$

Еще четыре соотношения выражают симметричность произведений матриц: $\mathbf{P}\bar{\mathbf{S}}^{*}$, $\mathbf{P}^{*}\mathbf{S}$, $\mathbf{M}\mathbf{S}^{*}$, $\mathbf{M}^{*}\bar{\mathbf{S}}$. К таким же результатам можно прийти применением суперматрицы $\tilde{\mathbf{B}}$.

Теперь, если принять во внимание первое из соотношений (29) и тот факт, что детерминант транспонированной матрицы равен детерминанту самой матрицы, будем иметь

$$\det\tilde{\mathbf{A}}=\det\left(\mathbf{PM}+\bar{\mathbf{S}}\mathbf{S}\right)=\det\left(\mathbf{PM}^{*}+\bar{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{*}\right)=\det\mathbf{I}=1. \tag{31}$$

Таким образом, суперматрица $\tilde{\mathbf{A}}$ является невырожденной, причем ее супердетерминант [5,7] равен единице. Очевидно, что единице равны и супердетерминанты остальных суперматриц $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}^{-1}$.

Найденные представления (10) и (17) изоморфны группе GN(2,C), поскольку соответствие между указанной группой и $\Im(g)$, $\bar{\Im}(g)$ взаимооднозначное и произведению любых двух элементов из GN(2,C) соответствует матричное умножение соответствующих представлений этой группы. Эти два представления можно объединить и написать в виде приводимого представления

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{1U2}\\ \mathbf{S}_{1U2}\\ \mathbf{M}_{1U2}\\ \bar{\mathbf{S}}_{1U2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_2 & -\bar{\mathbf{S}}_2 & 0 & 0\\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{M}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{M}_2 & -\mathbf{S}_2\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{S}}_2 & \mathbf{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_1\\ \mathbf{S}_1\\ \mathbf{M}_1\\ \bar{\mathbf{S}}_1\end{pmatrix}, \tag{32}$$

причем $\mathbf{P}(0)=\mathbf{M}(0)=\mathbf{I}$, $\mathbf{S}(0)=\bar{\mathbf{S}}(0)=\mathbf{0}$.

Таким образом, приходим к выводу, что обычным матричным умножением можно определить величины, выражающие отражательную и пропускательную способности составной атмосферы, если известны указанные способности ее компонентов. Очевидно, что в случае однородной среды вместо (32) достаточно рассмотреть преобразование (9).

Перейдем теперь к случаю, когда составная среда освещается со стороны левой границы (нижний чертеж на рис.1). Тогда вместо (1), (2) будем иметь

$$\mathbf{Q}^{*}_{1U2}=\mathbf{Q}^{*}_{2}\bar{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^{*}_{1}\quad \bar{\mathbf{T}}=\mathbf{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathbf{R}_1\bar{\mathbf{R}}_2\right)^{k}. \tag{33}$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в начале данного раздела, с учетом того, что

$$\overline{\mathbf{T}}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_1\overline{\mathbf{R}}_2, \tag{34}$$

позволяют написать

$$\mathbf{P}^*_{1U2} = \mathbf{P}^*_1\mathbf{P}^*_2 - \mathbf{S}^*_1\overline{\mathbf{S}}^*_2. \quad \overline{\mathbf{S}}^*_{1U2} = \overline{\mathbf{S}}^*_1\mathbf{P}^*_2 + \mathbf{M}^*_1\overline{\mathbf{S}}^*_2, \tag{35}$$

или

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}^*_{1U2} \\ \overline{\mathbf{S}}^*_{1U2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^*_1 & -\mathbf{S}^*_1 \\ \overline{\mathbf{S}}^*_1 & \mathbf{M}^*_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}^*_2 \\ \overline{\mathbf{S}}^*_2 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Наконец, вместо (16) будем иметь

