

## МАГНИТОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В КОРЕ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

Д.М.СЕДРАКЯН, А.С.АРУТЮНЯН, М.В.АЙРАПЕТЯН

Поступила 15 февраля 2013

В данной работе с использованием магнитогидродинамических уравнений, показано, что энерговыделение на внутренней поверхности коры нейтронной звезды приводит к генерации магнитозвуковых волновых пучков, распространяющихся к поверхности звезды. Показано, что для частот  $10^7 \text{ Гц} \leq \omega \leq 10^{11} \text{ Гц}$  и для условий вещества в коре нейтронной звезды эти уравнения линеаризуются, и найдено их решение. Показано, что в коре образуется стоячий волновой пучок с постоянным радиусом, внешнее основание которого на поверхности звезды является источником излучения радиоволн. В этом источнике возбуждаются электрические токи и источник становится антенной, излучающей радиоволны в околозвездное пространство. Показано, что с увеличением частоты интенсивность радиоизлучения уменьшается, и, следовательно, спектр пульсаров сверху ограничен ( $\omega \leq 10^{11} \text{ Гц}$ ).

Ключевые слова: *нейтронные звезды; магнитозвуковые волны*

1. *Введение.* В работе [1] выведены уравнения магнитной гидродинамики и обоснована возможность их применения для изучения распространения магнитозвуковых волн в коре нейтронной звезды. При этом выводе в основном были использованы результаты работ [2,3], в которых были получены эти уравнения для магнитоактивной плазмы с учетом разных диссипативных процессов.

В данной статье мы будем использовать уравнения магнитогидродинамики для получения закономерностей распространения волновых пучков в магнитоактивной плазме коры нейтронной звезды. В работах [4,5] показано, что ограниченная область на поверхности ядра и коры нейтронной звезды является местом энерговыделения. Поперечный размер этой области в виде круга имеет радиус порядка  $3 \cdot 10^4$  см. Выделенная в этой области энергия возбуждает магнитозвуковую волну, которая распространяется к поверхности звезды в виде цилиндрического пучка. Радиус пучка в общем случае может меняться при приближении волны к поверхности звезды. Доходя до поверхности звезды, волновой пучок отражается, и следовательно, по ширине коры нейтронной звезды образуется поперечно ограниченная стоячая магнитозвуковая волна. Согласно предложенной нами модели энерговыделения пульсара [5], областью излучения радиоволн пульсара является основание стоячей волны на поверхности звезды. Нам необходимо

в дальнейшем определить распределение плотности электрических токов, возбужденных стоячей волной, которые и являются источником радиоизлучения пульсара. Область их распределения и есть источник радиоизлучения пульсара на поверхности звезды. Поперечные размеры источника радиоволн определяются решением эволюционного уравнения, полученного нами ниже (см. разд. 2). Решение эволюционного уравнения позволит нам узнать, являются ли поперечные размеры радиоисточника больше или меньше поперечных размеров области энерговыделения. Как мы увидим ниже, для коры нейтронной звезды эти размеры почти не меняются.

В этой статье также оценивается интенсивность электромагнитного излучения из области радиоизлучения, имеющая форму круга с радиусом, равным радиусу основания пучка магнитозвуковой волны и толщиной порядка длины волны излучения. Имея полную интенсивность радиоизлучения пульсара, и сравнивая с наблюдаемым излучением, можно определить начальную амплитуду магнитозвуковых волн, возбужденных на границе ядра и коры нейтронной звезды.

Следующий раздел статьи (разд. 2) посвящен решению уравнения для волнового пучка с учетом диссипативных процессов. Для получения полного решения, используются результаты решения эволюционного уравнения, которое приводится в *Приложении I*. Как увидим ниже, полученные решения для плотности распределения электрических токов в области радиоизлучения, находящейся на поверхности звезды, довольно громоздки. Однако, оказывается, что в рамках необходимых приближений появляется возможность упростить вид этого решения. Для этого, используя результаты *Приложения I*, в *Приложении II* приводятся оценки отдельных слагаемых полученного решения и находится слагаемое, дающее основной вклад. В разд. 3 приводятся расчеты, оценивающие начальную амплитуду магнитозвукового волнового пучка. Наконец, в заключении (разд. 4) приводятся основные результаты данной работы и перспективы построения окончательной модели источника радиоизлучения пульсаров.

2. *Волновой пучок в коре нейтронной звезды.* Следуя работам [2,3], рассмотрим распространение магнитозвуковых волн в плазме коры нейтронной звезды конечной ширины  $l$ . Предположим, магнитное поле в коре направлено по оси  $y$ , а ось  $x$  направлена по радиусу от поверхности к центру звезды. Поперечная ось  $z$  направлена перпендикулярно плоскости  $(x, y)$  и составляет с ее осями правую систему. Меняющиеся со временем: магнитная индукция, плотность вещества и давление представим в следующем виде:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad (1)$$

где  $\vec{H}_0$ ,  $\rho_0$  и  $p_0$  - равновесные значения данных величин, а  $\vec{h}$ ,  $\rho'$  и  $p'$  есть их возбуждения. Предполагается, что возбуждение магнитного поля  $\vec{h}$  также направлено по оси  $y$ .

