

О РОЛИ ФУНКЦИИ ОТРАЖЕНИЯ ПРИ ОПИСАНИИ ДИФфуЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 31 июля 2013

В работе дается анализ последних результатов, полученных автором при рассмотрении задач переноса излучения в неоднородной атмосфере. На примере трех наиболее часто встречающихся в астрофизике задач демонстрируются преимущества подхода, основанного на идее инвариантного погружения. Особое внимание уделяется той важной роли, которую играет функция отражения при определении поля излучения в среде и ряда характеристик, описывающих процесс диффузии излучения в ней.

Ключевые слова: *перенос излучения: неоднородные атмосферы: функция отражения: уравнения с начальными условиями*

1. *Введение.* Трудности, связанные с решением прикладных астрофизических задач при определении поля излучения в рассеивающих и поглощающих атмосферах, хорошо известны. Вследствие многократного рассеяния поле излучения в любой точке такой среды оказывается связанным с состоянием указанного поля во всех других ее частях. Обычно физические задачи данного типа формулируются как задачи с условиями, заданными на границах среды. Такой подход, уходящий своими корнями к первым работам основателей теории переноса и ставший классическим, обладает двумя характерными особенностями: во-первых, получаемое численное решение относится обычно к одной конкретной, наперед заданной задаче, и, во-вторых, наблюдаемые характеристики излучаемого объема находятся лишь в результате определения поля излучения внутри всей среды. В развитии аналитических методов решения важную роль играет то обстоятельство, что приходится иметь дело с линейными уравнениями, которым удовлетворяют функции источников. Особенно большой прогресс в линейной теории был достигнут в случаях, когда атмосферу можно считать бесконечной или полубесконечной. Вместе с тем, если она обладает конечной оптической толщиной, или является неоднородной, то речь в этих случаях в основном идет о разработке эффективных численных методов решения.

В некотором смысле поворотным пунктом в развитии теории переноса можно считать предложенный Амбарцумяном принцип инвариантности,

позволяющий определить наблюдаемые интенсивности без знания поля излучения внутри всей среды [1-4]. Не останавливаясь на физических предпосылках о возможности применения такого принципа, отметим, что здесь впервые приходится иметь дело с коэффициентом (или функцией) отражения, которая определяется из *отдельного* (но нелинейного) уравнения, что, на наш взгляд, весьма существенно. С появлением метода сложения слоев [5,2,6] и основанного на нем подхода, называемого инвариантным погружением (см., например, [7,8]), роль этой функции в решении задач теории переноса излучения значительно возрастает, что связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, вопрос о нахождении отражательной способности атмосферы конечной толщины сводится к легко разрешимой задаче с начальными условиями. При этом нет принципиальной разницы, является ли среда однородной, или нет. Важно также, что получаемое численное решение относится к семейству атмосфер с различными оптическими толщинами. Во-вторых, знание функции отражения существенно облегчает решение целого ряда задач, важных с точки зрения астрофизических применений.

2. Неоднородная среда конечной оптической толщины. В качестве примера, начнем с простейшей скалярной задачи переноса в одномерной конечной среде (т.е. без учета перераспределения излучения по частотам), в которой знание коэффициента отражения является достаточным для определения всех основных представляющих интерес физических величин, явные выражения которых вытекают из результатов работ [9-11]. Для иллюстрации приведем здесь некоторые из них, относящиеся к коэффициенту пропускания $q(\tau_0)$ неоднородной среды конечной толщины τ_0 , вероятности выхода кванта из глубины τ через границу $\tau_0 - p(\tau, \tau_0)$ и средним числом рассеяния отраженных и пропущенных квантов $N_p(\tau_0)$, $N_q(\tau_0)$ при освещении со стороны границы τ_0 :

$$q(\tau_0) = \exp\left(-\int_0^{\tau_0} A(t) dt\right), \quad p(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda(\tau)}{2} [1 + \rho(\tau)] \frac{q(\tau_0)}{q(\tau)}, \quad (1)$$

$$N_p(\tau_0) = \frac{q^2(\tau_0)}{2\rho(\tau_0)} \int_0^{\tau_0} \lambda(t) [1 + \rho^2(t)] \frac{dt}{q^2(t)}, \quad N_q(\tau_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} \lambda(t) \{1 + \rho(t) [1 + N_p(t)]\} dt,$$

где $A(\tau_0) = 1 - \frac{\lambda(\tau_0)}{2} [1 + \rho(\tau_0)]$ и λ - вероятность переизлучения кванта при элементарном акте рассеяния. Более простой формулой задается среднее число рассеяний $\langle N(\tau_0) \rangle$, относящееся ко всем квантам независимо от того, выходят они из среды, или гибнут в ней

$$\langle N(\tau_0) \rangle = q(\tau_0) \int_0^{\tau_0} [1 + \rho(t)] \frac{dt}{q(t)}. \quad (2)$$