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^*_{1U2} \\ \mathbf{S}^*_{1U2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^*_1 & -\overline{\mathbf{S}}^*_1 \\ \mathbf{S}^*_1 & \mathbf{P}^*_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}^*_2 \\ \mathbf{S}^*_2 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Таким образом, находим новые два представления группы GN(2,$\mathbb{C}$), описывающие преобразования глобальных оптических характеристик композитной атмосферы при освещении ее со стороны левой границы

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^* & -\mathbf{S}^* \\ \overline{\mathbf{S}}^* & \mathbf{M}^* \end{pmatrix}. \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^* & -\overline{\mathbf{S}}^* \\ \mathbf{S}^* & \mathbf{P}^* \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Эти представления также изоморфны группе GN(2,$\mathbb{C}$). Двусторонние обратные суперматрицы существуют и соответственно равны

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ -\overline{\mathbf{S}} & \mathbf{P} \end{pmatrix}. \quad \tilde{\mathbf{D}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \overline{\mathbf{S}} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{M} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Представления (36) и (37) можно объединить и записать в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}^*_{1U2} \\ \overline{\mathbf{S}}^*_{1U2} \\ \mathbf{M}^*_{1U2} \\ \mathbf{S}^*_{1U2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^*_1 & -\mathbf{S}^*_1 & 0 & 0 \\ \overline{\mathbf{S}}^*_1 & \mathbf{M}^*_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^*_1 & -\overline{\mathbf{S}}^*_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}^*_1 & \mathbf{P}^*_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}^*_2 \\ \overline{\mathbf{S}}^*_2 \\ \mathbf{M}^*_2 \\ \mathbf{S}^*_2 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Преобразование (36) играет важную роль при рассмотрении переноса ичлучения в полубесконечной среде.

4. *Задача о диффузном отражении излучения в линии от одномерной атмосферы конечной толщины при частичном перераспределении по частотам.* Рассмотрим подгруппу группы композиций GNH(2,$\mathbb{C}$), подчиняющуюся единственному ограничению, заключающемуся в том, чтобы оптическая толщина среды, получаемой в результате преобразований, не превосходила некоторого наперед заданного значения τ_0. Такая бесконечная группа, очевидно, является непрерывной ввиду непрерывности изменения единственного параметра - оптической

толщины. Другими словами, как она, так и ее представления $\mathfrak{I}(g)$ будут группами Ли размерности, равной единице [5,7].

С помощью преобразований такой группы можно построить некоторую, многокомпонентную атмосферу определенной оптической толщины τ_0, компоненты которой, в общем случае, могут различаться своими физическими характеристиками. В качестве примера рассмотрим матричную задачу рассеяния света в одномерной неоднородной среде, освещаемой со стороны границы $\tau = \tau_0$ в предположении, что рассеяние излучения в среде происходит с частичным перераспределением по частотам. Допустим, что полученная в результате композиций среда состоит из компонентов равной и достаточно малой толщины, характеризующихся некоторыми постоянными значениями коэффициента рассеяния λ таким образом, что в пределе, когда толщины компонентов стремятся к нулю, его можно считать непрерывной функцией оптической глубины. Для инфинитезимального оператора такой группы можно будет написать

$$\tilde{\Xi}(0) = \lim_{\Delta\tau_0 \to 0} \frac{\tilde{A}(\Delta\tau_0) - E}{\Delta\tau_0} = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{\lambda(0)}{2}\Gamma & -\frac{\lambda(0)}{2}\Gamma \\ \frac{\lambda(0)}{2}\Gamma & -\left[\alpha - \frac{\lambda(0)}{2}\Gamma\right] \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где приняты следующие обозначения: под величинами α и Γ подразумеваются дискретные аналоги соответственно профиля коэффициента поглощения в линии и закона перераспределения по частотам [8]. Для простоты предполагается, что обе величины не зависят от оптической глубины. Величина α является диагональной матрицей с элементами $\alpha_i = \alpha(x_i)$.