В работах [6,7] показано, что решение уравнений магнитогидродинамики, написанные для возбуждений, представляют собой квазимонохроматические волны, причем каждое возбуждение можно представить в виде суммы двух волновых пучков, движущихся друг против друга. Если как неизвестную функцию выбрать скорость движения вещества  $V_x = u$ , то получим

$$u(x, y, z, t) = u_1(\tau_1, \tau'_1, y, z) + u_2(\tau_2, \tau'_2, y, z), \quad (2)$$

где величины

$$\tau_{1,2} = \int_{\pm x}^l \frac{dx}{c_n(x)} - t = \tau'_{1,2} - t$$

есть эйконы волн, движущихся направо и налево, а  $c_n(x)$  - скорость распространения волны, которая определяется формулой

$$c_n^2 = c_s^2 + c_A^2, \quad c_A^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}. \quad (3)$$

Здесь  $c_s$  - скорость звуковой волны, а  $c_A$  - скорость альфвеновских волн. Отметим также, что в действительности  $x$  меняется в интервале  $[0, l]$ , однако физические величины формально определяются и в интервале  $[-l, 0]$ , продолжая их четным образом, т.е. по следующему правилу

$$\rho(-x) = \rho(x), \quad c_n(-x) = c_n(x).$$

В других областях оси  $x$  искомые величины продолжают с периодом равным  $2l$  [7].

Плотность вещества в коре нейтронной звезды сильно неоднородна, т.е. функция  $\rho(x)$  меняется в области  $x \in [0, l]$ , однако, как показано в работе [8], скорость магнитозвуковой волны  $c_n(x)$  в коре нейтронной звезды почти постоянна (отношение наибольшего и наименьшего значений  $c_n(x)$  составляет всего один порядок). Учитывая это, для эйконов можно использовать выражения:

$$\tau'_{1,2} = \frac{l \mp x}{c_n}, \quad \tau_{1,2} = \tau'_{1,2} - t. \quad (4)$$

В работах [6,9] показано, что для искомым функций  $u_{1,2}$  уравнения разделяются и каждое из них можно найти из решения следующих уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau'_{1,2} \partial \tau_{1,2}} - \frac{1}{2} \hat{L} u_{1,2} - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}} \frac{d \ln \Phi_{1,2}}{d \tau'_{1,2}} = - \frac{1}{c_n} \frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}} \left( \Gamma u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}} + D \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^2} \right), \quad (5)$$

которые называются эволюционными уравнениями. Здесь коэффициент  $\Gamma$  появляется из-за нелинейных эффектов, а  $D$  - коэффициент диссипации. Эти коэффициенты определяются следующими формулами:

$$\Gamma = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{c_s^2}{c_n^2} + \frac{3}{2} \frac{c_A^2}{c_n^2},$$

$$D = -\frac{1}{2c_n} \left\{ \frac{1}{\rho} \left( \xi + \frac{4}{3} \eta \right) + \frac{c_A^2}{c_n^2} v_m + \frac{(\gamma-1)^2 \kappa T}{\rho c_n^2} \right\}, \quad (6)$$

где  $\gamma$  - показатель адиабаты среды,  $\eta$  и  $\xi$  - коэффициенты первой и второй вязкости,  $\kappa$  - теплопроводность,  $v_m = c^2/4\pi\sigma_0$ ,  $\sigma_0$  - электропроводность среды. Возбуждения искомым физическим величин связаны с  $V_x$  следующими соотношениями:

$$V_y = V_z = 0, \quad h_x = h_z = 0, \quad h_y = \mp \frac{H_0}{c_n} V_x, \quad p' = \mp \frac{p_0}{c_n} V_x, \quad p' = c_s^2 p', \quad (7)$$

где верхние знаки соответствуют волнам, распространяющимся направо, а нижние знаки - к волнам, идущим налево.  $\hat{L}$  - есть поперечный оператор и определяется следующим образом:

$$\hat{L} = -c_n^2 \left[ \left( 1 - \frac{c_A^2 c_z^2}{c_n^4} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right].$$

Как показано в работе [8], в основной части коры нейтронной звезды  $c_A^2 c_z^2 / c_n^4 \ll 1$ , и следовательно, оператор  $\hat{L}$  принимает осесимметричную форму относительно переменных  $y$  и  $z$  и имеет вид:

$$\hat{L} = -c_n^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -c_n^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (8)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  есть цилиндрическая координата. Здесь предполагается, что волна осесимметрична, и следовательно, отсутствует производная  $(1/r^2) (\partial^2 / \partial \psi^2)$  по азимутальному углу  $\psi$ .

Функция  $\Phi_{1,2}$ , входящая в эволюционное уравнение, связана с неоднородностью среды и представляет собой одномерное лучевое решение в направлении, перпендикулярном к фронту волны. Это решение определяется из закона сохранения энергии, согласно которому поток энергии одномерной волны постоянен на плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны, т.е.

$$\rho V_x^2 c_n = \text{const} = \rho(0) V_x^2(0) c_n(0),$$

откуда

$$\Phi_{1,2}^2 = \left( \frac{V_x(\tau'_{1,2})}{V_x(0)} \right)^2 = \frac{\rho(0) c_n(0)}{\rho(\tau'_{1,2}) c_n(\tau'_{1,2})} \approx \frac{\rho(0)}{\rho(\tau'_{1,2})}. \quad (9)$$

Здесь аргументы функций  $\rho(x)$  и  $c_n(x)$  заменены на  $\tau'_{1,2}$ , которые, согласно формулам (2), зависят от  $x$ .