В рассмотренном случае принимается, что неоднородность атмосферы

обусловлена изменением величины λ с глубиной. Можно привести целый ряд других простых формул для различных физических величин, описывающих процесс диффузии излучения в среде при освещении каждой из ее границ. Очевидно, что все эти формулы легко могут быть обобщены на более общий случай одномерной неоднородной атмосферы, если допустить, что рассеяние происходит в разные стороны с неодинаковой вероятностью, причем степень такой анизотропии может меняться с глубиной. Это относится и к распределению первичных источников энергии, если таковые содержатся в среде. Несложность получения значений необходимых физических величин в одномерном приближении может служить хорошим подспорьем при предварительном рассмотрении задач об образовании спектральных линий в более общих и реалистичных моделях.

Рассмотрим вновь одномерную задачу, однако в случае, когда приходится учитывать частотную зависимость поля излучения. Для простоты, рассмотрим неоднородную атмосферу оптической толщины τ_0 , рассчитанной в центре спектральной линии. Предположим при этом, что рассеяние излучения в ней происходит с полным перераспределением по частотам. Пусть на границу $\tau = \tau_0$ такой среды падает квант безразмерной частоты x , измеряемой расстоянием от центра спектральной линии в единицах доплеровской полуширины. В этом случае вероятность отражения от такой среды кванта в интервале частот $(x', x' + dx')$ задается функцией ρ , определяемой из следующего уравнения

$$\frac{d\rho}{d\tau_0} = -[\gamma(x) + \gamma(x')] \rho(x', x, \tau_0) + \frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2} \varphi(x, \tau_0) \varphi(x', \tau_0), \quad (3)$$

где

$$\varphi(x, \tau_0) = \alpha(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x', \tau_0) \alpha(x') dx' \quad (4)$$

- функция Амбарцумяна, $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta$, $\alpha(x)$ - коэффициент поглощения в частотах спектральной линии, β - отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии, $\tilde{\lambda}(\tau_0) = A\lambda(\tau_0)$ и A - нормировочный множитель коэффициента поглощения. В качестве начального условия имеем $\rho(x', x, 0) = 0$. Здесь для простоты, как и выше, предположим, что неоднородность атмосферы обусловлена изменением с глубиной коэффициента рассеяния, хотя приводимые рассуждения во многом остаются в силе, когда с глубиной меняются и другие характеристики элементарного акта рассеяния ($\alpha(x)$, β , закон перераспределения излучения по частотам и т.д.).

Как и в скалярном случае, знание одной лишь функции отражения позволяет определить целый ряд других важных величин, характеризующих процесс диффузии излучения в неоднородной рассеивающей и поглощающей

атмосфере. Среди них особое место занимает функция U , знание которой, как было показано нами в работах [9,11,12], позволяет определить поле излучения внутри среды. Физический смысл данной функции заключается в следующем: величина $U(x', \tau; x, \tau_0) dx'$ представляет собой вероятность пролета на глубине τ в сторону границы $\tau=0$ кванта с частотой, заключенной в интервале $(x', x'+dx')$. Диффузную составляющую этой величины обозначим через u , так что

$$U(x', \tau; x, \tau_0) = \delta(x-x') \exp[-\gamma(x)(\tau_0 - \tau)] + u(x', \tau; x, \tau_0). \quad (5)$$

Подход инвариантного погружения приводит к следующему уравнению для функции u

$$\frac{du}{d\tau_0} = -\gamma(x)u(x', \tau; x, \tau_0) + \frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2} \phi(x, \tau_0) \Psi(x', \tau, \tau_0), \quad (6)$$

где

$$\Psi(x', \tau, \tau_0) = \exp[-\gamma(x)(\tau_0 - \tau)] + \int_{-\infty}^{\infty} u(x', \tau; x'', \tau_0) \alpha(x'') dx''. \quad (7)$$

Уравнение (6) удовлетворяет начальному условию $u(x', \tau; x, \tau) = 0$. В согласии с физическим смыслом функции U , величина $u(x', 0; x, \tau_0)$ представляет собой не что иное, как коэффициент пропускания конечной атмосферы. Здесь следует обратить внимание на тот факт, что уравнение (6) приходится решать для каждого значения оптической глубины, но для семейства атмосфер разных оптических толщин. Если при этом постановка рассматриваемой физической задачи такова, что представляет интерес атмосфера определенной оптической толщины, то знание функции отражения позволяет обратиться к обычному уравнению переноса при заданном начальном условии.

