АСТРОФИЗИКА

ТОМ 56 ФЕВРАЛЬ, 2013 ВЫПУСК 1

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ. III

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 12 декабря 2012

В работе рассматривается задача об определении статистических средних величин, описывающих диффузию излучения в неоднородной плоскопараллельной атмосфере. Применением метода инвариантного погружения находятся среднее число рассеяний и среднее время пребывания в среде различных групп квантов. Во всех случаях вопрос сводится к решению одинаковых по форме интегродифференциальных уравнений с заданными начальными условиями, что легко реализуемо при численных расчетах.

Ключевые слова: *перенос излучения:трехмерная среда:интегро-дифференциальные уравнения с начальными условиями*

1. *Введение*. В предыдущих работах [1-3] была развита идея, заключающаяся в сведении различных часто встречаемых в астрофизике задач переноса излучения к решению задач с начальными условиями, которые удобны для вычислений на современных ЭВМ. Для достижения указанной цели сначала находятся глобальные оптические характеристики рассеивающей и поглощающей атмосферы (коэффициенты отражения и пропускания), после чего сравнительно легко определяется поле излучения внутри нее. При этом используется метод инвариантного погружения (см., например, [4]), который в равной мере применим и в случае, когда среда является неоднородной. Другое достоинство этого метода заключается в том, что он позволяет определить искомые величины сразу для семейства атмосфер с разными оптическими толщинами.

Развитие теории переноса излучения в неоднородной среде весьма актуально, особенно если учесть, что современные астрономические инструменты предоставляют возможность более детально исследовать явления, происходящие в космических объектах, что, в свою очередь позволяет изучить проявления различного рода неоднородностей, в том числе тех, которые обусловлены тонкой структурой излучаемого объема.

Цель настоящей работы - показать эффективность описанного подхода при определении статистических средних величин, характеризующих диффузию излучения в неоднородной атмосфере. Среди различного рода таких величин особое место занимают среднее число рассеяний (СЧР) и среднее время (СВ), затрачиваемого квантом в ходе блуждания в среде. Встречаемая иногда в литературе задача о нахождении среднего пути, проходимого квантом в среде (см. [5-7]), эквивалентна задаче об определении последней из указанных величин, если квант тратит время лишь на путь между двумя последовательными актами рассеяния. Ввиду того, что эти величины играют важную роль в астрофизических приложениях, им посвящено много работ. Достаточное количество ссылок на них можно найти в [8-11]. Практически во всех прежних работах, представляющие интерес средние величины определялись будучи взвешенными по мощности внутренних источников энергии и, что существенно, - для однородной среды. Между тем важно знать СЧР, испытываемых каждым квантом при диффузии через рассеивающую среду, равно как и затрачиваемое при этом СВ, в зависимости от исходных и конечных значений частоты и направления [12,13]. Некоторые аспекты определения этих величин освещаются в [10,11,14-16].

Содержание работы таково. В разделе 2 будут введены основные величины и уравнения, необходимые для дальнейшего изложения. Следующий раздел посвящен задаче о нахождении СЧР для неоднородной атмосферы. Применяется метод инвариантного погружения, в результате чего задача сводится к задаче с начальными условиями. Тот же метод в разделе 4 используется для определения СВ пребывания кванта в среде. Обсуждению полученных результатов посвящен заключительный раздел.

2. *Функции отражения и пропускания.* Рассмотрим перенос излучения через плоскопараллельную неоднородную атмосферу конечной оптической толщины τ_0 в центре спектральной линии. Для простоты, предположим, что рассеяние является изотропным и полностью некогерентным. Уширение спектральной линии будет описываться функцией Фойгта для профиля коэффициента поглощения, $\alpha(x)=H(x,a)$, где a - фойгтовский параметр, x - безразмерная частота, представляющая собой смещение от центральной частоты, в единицах доплеровской полуширины. Нормализационный множитель функции Фойгта $A=1/\sqrt{\pi}$. Роль поглощения в непрерывном спектре будет задаваться параметром β, обозначающим отношение коэффициента поглощения в континууме к коэффициенту поглощения в центре спектральной линии. Вероятность переизлучения кванта при элементарном акте рассеяния обозначим через λ.

Для простоты, под неоднородной атмосферой в данной работе будет пониматься атмосфера, в которой от глубины зависит лишь параметр λ. В то же время, как можно будет убедиться ниже, ход рассуждений и применяемый метод остаются в силе и в более общем случае, когда от глубины зависят и другие параметры, определяющие диффузию излучения в среде (параметр β, профиль коэффициента поглощения $\alpha(x)$, закон перераспределения излучения по частотам и направлениям и т.д.).