Чтобы не усложнять вид уравнений, в дальнейшем опустим индексы 1 и 2 и вместо величин  $\tau_{1,2}$ ,  $\tau'_{1,2}$ ,  $u_{1,2}$  и  $\Phi_{1,2}$  напомним величины  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $u$  и  $\Phi$ . Тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau' \partial \tau} + \frac{c_n^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d \ln \Phi}{d \tau'} = - \frac{1}{c_n} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right). \quad (10)$$

Как видно, уравнение (10) довольно сложное дифференциальное уравнение с частными производными с тремя переменными, имеющее нелинейный член. Последний приводит к расширению или сужению поперечных размеров волновых пучков, являющихся решением этого уравнения. Кроме этого, благодаря этому члену и конечности размеров коры нейтронной звезды, из монохроматической волны, возбужденной в среде, могут возбуждаться волны с более высокими гармониками. Это означает, что решение уравнения (5) в общем случае нужно искать в виде следующего ряда:

$$u(\tau, \tau', r) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\tau', r) e^{in\omega\tau} + \text{к.с.}, \quad (11)$$

где  $v_n(\tau', r)$  - есть комплексные функции.

Как покажем ниже, при распространении волны в коре нейтронной звезды каждая следующая гармоника по интенсивности слабее предыдущей. Чтобы доказать это, оставим в решении (11) первые два члена и покажем, что второй член гораздо меньше первого. Для этого напишем решение (11) в следующем виде:

$$u = \frac{1}{2} (v_1 e^{i\omega\tau} + v_2 e^{2i\omega\tau}) + \text{к.с.} \quad (12)$$

Подставляя это решение в уравнение (5) и приравнявая коэффициенты первых и вторых гармоник, получаем два уравнения для определения функций  $v_1$  и  $v_2$ :

$$i\omega \frac{\partial v_1}{\partial \tau'} + \frac{c_n^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) - i\omega v_1 \frac{d \ln \Phi}{d \tau'} = \frac{\Gamma \omega^2}{2c_n} v_1 v_2 + i\omega v_1 \frac{\omega^2 D}{c_n}, \quad (13)$$

$$2i\omega \frac{\partial v_2}{\partial \tau'} + \frac{c_n^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} \right) - 2i\omega v_2 \frac{d \ln \Phi}{d \tau'} = \frac{\Gamma \omega^2}{2c_n} v_1^2 + v_2 \frac{8i\omega^3 D}{c_n}. \quad (14)$$

Решение уравнений (13) и (14) в общем случае представляет большую трудность. Однако при выполнении некоторых условий решение этих уравнений упрощается.

Предположим для среднего значения  $\tau'$  имеет место требование

$$\frac{\omega |v_1|}{\tau'} \gg \frac{\Gamma \omega^2}{c_n} |v_1 v_2|$$

или равносильное

$$|v_2| \ll \frac{c_n}{\tau' \Gamma \omega}. \quad (15)$$

При выполнении этого требования в уравнении (13) можно пренебречь нелинейным членом. С другой стороны, так как  $v_2$  есть возбуждение

второго порядка, естественно считать, что первый член в правой части уравнения (14) порядка первого члена левой части этого уравнения, т.е.

$$\frac{\omega |v_2|}{\tau'} \sim \frac{\Gamma \omega^2 |v_1^2|}{c_n}$$

или

$$\left| \frac{v_2}{v_1} \right| \sim \frac{\Gamma \omega \tau'}{c_n} |v_1|. \quad (16)$$

Учитывая (16), условие (15) запишем в виде  $|v_2/v_1| \ll |v_1/v_2|$  или  $|v_2| \ll |v_1|$ . Заменяя  $\tau'$  характерным значением  $l/c_n$ , вместо (15) и (16) получим:

$$\left| \frac{v_2}{v_1} \right| \sim \frac{\Gamma \omega l}{c_n^2} |v_1| \ll 1. \quad (17)$$

Если это условие выполняется, то уравнение (13) можно линеаризовать и в решении (12) пренебречь второй гармоникой. Как покажем ниже, условие (17) хорошо выполняется для коры нейтронной звезды, следовательно, в решении (11) вклады второй гармоники и более высоких гармоник также будут малы. Это означает, что в искомом решении останется только первый член, который определится из линеаризованного уравнения (13).

Для упрощения уравнения (13), введем вспомогательную функцию  $\tilde{\Phi}$ :

$$\frac{d \ln \tilde{\Phi}}{d \tau'} = \frac{d \ln \Phi}{d \tau'} + \frac{\omega^2 D}{c_n},$$

т.е.

$$\tilde{\Phi}(\tau') = \Phi(\tau') \exp\left(-\omega^2 \int_0^{\tau'} \mu(\tau) d\tau\right), \quad (18)$$

где

$$\mu(\tau) = -\frac{D}{c_n}. \quad (19)$$

Итак, уравнение (13) примет следующий окончательный вид:

$$i\omega \frac{\partial v_1}{\partial \tau'} + \frac{c_n^2}{2} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) - i\omega v_1 \frac{d \ln \tilde{\Phi}}{d \tau'} = 0.$$

Если ввести функцию  $U$  так, что  $v_1 = \tilde{\Phi} U$ , то тогда для определения  $U$  получим уравнение

$$i\omega \frac{\partial U}{\partial \tau'} + \frac{c_n^2}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0, \quad (20)$$

а решение для искомой функции примет вид:

$$u(\tau, \tau', r) = \frac{1}{2} \Phi U e^{i\omega \tau - \omega^2 \int_0^{\tau'} \mu d\tau} + \text{к.с.} \quad (21)$$

Таким образом, решение эволюционного уравнения сводится к решению

уравнения (20).