С другой стороны, для производной оператора $\tilde{A}$ при значении параметра, равного τ_0, будем иметь

$$\tilde{\Xi}(\tau_0) = \lim_{\Delta\tau_0 \to 0} \frac{\tilde{A}(\tau_0 + \Delta\tau_0) - \tilde{A}(\tau_0)}{\Delta\tau_0} = \begin{pmatrix} m(\tau_0) & -n(\tau_0) \\ n(\tau_0) & -m(\tau_0) \end{pmatrix}, \tag{42}$$

где

$$m(\tau_0) = \alpha - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Gamma, \quad n(\tau_0) = \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Gamma. \tag{43}$$

С учетом (9) приходим к системе уравнений (см. также [9,10])

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau_0} = m(\tau_0)\mathbf{P}(\tau_0) - n(\tau_0)\mathbf{S}(\tau_0), \tag{44}$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau_0} = n(\tau_0)\mathbf{P}(\tau_0) - m(\tau_0)\mathbf{S}(\tau_0), \tag{45}$$

с начальными условиями $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$, $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ - нулевая матрица.

Обращение матрицы $\mathbf{P}(\tau_0)$, получаемой в результате решения системы уравнений (44), (45), позволяет определить искомые значения коэффициентов отражения и пропускания среды.

Обращаясь к производной оператора $\widetilde{\mathbf{B}}$, имеем

$$\widetilde{\Xi}'(\tau_0)=\lim_{\Delta\tau_0\to 0}\frac{\widetilde{\mathbf{B}}(\tau_0+\Delta\tau_0)-\widetilde{\mathbf{B}}(\tau_0)}{\Delta\tau_0}=\begin{pmatrix}-\mathbf{m}(\tau_0) & -\mathbf{n}(\tau_0)\\ \mathbf{n}(\tau_0) & \mathbf{m}(\tau_0)\end{pmatrix}, \tag{46}$$

и тогда, на основании (16) приходим к новой системе уравнений

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\tau_0}=-\mathbf{m}(\tau_0)\mathbf{M}(\tau_0)-\mathbf{n}(\tau_0)\overline{\mathbf{S}}(\tau_0), \tag{47}$$

$$\frac{d\overline{\mathbf{S}}}{d\tau_0}=\mathbf{n}(\tau_0)\mathbf{M}(\tau_0)+\mathbf{m}(\tau_0)\overline{\mathbf{S}}(\tau_0), \tag{48}$$

с начальными условиями $\mathbf{M}(0)=\mathbf{I}$, $\overline{\mathbf{S}}(0)=\mathbf{0}$.

Уравнения (43), (44), (46), (47) можно объединить и записать в виде

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{Y}}}{d\tau_0}=\widetilde{\mathfrak{M}}(\tau_0)\widetilde{\mathbf{Y}}(\tau_0), \tag{49}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(\tau_0)=\begin{pmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{S}\\ \mathbf{M}\\ \overline{\mathbf{S}}\end{pmatrix},\quad \widetilde{\mathfrak{M}}(\tau_0)=\begin{pmatrix}\mathbf{m}(\tau_0) & -\mathbf{n}(\tau_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{n}(\tau_0) & -\mathbf{m}(\tau_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{m}(\tau_0) & -\mathbf{n}(\tau_0)\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}(\tau_0) & \mathbf{m}(\tau_0)\end{pmatrix}. \tag{50}$$

Если среда однородная, то достаточно ограничиться системой уравнений (44), (45), решение которой можно представить в виде матричной экспоненты (см. [10])

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(\tau_0)=\exp(\widetilde{\Xi}\tau_0)\widetilde{\mathbf{Y}}(0), \tag{51}$$

где теперь

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(\tau_0)=\begin{pmatrix}\mathbf{P}(\tau_0)\\ \mathbf{S}(\tau_0)\end{pmatrix},\quad \widetilde{\mathbf{Y}}(0)=\begin{pmatrix}\mathbf{I}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}. \tag{52}$$