В работах [11,12] было показано, что знание функции ρ , а следовательно, и U позволяет легко определить все величины, описывающие поле излучения в неоднородной атмосфере как при наличии, так и при отсутствии первичных источников в ней. Здесь приведем лишь некоторые из этих результатов. Так, например, интенсивность излучения на глубине τ в направлении границы τ_0 задается величиной V , определяемой по формуле

$$V(x', \tau; x, \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', x'', \tau) U(x'', \tau; x, \tau_0) dx''. \quad (8)$$

Для функции отражения от границы $\tau=0$, $\bar{\rho}$, имеем

$$\bar{\rho}(x', x, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} \psi(x', t) \psi(x, t) dt, \quad (9)$$

где $\psi(x, t) = \Psi(x, 0, t)$.

Учитывая принцип обратимости оптических явлений, нетрудно понять,

что функциями U и V задаются интенсивности излучения, выходящего из атмосферы, содержащей источники энергии. Так, при внутренних источниках мощности $B(\tau, x)$ для интенсивности $I_1(x, \tau_0)$ излучения, выходящего через границу $\tau = \tau_0$ среды имеем

$$I_1(x, \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\tau_0} B(\tau, x') W(x', \tau, x, \tau_0) d\tau, \quad (10)$$

где $W = U + V$. Аналогичным образом нетрудно найти интенсивность излучения, наблюдаемого с обратной стороны. После определения функции $I_1(x, \tau_0)$ нетрудно найти поле излучения внутри самой среды. Обозначая через $I^-(x, \tau, \tau_0)$, $I^+(x, \tau, \tau_0)$ интенсивности излучения на глубине τ в направлении грани соответственно $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, нетрудно получить

$$I^-(x, \tau, \tau_0) = \int_{\tau}^{\tau_0} dt \left[B(t, x) \Psi(x, \tau, t) + \frac{\lambda(t)}{2} \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') U(x, \tau; x', t) I_1(x', t) dx' \right], \quad (11)$$

$$I^+(x, \tau, \tau_0) = I_1(x, \tau) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x', \tau) I^-(x', \tau, \tau_0) dx'. \quad (12)$$

Таким образом, рассмотренные две наиболее часто встречающиеся в астрофизике задачи переноса излучения легко поддаются решению, если предварительно определена функция отражения.

3. *Статистическое описание поля излучения.* Хорошо известно, что при решении различных астрофизических задач, связанных с интерпретацией линейчатых спектров, приходится иметь дело с статистическими средними величинами, описывающими процесс диффузии излучения в поглощающей и рассеивающей атмосфере. Среди них важное место отводится среднему числу рассеяний и среднему времени, проводимому квантом в процессе блуждания в среде. В различных работах даются разные определения указанным величинам, позволяющие, однако, получить грубое в той или иной степени представление о них. Из множества таких работ мы здесь отметим лишь некоторые из них, которые имеют прямое отношение к данному обсуждению [13-17].

Весьма важные результаты, с точки зрения данной работы, были получены в [18]. Как оказалось, упомянутые нами средние статистические величины, относящиеся ко всем квантам независимо от того, покидают ли они среду в результате многократного рассеяния или гибнут в ней, целиком выражаются через функцию отражения. Здесь мы приведем лишь окончательные уравнения в применении к рассматриваемому простому случаю одномерной среды. Для среднего числа рассеяний $\langle N \rangle$ имеем

$$\frac{d\langle N \rangle}{d\tau_0} = -\gamma(x) \langle N(x, \tau_0) \rangle + \left[\frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2} \Phi(\tau_0) + 1 \right] \Phi(x, \tau_0) + \beta [1 + \tilde{\rho}(x, \tau_0)], \quad (13)$$

где

$$\Phi(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \langle N(x, \tau_0) \rangle dx. \quad (14)$$

Интегрально-дифференциальное уравнение (13) решается при начальном условии $\langle N(x, \xi, 0) \rangle = 0$. Функцию $\Phi(\tau_0)$ можно определить из самого уравнения (13), из которого следует

$$\Phi(\tau_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} \lambda(\tau) L(\tau_0 - \tau) \Phi(\tau) d\tau + G(\tau_0), \quad (15)$$

где ядро уравнения

$$L(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \phi(x, \tau) \exp[-\gamma(x)\tau] dx, \quad (16)$$

хорошо известно в теории переноса излучения. Далее

$$G(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} L(\tau) d\tau + \beta F(\tau_0), \quad (17)$$

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) [1 + \bar{\rho}(x, \tau)] \exp[-\gamma(x)\tau] dx, \quad (18)$$

$$\bar{\rho}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \rho(x', x, \tau_0) dx'. \quad (19)$$