Решение уравнения (20) приведено в *Приложении I*. Подставляя найденное там решение (I.3) в формулу (21), получим:

$$u_{1,2} = \frac{\Phi(\tau'_{1,2})b_{1,2}}{2f(\tau'_{1,2})} \exp\left\{-\frac{r^2}{2r_0^2 f^2(\tau'_{1,2})} + i\left[\sigma(\tau'_{1,2}) + \frac{r^2}{2Q(\tau'_{1,2})}\right] + i\omega\tau_{1,2} - \omega^2 \int_0^{\tau'_{1,2}} \mu d\tau\right\} + \text{к.с.} \quad (22)$$

Здесь мы снова восстановили индексы функции  $u_{1,2}$  и других величин. Для коэффициента  $b$  мы также написали два индекса, и связь между  $b_1$  и  $b_2$  можно найти из условия на поверхности звезды, т.е. при  $x=0$ . Так как этот конец коры свободен, условие будет  $p' = 0$ , которое с учетом (7) даст:

$$p'|_{x=0} = \left(-\frac{\rho_0}{c_n} u_1 + \frac{\rho_0}{c_n} u_2\right)|_{x=0} = 0, \quad (23)$$

т.е.  $u_1(0) = u_2(0)$ . Если учесть также, что  $\tau'_{1,2}|_{x=0} = \tau'_2|_{x=0} = l/c_n$ , то получим  $b_1 = b_2 = b$ , а для модуля функции  $u$  имеем:

$$|u| = \frac{2\Phi(l/c_n)b}{f(l/c_n)} \exp\left\{-\frac{r^2}{2r_0^2 f^2(l/c_n)} - \omega^2 \int_0^l \frac{\mu}{c_n} dx\right\}. \quad (24)$$

Учитывая (7) и (22), для возбуждения магнитного поля на поверхности звезды получим:

$$h_y = \frac{H_0}{c_n} (u_2 - u_1)|_{x=0} = 0. \quad (25)$$

Это означает, что поверхность звезды является узлом для волны магнитного возмущения.

Теперь посчитаем плотность электрических токов, возбуждающихся возмущением магнитного поля. Так как  $\vec{j} = (c/4\pi)\text{rot}\vec{h}$ , а  $\vec{h}$  направлен по оси  $y$  и зависит только от  $x$ , то  $y$  компонента  $\vec{j}$  отлична от нуля только компонента  $j_z$ , которая равняется

$$j_z = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial h_y}{\partial x} = \frac{c}{4\pi} \frac{H_0}{c_n} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)|_{x=0}. \quad (26)$$

Учитывая (2) и (22), можно написать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} &= \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau'_{1,2}} \frac{\partial \tau'_{1,2}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau'_{1,2}} \frac{\partial \tau'_{1,2}}{\partial x} = \mp \frac{b}{2c_n f_{1,2}} \left\{ i\omega\Phi_{1,2} + \Phi'_{1,2} - \frac{\Phi_{1,2} f'_{1,2}}{f_{1,2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Phi_{1,2} f'_{1,2}}{r_0^2 f_{1,2}^3} r^2 + i\Phi_{1,2} \sigma'_{1,2} - \frac{i\Phi_{1,2} Q'_{1,2}}{2Q_{1,2}^2} r^2 - \Phi_{1,2} \mu \omega^2 \right\} \times \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{r^2}{2r_0^2 f_{1,2}^2} + i\left[\sigma_{1,2} + \frac{r^2}{2Q_{1,2}}\right] + i\omega\tau_{1,2} - \omega^2 \int_0^{\tau'} \mu d\tau\right\} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (27)$$

Как показано в *Приложении II*, из слагаемых, входящих в фигурную скобку в (27), основной вклад дает первое слагаемое, следовательно, вместо (27) можно написать

$$\frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mp \frac{i\omega b \Phi(l/c_n)}{2c_n f(l/c_n)} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2r_0^2 f^2(l/c_n)} + i\omega \left( \frac{1}{c_n} - t \right) \right\} - \omega^2 \int_0^l \frac{\mu}{c_n} dx + i \left( \sigma(l/c_n) + \frac{r^2}{2Q(l/c_n)} \right) \Big\} + \text{к.с.} \quad (28)$$

Для плотности тока на поверхности звезды имеем:

$$j_z(r, t) = \frac{cH_0}{4\pi} \frac{i\omega b \Phi(l/c_n)}{c_n f(l/c_n)} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2r_0^2 f^2(l/c_n)} + i\omega \left( \frac{1}{c_n} - t \right) \right\} - \omega^2 \int_0^l \frac{\mu}{c_n} dx + i \left( \sigma(l/c_n) + \frac{r^2}{2Q(l/c_n)} \right) \Big\} + \text{к.с.}, \quad (29)$$

и, наконец, для модуля плотности тока имеем:

$$|j_z| = \frac{c}{4\pi} \frac{\omega H_0}{c_n^2} |u|, \quad (30)$$

где  $|u|$  определяется формулой (24).