Разложение в ряд матричных экспонент дает

$$\mathbf{P}(\tau_0)=\mathbf{I}+\left(\alpha-\frac{\lambda}{2}\Gamma\right)\frac{\tau_0}{1!}+\left[\alpha^2-\frac{\lambda}{2}(\Gamma\alpha-\alpha\Gamma)\right]\frac{\tau_0^2}{2!}+\ldots, \tag{53}$$

$$\mathbf{S}(\tau_0)=\mathbf{R}(\tau_0)\mathbf{P}(\tau_0)=\frac{\lambda}{2}\Gamma\frac{\tau_0}{1!}+\frac{\lambda}{2}(\Gamma\alpha-\alpha\Gamma)\frac{\tau_0^2}{2!}+\ldots. \tag{54}$$

В отличие от разложений, приведенных нами в [10], здесь учтено, что коммутатор матриц α и Γ отличен от нуля. Формулы (53), (54) позволяют с довольно большой точностью построить решение рассматриваемой нами задачи диффузного отражения и пропускания для многокомпонентной неоднородной атмосферы, состоящей из отличающихся друг от друга однородных сред.

Аналогичные рассуждения, в случае, когда атмосфера освещается со стороны границы $\tau=0$, приводят к двум другим системам матричных

дифференциальных уравнений,которые, взятые вместе, могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{d\tau_0}\begin{pmatrix} P^* \\ \bar{S}^* \\ M^* \\ S^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^* & -S^* & 0 & 0 \\ \bar{S}^* & M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^* & -\bar{S}^* \\ 0 & 0 & S^* & P^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(\tau_0) \\ n(\tau_0) \\ -m(\tau_0) \\ n(\tau_0) \end{pmatrix}. \tag{55}$$

При написании (55) принята во внимание симметричность матриц α и Γ. В заключение заметим, что на основе систем уравнений (44), (45), (47), (48), (55) для всех искомых матриц-функций, так же, как и в скалярном случае [10], могут быть получены отдельные матричные дифференциальные уравнения второго порядка.

Рассмотренная в данном разделе задача и приведенные выше системы матричных уравнений демонстрируют тесную связь между развитым нами групповым подходом и методом инвариантного погружения [11,12]. По сути дела, уравнения, получаемые применением указанного метода, связаны с действием инфинитезимальных операторов, соответствующих введенных в работе представлений групп.

В заключение заметим, что если среда однородная, то, как следует из [13,14], приведенные выше системы уравнений допускают инварианты или законы сохранения. Так, например, из первой из указанных систем (44), (45) следует

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} = k^2\Phi, \tag{56}$$

где $\Phi = P + S$ и $k^2 = \alpha(\alpha - \lambda\Gamma)$. Соответствующая этому уравнению плотность Лагранжиана равна $L = \Phi^2 + k^{-2}\Phi'^2$ (см. [14]), откуда

$$\sum\left[\Phi^2 - k^{-2}\Phi'^2\right] = \text{const}, \tag{57}$$

или

$$\sum\left[\alpha(P-S)^2 - (\alpha - \lambda\Gamma)(P+S)^2\right] = \lambda\alpha, \tag{58}$$

где суммирование производится по одному из столбцов, обозначающих частоту отраженного излучения. При определении значения постоянной интегрирования в (58) приняты во внимание значения матриц P и S при $\tau_0 = 0$ и учтено условие нормировки функции перераспределения по частотам. Аналогичные законы можно вывести и для других рассмотренных выше систем уравнений. Континуальные аналоги законов сохранения для однородной атмосферы были нами получены в упомянутых работах [13,14]. Их существование обусловлено тем, что производимые преобразования являются преобразованиями симметрии для рассматриваемой задачи.