Введем в рассмотрение основные величины, необходимые для дальнейшего изложения. Начнем с определения глобальных оптических характеристик среды при ее освещении со стороны границы $\tau=\tau_0$ (рис.1). Для осредненного по азимуту коэффициента отражения введем обозначение $\rho(x',\eta;x,\xi,\tau_0)$, где x и ξ представляют собой частоту и косинус угла падения кванта, а пара (x',η) — одноименные величины для отраженных квантов. Функция ρ вводится таким образом, что ρ/ξ обладает вероятностным смыслом.

Она удовлетворяет уравнению (ср. с уравнением (16) в [2])

$$\frac{d\rho}{d\tau_0}=-\left[\frac{\gamma(x')}{\eta}+\frac{\gamma(x)}{\xi}\right]\rho(x',\eta;x,\xi,\tau_0)+\frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\varphi(x',\eta,\tau_0)\varphi(x,\xi,\tau_0), \tag{1}$$

где $\tilde{\lambda}=A\lambda$, $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta$,

$$\varphi(x,\xi,\tau_0)=\alpha(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x')dx'\int_0^1\rho(x',\eta';x,\xi,\tau_0)\frac{d\eta'}{\eta'}, \tag{2}$$

и $\rho(x',\eta;x,\xi,0)=0$.

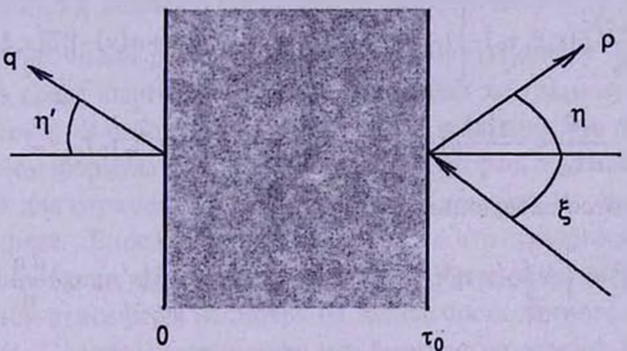

Рис.1. Схематическое изображение переноса излучения в трехмерной среде конечной толщины при ее освещении со стороны границы $\tau=\tau_0$.

Переходя к коэффициенту прохождения $q(x',\eta;x,\xi,\tau_0)$, для его диффузной составляющей введем обозначение $\sigma(x',\eta;x,\xi,\tau_0)$, так что

$$q(x',\eta;x,\xi,\tau_0)=\eta\delta(x'-x)\delta(\eta-\xi)\exp\left[-\frac{\gamma(x)}{\xi}\tau_0\right]+\sigma(x',\eta;x,\xi,\tau_0). \tag{3}$$

Функция σ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\sigma}{d\tau_0}=-\frac{\gamma(x)}{\xi}\sigma(x',\eta;x,\xi,\tau_0)+\frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\varphi(x,\xi,\tau_0)\psi(x',\eta,\tau_0), \tag{4}$$

причем

$$\psi(x',\eta,\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x'')dx''\int_0^1\rho(x',\eta;x'',\eta',\tau_0)\frac{d\eta'}{\eta'}, \tag{5}$$

или

$$\psi(x',\eta,\tau_0)=\exp\left[-\frac{\gamma(x)}{\eta}\tau_0\right]+\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x'')dx''\int_0^1\sigma(x',\eta;x'',\eta',\tau_0)\frac{d\eta'}{\eta'}, \tag{6}$$

и $\sigma(x',\eta;x,\xi,0)=0$ в качестве начального условия.

Уравнения (1) и (4) являются обобщением аналогичных уравнений для коэффициентов отражения и прохождения, приведенных в [2]. Напомним, что они получаются применением метода инвариантного погружения в результате добавления к границе $\tau=\tau_0$ среды тонкого слоя с последующим переходом к пределу, когда его толщина стремится к нулю. Далее мы будем иметь дело с вероятностями отражения и пропускания, относящимися ко всем отраженным и пропущенным квантам независимо от угла и частоты. Эти величины будут отмечаться сверху чертой:

$$\overline{\rho}(x,\xi,\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_0^1\rho(x',\eta;x,\xi,\tau_0)\frac{d\eta}{\eta},\quad \overline{q}(x,\xi,\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_0^1 q(x',\eta;x,\xi,\tau_0)\frac{d\eta}{\eta}. \tag{7}$$