Как видно из решений для  $|u|$  и  $|j_z|$ , эти величины зависят от амплитуды возмущения скорости вещества  $b$ , следовательно, от возмущения магнитного поля на границе ядра и коры нейтронной звезды.

### 3. Оценка величины $b$ из наблюдений радиоизлучения пульсаров.

Как видно из формул (24) и (29), плотность электрических токов, возбужденных на поверхности звезды, пропорциональна величине  $b$ , которая есть амплитуда возбуждения скорости движения плазмы на внутренней границе коры. Эту величину можно оценить, используя наблюдаемое значение полной интенсивности радиоизлучения пульсаров. Так как поперечные размеры волнового пучка в коре не меняются ( $f \approx 1$ ), поперечные размеры области, где возбуждаются токи, также порядка  $r_0$ . Эта область становится источником радиоизлучения пульсара. Предположим, что этот источник представляет собой диск радиусом  $r_0$  и толщиной  $\lambda$ , где  $\lambda$  - длина излучаемой волны. Как известно, объем порядка  $\lambda^3$  будет излучать когерентно. Интенсивность радиоизлучения этого объема определится из формулы дипольного излучения:

$$I_1 = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2, \quad (31)$$

где  $\vec{d} = \sum_k e_k \vec{r}_k$  - дипольный момент этого объема. Здесь  $e_k$  и  $\vec{r}_k$  - заряд и радиус-вектор координаты  $k$ -й частицы, а сумма берется по частицам, находящимся в этом объеме. Следовательно,

$$\ddot{\vec{d}} = \sum_k e_k \ddot{\vec{V}}_k \approx \lambda^3 \sum_a e_a n_a \ddot{\vec{V}}_a = \ddot{j} \lambda^3, \quad (32)$$

где индекс  $a$  относится к типу частиц: электронам и ионам, а  $\bar{j}$  - средняя плотность тока в объеме  $\lambda^3$ . Дифференцируя выражение (32) по времени, окончательно получим  $\ddot{\vec{d}} = \ddot{j} \lambda^3$ . Подставляя выражение для  $\ddot{\vec{d}}$  в формулу (31), получим:

$$I_1 = \frac{2\lambda^6}{3c^3} |\ddot{j}|^2. \quad (33)$$

Число когерентно излучающих объемов в рассматриваемом нами источнике (диск) излучения будет  $N \sim (r_0/\lambda)^2$  (заметим, что  $(r_0/\lambda) \sim (r_0 \omega/c) > 1$ ). Полная интенсивность излучения складывается из когерентно излучающих объемов, следовательно, она равняется:

$$I = I_1 N = \frac{2}{3c^3} |\ddot{j}|^2 \lambda^4 r_0^2. \quad (34)$$

Здесь  $|\ddot{j}|$  определяется из формулы (30):

$$|\ddot{j}| = \frac{c}{4\pi} \frac{\omega^2 H_0}{c_n^2} |u(l/c_n)|,$$

следовательно,

$$I = \frac{2\pi^2 c}{3} \left( \frac{c H_0 r_0}{c_n^2} \right)^2 |u(l/c_n)|^2, \quad (35)$$

где мы учли, что  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . Из формулы (35) мы можем оценить  $|u|$  на поверхности звезды, если принять, что наблюдаемая полная интенсивность радиоизлучения пульсара порядка  $I \sim 10^{30}$  эрг/с. Оценка дает следующий результат:

$$|u(l/c_n)| \sim b \Phi(l/c_n) \sim 10^{-8} c_n, \quad (36)$$

Используя этот результат, определим область частот, для которых выполняется условие (17), необходимое для линеаризации рассмотренной задачи:

$$\omega \ll \frac{c_n^2}{\Gamma |u|}. \quad (37)$$

Так как  $\Gamma \sim 1$ , то согласно (36), условие (37) примет вид  $\omega \ll 10^{12}$  Гц. Это означает, что в диапазоне частот радиоизлучения пульсаров  $10^7$  Гц  $\leq \omega \leq 10^{11}$  Гц это условие хорошо выполняется. Так как функция  $|u| = b\Phi$  на поверхности звезды ( $x=0$ ) имеет максимальное значение, то условие (37) будет также выполняться в коре нейтронной звезды, где распространяется волновой пучок.

4. *Заключение.* Как показано в работе [5], на поверхности ядра и коры звезды появляется ограниченная область, где в основном происходит

энерговыведение из-за "схлопывания" магнитных вихревых нитей. Это магнитное пятно возбуждает магнитозвуковые волны в коре нейтронной звезды. Здесь, используя магнитогидродинамические уравнения, полученные в работе [1], показано, что это энерговыведение приводит к генерации магнитозвуковых волновых пучков, распространяющихся к поверхности звезды. Показано, что для частот  $10^7 \text{ Гц} \leq \omega \leq 10^{11} \text{ Гц}$  в радиодиапазоне и для условий вещества в коре нейтронной звезды, эти волновые пучки линейные. Найденное решение учитывает также диссипацию волновых пучков. Отметим также, что радиус поперечного сечения волнового пучка при его распространении в коре не меняется.