5. *Многокомпонентные атмосферы.* При интерпретации излучения

различных астрофизических объектов часто приходится сталкиваться с необходимостью учесть сложную неоднородную, а иногда и тонкую многокомпонентную структуру излучающего объема. Строго говоря, реальные объекты никогда не являются однородными, и только сложность рассматриваемых задач заставляет прибегнуть к различного рода упрощающим предположениям, в том числе, к приближению однородной среды. Последнее дает лишь усредненное в некотором смысле представление об изучающем объеме, что не всегда оказывается достаточным для получения адекватной картины изучаемого физического явления. Это диктует необходимость в теоретической разработке алгоритмов численного решения задач об образовании спектральных линий в неоднородных и композитных средах.

Развиваемая в работе теория основана на широком использовании идей теории групп. Она является особенно продуктивной при решении задач переноса в атмосферах со сложной многослойной структурой. Обращаясь к представлению группы $GN(2,\mathbb{C})$, задаваемой (10), мы видим, что для построения композитной атмосферы путем добавления к границе $\tau = \tau_0$ новых, в общем случае неоднородных слоев, необходимо задать глобальные оптические характеристики каждого из них, а именно, матриц-функции $\mathbf{P}$, $\mathbf{S} = \mathbf{RP}$, $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{R}}$, $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^* - \mathbf{S}\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}^* - \mathbf{R}\bar{\mathbf{S}}$. Иными словами, предварительно следует определить отражательные и пропускательные способности каждого из складываемых слоев ($\mathbf{R}$, $\bar{\mathbf{R}}$, $\mathbf{Q}$). Как было показано в предыдущем разделе, они могут быть определены путем решения систем матричных дифференциальных уравнений (44), (45), (47), (48) или (55) с последующим обращением матрицы $\mathbf{P}$. О преимуществах такого пути речь пойдет во второй части работы. С другой стороны, как было нами показано в [10,15,16], названные величины для атмосферы с непрерывным изменением оптических свойств удовлетворяют матричным дифференциальным уравнениям с начальными условиями

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\tau_0} = -[\mathbf{R}\alpha + \alpha\mathbf{R}] + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\{\Gamma + [\mathbf{R}\Gamma + \Gamma\mathbf{R}] + \mathbf{R}\Gamma\mathbf{R}\}, \tag{59}$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\tau_0} = -\mathbf{Q}\left[\alpha - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Gamma(\mathbf{I} + \mathbf{R})\right], \tag{60}$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{R}}}{d\tau_0} = \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\mathbf{Q}\Gamma\mathbf{Q}^*, \tag{61}$$

где для иллюстрации приводятся уравнения, относящиеся к случаю, когда неоднородность среды обусловлена изменением в среде только коэффициента рассеяния. Уравнения (59), (60), (61) удовлетворяют начальным условиям $\mathbf{R}(0) = \bar{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$. Что касается величины $\mathbf{P}$, то вместо трудоемкого обращения на каждом этапе матрицы $\mathbf{Q}$ можно обратиться к уравнению (44), которое с учетом того, что $\mathbf{S} = \mathbf{RP}$, принимает сходный с (60) вид

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau_0}=\left[\alpha-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Gamma(\mathbf{I}+\mathbf{R})\right]\mathbf{P}, \qquad (62)$$

с условием $\mathbf{P}(0)=\mathbf{I}$.

Процесс композиций продолжается до достижения оптической толщины τ_0, заданной поставленной задачей. Обращение найденной матрицы $\mathbf{P}(\tau_0)$ позволяет определить $\mathbf{Q}(\tau_0)$, что, как будет показано во второй части работы, позволяет определить поле излучения внутри атмосферы.

Так обстоит дело в наиболее общем случае многокомпонентной атмосферы, компоненты которой, будучи неоднородными, отличаются друг от друга. В том случае, когда компоненты обладают одинаковыми оптическими свойствами, мы имеем дело с циклической группой и процесс композиций сводится к действию степеней операторов, например, $\tilde{\mathbf{A}}^n$. Тогда, естественно, объем вычислений в значительной мере сокращается, поскольку достаточно определить оптические характеристики лишь одного компонента.