На основании (1) и (4) для указанных функций нетрудно получить интегро-дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями

$$\frac{d\overline{\rho}}{d\tau_0}=-\frac{\gamma(x)}{\xi}\overline{\rho}(x,\xi,\tau_0)-\left[1-\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\varphi_0(\tau_0)\right]\varphi(x,\xi,\tau_0)+\alpha(x)-\beta\overline{\rho}(x,\xi,\tau_0), \tag{8}$$

$$\frac{d\overline{q}}{d\tau_0}=-\frac{\gamma(x)}{\xi}\overline{q}(x,\xi,\tau_0)+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\psi_0(\tau_0)\varphi(x,\xi,\tau_0), \tag{9}$$

где используются следующие обозначения

$$\varphi_0(\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^1\varphi(x,\eta,\tau_0)d\eta=\sqrt{\pi}+\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x')dx'\int_0^1\overline{\rho}(x',\eta,\tau_0)\frac{d\eta}{\eta}, \tag{10}$$

$$\psi_0(\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^1\psi(x,\eta,\tau_0)d\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\int_0^1\overline{q}(x,\eta,\tau_0)\frac{d\eta}{\eta} \tag{11}$$

и $\overline{\rho}(x,\xi,0)=0$, $\overline{q}(x,\xi,0)/\xi=1$.

Введем в рассмотрение также величину $R_0(x,\xi,\tau_0)$, представляющую собой вероятность того, что падающие на среду кванты в конечном счете подвергнутся истинному поглощению в ней и будут термализованы. Методом инвариантного погружения для нее нетрудно получить

$$\frac{dR_0}{d\tau_0}=-\frac{\gamma(x)}{\xi}R_0(x,\xi,\tau_0)-\left[1-\lambda(\tau_0)+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\phi(\tau_0)\right]\varphi(x,\xi,\tau_0)+\beta\left[1+\overline{\rho}(x,\xi,\tau_0)\right], \tag{12}$$

где

$$\phi(\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\int_0^1 R_0(x,\eta,\tau_0)\frac{d\eta}{\eta} \tag{13}$$

и $R_0(x,\xi,0)=0$. Очевидно, что $\overline{\rho}+\overline{q}+R_0=1$, и

$$\varphi_0(\tau_0)+\psi_0(\tau_0)+\phi(\tau_0)=2\sqrt{\pi}. \tag{14}$$

Из (12) нетрудно вывести интегральное уравнение для функции $\phi(\tau_0)$

$$\phi(\tau_0)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_0}\lambda(\tau)L(\tau_0-\tau)\phi(\tau)d\tau+G(\tau_0), \tag{15}$$

где

$$L(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\int\limits_0^1\varphi(x,\xi,\tau)\exp\left(-\frac{\gamma(x)}{\xi}\tau\right)\frac{d\xi}{\xi}, \tag{16}$$

известная в классической теории переноса функция и

$$G(\tau_0)=\int\limits_0^{\tau_0}[1-\lambda(\tau)]L(\tau)d\tau+\beta F(\tau_0), \tag{17}$$

$$F(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\int\limits_0^1[1+\overline{\rho}(x,\xi,\tau)]\exp\left(-\frac{\gamma(x)}{\xi}\tau\right)\frac{d\xi}{\xi}. \tag{18}$$

Теперь, имея в своем распоряжении все необходимые сведения, перейдем непосредственно к задаче об определении статистических средних величин.

3. *Среднее число рассеяний*. Рассмотрим статистику многократного рассеяния в среде квантов частоты x, падающих на границу $\tau=\tau_0$ среды под углом $\cos^{-1}\xi$. В работах [10,14] нами было показано, что предложенная Амбарцумяном формула $N=\lambda\partial\ln I/\partial\lambda$ для однородной атмосферы (см. [17]) справедлива для отраженных и пропущенных квантов, но не тех, которые гибнут в среде. Впоследствии выяснилось, что указанная процедура дифференцирования по λ формально может быть применена и в случае неоднородной атмосферы несмотря на зависимость данного параметра от глубины [16]. С учетом сказанного, нас будет интересовать СЧР для трех типов квантов: отраженных, пропущенных и тех, которые термализуются в среде. В согласии с вышесказанным, в случае первых двух групп квантов к цели приведет формальное дифференцирование по λ соответствующих вероятностей. Вводя для ожидаемого числа рассеяний указанных квантов обозначения $N_*=\lambda\partial\overline{\rho}/\partial\lambda$, $N_0=\lambda\partial\overline{q}/\partial\lambda$, на основе (8) и (9) получаем