Отраженный от поверхности звезды волновой пучок образует стоячую волну в коре звезды, а на ее поверхности образуется дискообразная область, где появляются электрические токи, возбужденные магнитозвуковой волной. Показано, что эти токи превратят ограниченную область поверхности звезды в антенну, излучающую радиоволны в околозвездное пространство. Из наблюдательного значения полной интенсивности радиоизлучения пульсара оценена начальная амплитуда возбуждения магнитозвуковой волны. Найденное значение показывает, что наше рассмотрение находится в рамках линейного решения эволюционного уравнения.

Как видно из решения, волновые пучки при рассмотрении в коре звезды диссипируются. С увеличением частоты волны диссипация волн увеличивается. Это означает, что высокие частоты не могут дойти до поверхности звезды, следовательно, и не могут излучаться в виде радиоволн. В дальнейшем необходимо, используя найденное здесь решение, исследовать диссипацию волн в зависимости от их частоты. Оценки показывают [8], что волны с  $\omega \geq 10^{11} \text{ Гц}$  не дойдут до поверхности звезды, однако требуется более обоснованный расчет, результаты которого будут опубликоваться в следующих статьях.

### Приложение I

Для решения уравнения (20) необходимо знать граничное условие на границе ядра и коры нейтронной звезды. Эта граница имеет форму сферы с радиусом  $R_0$ , который совпадает с радиусом ядра звезды. На рис. 1 представлен поперечный профиль волнового пучка с радиусом фронта  $R$  и имеющий форму круга с радиусом  $r_0 f$ . На рис. 1 пунктиром обозначен плоский фронт (плоскость  $x = \text{const}$ ), а дугой обозначен сферический фронт. Легко видеть, что разные точки волнового фронта будут находиться на разных расстояниях от плоскости  $x = \text{const}$ , следовательно будут иметь разные фазы колебаний. Точка  $L$  находится на расстоянии  $r$  от оси  $Ox$  и впереди точки  $L'$  на расстоянии  $LL' = \Delta x = \sqrt{R^2 - r^2} - \sqrt{R^2 - r_0^2}$ . Благодаря этому, волна приобретет

добавочную фазу  $\varphi = -k \Delta x = (\omega/c_n) (\sqrt{R^2 - r_0^2} - \sqrt{R^2 - r^2})$ . Волна, идущая в обратном направлении приобретет фазу  $\varphi = k \Delta x$ , но так как  $\Delta x$  в этом

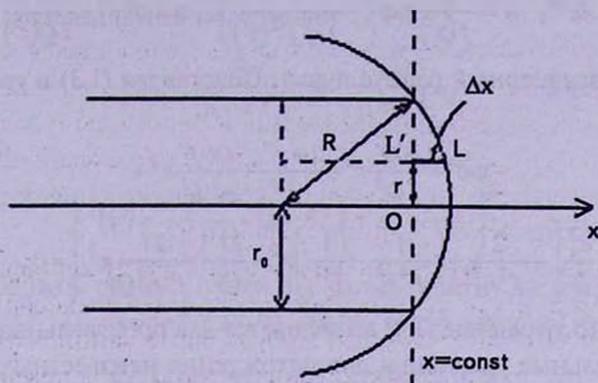


Рис.1. Сферический фронт осесимметричного волнового пучка.

случае отрицателен, выражение для  $\varphi$  будет то же самое. Если учесть, что  $R \gg r_0$ , то для  $\varphi$  окончательно получим:

$$\varphi = \frac{\omega(r^2 - r_0^2)}{2c_n R} = \frac{r^2}{2Q} + \sigma, \quad (I.1)$$

где

$$Q = \frac{c_n R}{\omega}, \quad \sigma = -\frac{r_0^2 f^2}{2Q}.$$

Таким образом, решение уравнения (20) с учетом также изменения поперечных размеров волнового пучка будет иметь добавочный множитель

$$\exp(i\varphi) = \exp\left(i\left(\frac{r^2}{2Q(\tau')} + \sigma(\tau')\right)\right).$$

В плоскости  $(yz)$  распределение возмущения можно считать гауссовским, следовательно, при значении  $x=l$  функцию  $U$  на плоскости  $(yz)$  можно представить в форме осесимметричного гауссовского пучка, фронт которого представляет из себя сегмент сферы:

$$U|_{x=l} = K_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2} + i\frac{r^2}{2Q_0}\right), \quad (I.2)$$

где  $K_0$  - комплексная постоянная,  $r_0$  - начальный радиус пучка,  $R = \omega Q_0/c_n$  - радиус кривизны фронта пучка в точке  $x=l$ . Отметим также, что граничное условие (I.2) написано для первой волны. То же условие выполняется для второй волны в точке  $\tau' = 2l/c_n$ , но так как  $u(x)$  периодическая функция с периодом  $x=2l$ , то для этой волны граничное условие также можно взять в точке  $\tau' = 0$ , т.е. взять условие (I.2).