6. *Заключительные замечания*. В данной части работы мы ограничились теоретико-групповой трактовкой вопроса об определении глобальных оптических характеристик неоднородных и многокомпонентных конечных атмосфер. Применение полученных представлений группы композиций сред в значительной мере облегчает нахождение отражательных и пропускательных свойств таких сред. Фактически предлагается легко реализуемая процедура определения указанных свойств, если только эти свойства известны для составляющих компонентов. При этом важно отметить, что неоднородные среды, в которых параметры, описывающие элементарный акт рассеяния, меняются с глубиной при численной реализации, связанной с дискретизацией, также могут быть истолкованы как многокомпонентные. В этом случае среда разбивается на компоненты достаточно малой толщины, чтобы их можно было считать однородными, оптические свойства которых проще определяются (в скалярном случае они находятся аналитически).

Как уже указывалось, групповой подход с применением векторно-матричного аппарата вычислений является достаточно общим, поскольку не зависит от природы неоднородностей, охватывая тем самым весьма широкие классы астрофизических задач, связанных с переносом излучения. Однако этим не исчерпываются достоинства предлагаемого подхода. В продолжении работы будет показано, в частности, что описанные нами вычисления, необходимые для нахождения отражательных и пропускательных способностей неоднородной атмосферы, достаточны для определения поля излучения внутри них без решения каких-либо новых уравнений.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: nikoghoss@bao.sci.am

GROUPS AND THEIR REPRESENTATIONS IN THE THEORY OF RADIATIVE TRANSFER. I

A.G.NIKOGHOSSIAN

The work is devoted to the group-theoretical description of the radiation transfer in inhomogeneous and multicomponent atmospheres with the plane-parallel geometry. Consisted of two parts, it generalizes the results obtained recently by the author for the simplest scalar problems of the transfer in 1D media over the matrix case, where the spatial and frequency distributions of the radiation field are taken into account. Definition of a group of composition of the media with different optical and physical properties is given. The group representations are derived for two possible cases of illumination of a composite finite atmosphere. An algorithm for determining the global optical characteristics of inhomogeneous and multi-component atmospheres is described. As an illustration of the developed theory, the problem of the radiation diffusion with partial frequency distribution is considered in which the inhomogeneity is assumed to be due to the depth-variation of the scattering coefficient.

Key words: *radiative transfer: partial redistribution: groups: groups representations: supermatrices*

ЛИТЕРАТУРА

1. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **54**, 149, 2011 (H1).
2. *Е.Вигнер*, Теория групп, М., ИЛ, 1961.
3. *A.G.Nikoghossian*, Astron. Astrophys., **422**, 1059, 2004.
4. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **47**, 123, 2004.
5. Ф.А.Березин, Метод вторичного квантования, М., Наука, 1986.
6. *Р.Беллман*, Введение в теорию матриц, М., Наука, 1976.
7. *В.Хейне*, Теория групп в квантовой механике, М., ИЛ, 1963.
8. *В.В.Соболев*, Курс теоретической астрофизики, М., Наука, 1985.
9. *A.G.Nikoghossian*, Light Scat. Reviews, **8**, 377, 2013.
10. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **54**, 617, 2011.
11. *R.Bellman*, *R.Kalaba*, *M.Wing*, J. Math. Phys., **1**, 280, 1960.
12. *R.Bellman*, *R.Kalaba*, *M.Prestrud*, Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness, American Elsevier, N.Y., 1963.
13. *A.G.Nikoghossian*, Astrophys. J., **483**, 849, 1997.
14. *A.G.Nikoghossian*, J. Quant Spectrosc. Radiat. Transfer, **61**, 345, 1999.
15. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **56**, 143, 2013.
16. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **56**, 609, 2013.