$$\begin{aligned}\frac{dN_*}{d\tau_0}=&-\frac{\gamma(x)}{\xi}N_*(x,\xi,\tau_0)+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}[f_0(\tau_0)+\varphi_0(\tau_0)]\varphi(x,\xi,\tau_0)-\\&-\left[1-\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\varphi_0(\tau_0)\right]f(x,\xi,\tau_0)-\beta N_*(x,\xi,\tau_0),\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{dN_0}{d\tau_0}=&-\frac{\gamma(x)}{\xi}N_0(x,\xi,\tau_0)+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}[g_0(\tau_0)+\psi_0(\tau_0)]\varphi(x,\xi,\tau_0)+\\&+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\psi_0(\tau_0)f(x,\xi,\tau_0),\end{aligned} \tag{20}$$

где $f(x,\xi,\tau_0)=\lambda\,\partial\varphi(x,\xi,\tau_0)/\partial\lambda$, $f_0(\tau_0)=\lambda\,\partial\varphi_0(\tau_0)/\partial\lambda$ и $g_0(\tau_0)=\lambda\,\partial\psi_0(\tau_0)/\partial\lambda$. В качестве начальных условий имеем $N_*(x,\xi,0)=N_0(x,\xi,0)=0$. Очевидно, что величины $N_*/\overline{p}$ и $N_*/\overline{q}$ дают искомые СЧР для отраженных и пропущенных квантов.

Перейдем теперь к третьей группе квантов, которые гибнут в среде. Процедура инвариантного погружения должна быть теперь применена непосредственно к числу рассеяний путем определения этого числа для каждой реализации, принимаемой в расчет при добавлении к среде дополнительного слоя. Используя развитый в [10] метод производящей функции для ожидаемого числа рассеяний N_a рассматриваемых квантов, получим

$$\frac{dN_a}{d\tau_0}=-\frac{\gamma(x)}{\xi}N_a(x,\xi,\tau_0)+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\left[h_0(\tau_0)+\phi(\tau_0)+1-\lambda(\tau_0)\right]\varphi(x,\xi,\tau_0)+$$
$$+\left[\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\phi(\tau_0)+1-\lambda(\tau_0)\right]f(x,\xi,\tau_0)+\beta\left[1+\overline{p}(x,\xi,\tau_0)+N_*(x,\xi,\tau_0)\right], \tag{21}$$

где $h_0(\tau_0)=\lambda\,\partial\phi(\tau_0)/\partial\lambda$, и начальное условие $N_a(x,\xi,0)=0$. Легко увидеть, что $\langle N\rangle=N_*+N_0+N_a$ представляет собой СЧР для квантов частоты x, падающих на среду под углом $\cos^{-1}\xi$ независимо от того, гибнут в ней или покидают ее. Принимая во внимание (14) и вводя обозначение

$$\Phi(\tau_0)=f_0(\tau_0)+g_0(\tau_0)+h_0(\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\int_0^1\langle N(x,\eta,\tau_0)\rangle\frac{d\eta}{\eta}, \tag{22}$$

находим

$$\frac{d\langle N\rangle}{d\tau_0}=-\frac{\gamma(x)}{\xi}\langle N(x,\xi,\tau_0)\rangle+\left[\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\Phi(\tau_0)+1\right]\varphi(x,\xi,\tau_0)+\beta\left[1+\overline{p}(x,\xi,\tau_0)\right], \tag{23}$$

причем $\langle N(x,\xi,0)\rangle=0$. По аналогии с (15), из (23) можно вывести интегральное уравнение для функции $\Phi(\tau_0)$

$$\Phi(\tau_0)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\lambda(\tau)L(\tau_0-\tau)\Phi(\tau)d\tau+G_1(\tau_0), \tag{24}$$

где

$$G_1(\tau_0)=\int_0^{\tau_0}L(\tau)d\tau+\beta F(\tau_0), \tag{25}$$

и функции $L(\tau_0)$ и $F(\tau_0)$ задаются формулами (16), (18).

Все полученные уравнения (19)-(21), (23) легко решаются численно. В частности, после решения (24) искомое СЧР находится в явном виде из (23). Некоторые аналитические результаты можно получить для однородной среды (см. [10]). В частности, полагая производные в этих уравнениях равным нулю, приходим к результатам, полученным ранее в упомянутой работе для полубесконечной среды. Сравнивая уравнения (23) и (12) для $\beta=0$, иначе пренебрегая ролью поглощения в непрерывном спектре, находим $\langle N(x,\xi,\tau_0)\rangle = R_0(x,\xi,\tau_0)/(1-\lambda)$.