Решение уравнения (20), удовлетворяющее граничному условию (I.2), можно искать в следующем виде:

$$U = Ae^{i\varphi}, \quad A = \frac{b}{f(\tau')} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2 f^2(\tau')}\right), \quad \varphi = \sigma(\tau') + \frac{r^2}{2Q(\tau')}. \quad (I.3)$$

где  $f(\tau')$  - безразмерный радиус пучка. Подставляя (I.3) в уравнение (20), получим:

$$-\omega\sigma' + \frac{\omega Q'}{2Q^2} r^2 - \frac{i\omega f'}{f} + \frac{i\omega f'}{r_0^2 f^3} r^2 + \frac{c_n^2}{2} \left[ -\frac{2}{f^2 r_0^2} + \left( \frac{1}{f^4 r_0^4} - \frac{1}{Q^2} \right) r^2 + \frac{2i}{Q} - \frac{2i}{f^2 r_0^2 Q} r^2 \right] = 0. \quad (I.4)$$

Требование, что уравнение (I.4) выполняется для произвольного  $r$ , определит дифференциальные уравнения для нахождения неизвестных функций  $\sigma$ ,  $Q$  и  $f$ :

$$\omega \frac{d\sigma}{d\tau'} = -\frac{c_n^2}{r_0^2} \frac{1}{f^2}, \quad \frac{1}{Q^2} \frac{dQ}{d\tau'} = \frac{c_n^2}{\omega} \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{f^4 r_0^4} \right), \quad \omega \frac{df}{d\tau'} = \frac{c_n^2}{Q} f. \quad (I.5)$$

Из условия (I.2) получим граничные условия уравнений (I.5):

$$\sigma(0) = \sigma_0, \quad f(0) = 1, \quad Q(0) = Q_0, \quad (I.6)$$

где  $\sigma_0 = \arg K_0$  и  $b = |K_0|$ . Из системы уравнений (I.5) можно получить уравнение, определяющее функцию  $f(\tau')$ :

$$\omega \frac{d^2 f}{d\tau'^2} = \frac{c_n^2}{Q} f' - \frac{c_n^2}{Q^2} f Q'.$$

Подставляя производные  $f'$  и  $Q'$  из уравнений (I.5), получаем уравнение

$$\frac{d^2 f}{d\tau'^2} = \frac{\beta}{f^3}, \quad \beta = \frac{c_n^4}{\omega^2 r_0^4} \quad (I.7)$$

с граничными условиями

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = F, \quad F = \frac{c_n^2}{\omega Q_0}. \quad (I.8)$$

Уравнение (I.7) легко решается подстановкой

$$\tau' = \tau_0 + \alpha \operatorname{sh} \vartheta, \quad \frac{d\tau'}{d\vartheta} = \alpha \operatorname{ch} \vartheta, \quad (I.9)$$

где  $\tau_0$  и  $\alpha$  пока произвольные постоянные. Тогда вместо (I.7) имеем:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^3 \vartheta} \left( \operatorname{ch} \vartheta \frac{d^2 f}{d\vartheta^2} - \operatorname{sh} \vartheta \frac{df}{d\vartheta} \right) = \frac{\alpha^2 \beta}{f^3}. \quad (I.10)$$

Решение этого уравнения есть  $f(\vartheta) = B \operatorname{ch} \vartheta$ , так что окончательно получим:

$$f^2(\tau') = \sqrt{\beta} \left( \alpha + \frac{(\tau' - \tau_0)^2}{\alpha} \right), \quad (\text{I.11})$$

где  $\alpha$  и  $\tau_0$  определяются из условий (I.8):

$$\tau_0 = -\frac{F}{\beta + F^2}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\beta}}{\beta + F^2},$$

следовательно

$$f^2(\tau') = \frac{F}{\beta + F^2} + (\beta + F^2) \left( \tau' + \frac{F}{\beta + F^2} \right)^2. \quad (\text{I.12})$$

Чтобы определить радиус пучка на поверхности звезды, мы должны подставить в (I.12)  $\tau' = l/c_n$  ( $x = 0$ ). Тогда окончательно получаем:

$$f^2\left(\frac{l}{c_n}\right) = \left(1 + \frac{l}{R}\right)^2 + \left(\frac{lc_n}{\omega r_0^2}\right)^2. \quad (\text{I.13})$$

Это выражение мы получили из (I.12), подставляя в нем значения  $F$  и  $\beta$ .

В конце оценим  $f^2(l/c_n)$  для коры нейтронной звезды. Для коры характерные значения параметров следующие:  $l \approx 10^5$  см,  $R \approx 10^6$  см,  $r_0 \sim 10^4$  см,  $c_n \sim 10^9$  см/с. Леко видеть, что  $l \ll R$ . Для частот  $\omega > 10^7$  Гц всегда имеет место  $(lc_n/\omega r_0^2)^2 \ll 1$ , следовательно поперечные размеры магнитозвукового волнового пучка при распространении не меняются, т.е.  $f(l/c_n) \approx f(0) \approx 1$ .

## Приложение II

Оценим слагаемые, входящие в фигурную скобку выражения (27). Покажем, что основной вклад в это выражение дает первое слагаемое.