Аналогичным образом определяется среднее время $\langle \Omega \rangle$, затрачиваемое квантом на блуждание в рассеивающей атмосфере прежде, чем покинуть ее или термализоваться. Считается, что при диффузии квант тратит время лишь на путь между двумя последовательными актами рассеяния. По аналогии с (13), в [18] получено

$$\frac{d\langle \Omega \rangle}{d\tau_0} = -\gamma(x) \langle \Omega(x, \tau_0) \rangle + \frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2} \Psi(\tau_0) \phi(x, \tau_0) + 1 + \bar{\rho}(x, \tau_0), \quad (20)$$

в котором функция

$$\Psi(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \langle \Omega(x, \tau_0) \rangle dx \quad (21)$$

удовлетворяет уравнению (15) при свободном члене $G(\tau_0) = \beta F(\tau_0)$. В качестве начального условия имеем $\langle \Omega(x, \xi, 0) \rangle = 0$.

4. Заключительные замечания. Приведенные в работе результаты трех наиболее часто встречающихся в астрофизических приложениях задач наглядно демонстрируют, с одной стороны, преимущества используемого подхода инвариантного погружения и, с другой - важность той роли, которую играет коэффициент отражения при таком подходе. Как мы

убедились, данный подход позволяет свести вопрос о нахождении той или иной представляющей интерес физической величины к удобным для численной реализации задачам с начальными условиями. Важно также отметить, что получаемое в результате решение относится к семейству задач, относящихся к атмосферам с различными оптическими толщинами. Сам подход основан на ясных физических соображениях, прост в использовании и универсален, позволяя изучить эффект неоднородностей различного рода.

В каждой из рассмотренных задач, как мы видели, вначале определяется функция отражения, которая удовлетворяет отдельному нелинейному уравнению. Дальнейшие рассуждения показывают, что знание одной этой функции является достаточным для определения практически всех остальных физических величин, представляющих интерес для исследования процесса многократного рассеяния в поглощающей и рассеивающей атмосфере. Большая часть этих величин определяется явным образом путем вычисления обычных интегралов. И только в случае вычисления поля излучения внутри среды, а также статистических средних величин, приходится, вообще говоря, решать новые задачи с начальными условиями. Говоря о роли функции отражения, уместно провести параллель с функцией источников, которая также удовлетворяет отдельному уравнению и играет важную роль в классической теории переноса. Однако последняя вводится в результате рассмотрения сравнительно трудно разрешаемой задачи с граничными условиями и относится к среде фиксированной оптической толщины. Функция источников также несет в себе богатую информацию о физической картине переноса излучения, позволяя определить ряд других величин, характеризующих изучаемый процесс. Однако в отличие от функции отражения она не является наблюдаемой и непосредственно измеряемой величиной. Результаты работы можно считать обобщением идеи, лежащей в основе принципа инвариантности, в той ее части, что в обоих случаях наблюдаемые интенсивности используются для нахождения поля излучения внутри среды. В нашем случае это делается для конечной неоднородной атмосферы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна,
Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

ON THE ROLE OF THE REFLECTION FUNCTION IN DESCRIBING THE RADIATION DIFFUSION IN A PLANE-PARALLEL INHOMOGENEOUS ATMOSPHERE

A.G.NIKOGHOSSIAN

The paper analyzes the previous results obtained by the author in treating the problems of the radiative transfer in an inhomogeneous atmosphere. The advantages of the approach based on the invariant imbedding idea are exemplified in three problems frequently encountered in astrophysics. Special attention is paid to the important role which the reflection function plays in determining the field of radiation in the medium and a number of characteristics of the diffusion process in it.

Key words: *radiative transfer: inhomogeneous atmospheres: reflection function: initial-value problems*

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Амбарцумян, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
2. В.А.Амбарцумян, Научные труды, т.1, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1960.
3. В.А.Амбарцумян, Тр. симпоз. "Принцип инвариантности и его приложения", Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1980.
4. V.A.Ambartsumian, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 18, 1, 1980.
5. В.А.Амбарцумян, Изв. АН Арм. ССР, 1-2 1944.
6. В.В.Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
7. R.Bellman, R.Kalaba, M.Wing, J. Math. Phys., 1, 280, 1960.
8. R.Bellman, R.Kalaba, M.Prestrud, Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness, American Elsevier, New York, 1963.
9. A.G.Nikoghossian, Astron. Astrophys., 422, 1059, 2004.
10. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 47, 289, 2004.
11. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 55, 293, 2012.
12. A.G.Nikoghossian, Light Scat. Reviews, 8, 377, 2013.
13. В.В.Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, М., Наука, 1969.
14. W.M.Irvine, Astrophys. J., 144, 1140, 1966.
15. В.В.Иванов, Астрофизика, 6, 643, 1970.
16. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 21, 323, 1984.
17. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 24, 149, 1986.
18. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 56, 143, 2013.