Второе слагаемое по сравнению с первым оценивается сразу:

$$\left| \frac{\Phi'_{1,2}}{i\omega\Phi_{1,2}} \right| \sim \frac{1}{\omega\tau'} \sim \frac{c_n}{\omega l} \ll 1. \quad (\text{II.1})$$

Учитывая, что  $f(\tau') \approx 1$ , оценим производные  $f'$ ,  $\sigma'$  и  $Q'$ :

$$f'_{1,2} = \frac{c_n^2}{\omega Q_{1,2}} f_{1,2} \sim \frac{c_n^2}{\omega Q_{1,2}}, \quad \sigma'_{1,2} = -\frac{c_n^2}{\omega r_0^2} \frac{1}{f_{1,2}^2} \sim -\frac{c_n^2}{\omega r_0^2}, \quad Q'_{1,2} = \frac{c_n^2}{\omega} \left( 1 - \frac{Q_{1,2}^2}{r_0^4} \right). \quad (\text{II.2})$$

Последнее из уравнений (II.2) можно интегрировать и получить

$$Q(\tau) = r_0^2 \frac{\exp\left(\frac{2c_n^2\tau'}{\omega r_0^2}\right) \left(1 + \frac{Q_0}{r_0^2}\right) - \left(1 - \frac{Q_0}{r_0^2}\right)}{\exp\left(\frac{2c_n^2\tau'}{\omega r_0^2}\right) \left(1 + \frac{Q_0}{r_0^2}\right) + \left(1 - \frac{Q_0}{r_0^2}\right)}. \quad (\text{II.3})$$

Здесь максимальное значение экспоненты порядка  $2c_n l/\omega r_0^2$ , которое при

$\omega > 10^7$  Гц гораздо меньше единицы, следовательно

$$Q(\tau) \approx Q_0 = \frac{c_n R}{\omega}. \quad (\text{II.4})$$

Учитывая это, можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi_{1,2} f'_{1,2}}{i\omega\Phi_{1,2} f'_{1,2}} \right| \sim \frac{c_n}{\omega R} \ll 1, \quad \left| \frac{\Phi_{1,2} r^2 f'_{1,2}}{i\omega\Phi_{1,2} r_0^2 f'_{1,2}} \right| \leq \frac{c_n}{\omega R} \ll 1, \\ \left| \frac{i\Phi_{1,2} \sigma'_{1,2}}{i\omega\Phi_{1,2}} \right| \sim \frac{c_n^2}{\omega^2 r_0^2} \ll 1, \quad \left| \frac{i\Phi_{1,2} r^2 Q'_{1,2}}{2i\omega\Phi_{1,2} Q_{1,2}^2} \right| \leq \frac{r_0^2}{R^2} \ll 1. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Наконец, для последнего слагаемого получим

$$\left| \frac{\Phi_{1,2} \mu \omega^2}{i\omega\Phi_{1,2}} \right| = \omega \mu. \quad (\text{II.6})$$

Если учесть, что  $c_A^2 < c_n^2$ , то тогда

$$\omega \mu \leq \frac{\omega}{\rho c_n^2} \left( \xi + \frac{4}{3} \eta \right) + \frac{\omega}{c_n^2} \frac{c^2}{4\pi\sigma_0} + \frac{\omega(\gamma-1)^2 \kappa T}{\rho c_n^4}. \quad (\text{II.7})$$

В коре нейтронной звезды максимальное значение  $\mu$  порядка  $10^{-13}$  с. Это означает, что для частот  $\omega < 10^{11}$  Гц  $\omega \mu \ll 1$ . Таким образом, все слагаемые, входящие в скобку (27), по модулю много меньше первого, что и требовалось доказать.

Один из авторов (М.В.А.) выражает благодарность гранту Volkswagen Stiftung Az:85182 за поддержку.

Ереванский государственный университет, Армения  
e-mail: dsedrak@ysu.am mhayrapetyan@ysu.am

## MAGNETOSONIC WAVES IN THE CRUST OF A NEUTRON STAR

D.M.SEDRAKIAN, A.S.HARUTYUNYAN, M.V.HAYRAPETYAN

In this paper based on the MHD equations, it is shown that the energy release on the inner surface of the neutron star's crust leads to the generation of magnetosonic wave beams that propagate to the surface of the star. It is shown that for frequencies  $10^7 \text{ Hz} \leq \omega \leq 10^{11} \text{ Hz}$  and for the conditions of matter in the crust of a neutron star, these equations are linearized, and solutions are found. In the crust standing wave beam with a constant radius is formed, the outer base of which, situated on the surface of the star, becomes a source of

radio waves. In this source electric currents are induced and the source becomes an antenna that emits radio waves in the circumstellar space. It is shown that with increasing frequency the radio emission intensity decreases, and therefore the spectrum of the pulsars is limited ( $\omega \leq 10^{11}$  Hz).

Key words: *neutron stars:magnetosonic waves*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д.М.Седракян, А.С.Арутюнян, М.В.Айрапетян, *Астрофизика*, 56, 89, 2013.
2. А.Г.Багдоев, Д.М.Седракян, *Астрофизика*, 44, 139, 2001.
3. Д.М.Седракян, А.Г.Багдоев, М.В.Айрапетян, *Астрофизика*, 50, 547, 2007.
4. Д.М.Седракян, *Астрофизика*, 43, 377, 2000.
5. Д.М.Седракян, М.В.Айрапетян, *Астрофизика*, 55, 421, 2012.
6. А.Г.Багдоев, А.В.Шекоян, *Акуст. ж.*, 45, 119, 1999.
7. А.Г.Багдоев, А.В.Шекоян, *Изв. НАН Арм. ССР, Механика*, 40, 14, 1987.
8. Д.М.Седракян, *Астрофизика*, 31, 101, 1989.
9. А.Г.Багдоев, Л.Г.Петросян, *Изв. НАН Арм. ССР, Механика*, 36, 3, 1983.