4. *Среднее время пребывания кванта в среде.* Аналогичный подход может быть применен в отношении непрерывно распределенных случайных величин, описывающих диффузию излучения. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу об определении среднего времени, затрачиваемой квантом в процессе многократного рассеяния в среде. В астрофизических приложениях, она была предметом исследования ряда исследователей [5-7,11]. В общем случае, когда кванты гибнут не только при рассеянии, но и в полете, указанная величина позволяет судить об относительной роли диссипации энергии в среде и потоке энергии через ее границы. Другое важное применение данной средней величины связано с задачей, обычно возникающей при наличии в атмосфере источников энергии, когда необходимо бывает выяснить, установилось ли лучистое равновесие в ней или нет [18].

Обращаясь непосредственно к нашей задаче, заметим, что с математической точки зрения представляет интерес только тот случай, когда квант затрачивает время лишь на прохождение пути между двумя последовательными актами рассеяния. Что же касается среднего времени, затрачиваемого квантом на пребывание атома в возбужденном состоянии, то в случае необходимости его можно учесть простым умножением СЧР на среднее время, необходимое атому для процесса переизлучения. Это возможно ввиду статистической независимости указанных двух случайных величин.

Для удобства временные интервалы будут измеряться в единицах $t=1/nck_{\nu_0}$, где n - число рассеивающих атомов в 1 см^3 и k_{ν_0} - коэффициент поглощения в центре спектральной линии. Величина t представляет собой время, затрачиваемое на прохождение среднего пути между двумя последовательными актами рассеяния для кванта в центре линии в отсутствии поглощения в непрерывном спектре. Безразмерное время мы обозначим через ω. В рассматриваемой задаче опять будем различать три группы квантов: отраженные, пропущенные и подвергнувшиеся истинному поглощению в процессе многократного рассеяния. Здесь мы ограничимся подробным обсуждением задачи лишь для первой из этих категорий квантов. Для двух других групп приведем только окончательные результаты.

Рассматривая процесс отражения, введем обобщенную функцию отражения $\tilde{\rho}(x',\eta;x,\xi;\tau_0,\omega)$, которая является зависящим от времени аналогом введенной выше одноименной функции, и относится к квантам, отраженным в промежутке времени $(\omega,\omega+d\omega)$. Применяя метод инвариантного погружения, имеем

$$\frac{d\widetilde{\rho}}{d\tau_0}+\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi}\right)\frac{d\widetilde{\rho}}{d\omega}=-\left[\frac{\gamma(x')}{\eta}+\frac{\gamma(x)}{\xi}\right]\widetilde{\rho}(x',\eta;x,\xi;\tau_0,\omega)+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\{\alpha(x)\alpha(x')\delta(\omega)+$$
$$+\alpha(x)\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x'')dx''\int_0^1\widetilde{\rho}(x',\eta;x'',\eta';\tau_0,\omega)\frac{d\eta'}{\eta'}+\alpha(x')\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x'')dx''\int_0^1\widetilde{\rho}(x'',\eta';x,\xi;\tau_0,\omega)\frac{d\eta'}{\eta'}+ \quad (26)$$
$$+\int_0^{\infty}d\omega'\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x'')dx''\int_0^1\widetilde{\rho}(x',\eta;x'',\eta';\tau_0,\omega')\frac{d\eta'}{\eta'}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x''')dx'''\int_0^1\widetilde{\rho}(x''',\eta'';x,\xi;\tau_0,\omega-\omega')\frac{d\eta''}{\eta''}\Bigg\},$$

где δ есть δ-функция Дирака.

Характеристическую функцию в применении к данному уравнению можно заменить преобразованием Лапласа функции $\widetilde{\rho}$ [11]

$$T(x',\eta;x,\xi;\tau_0,s)=\int_0^{\infty}\widetilde{\rho}(x',\eta;x,\xi;\tau_0,\omega)e^{-s\omega}d\omega, \quad (27)$$

в результате чего приходим к уравнению

$$\frac{dT}{d\tau_0}=-\left\{\left[\frac{\gamma(x')}{\eta}+\frac{\gamma(x)}{\xi}\right]-s\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\eta}\right)\right\}T(x',\eta;x,\xi;\tau_0,s)+$$
$$+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\varpi(x',\eta,\tau_0,s)\varpi(x,\xi,\tau_0,s), \quad (28)$$

где

$$\varpi(x,\xi,\tau_0,s)=\alpha(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x')dx'\int_0^1 T(x',\eta';x,\xi;\tau_0,s)\frac{d\eta'}{\eta'}. \quad (29)$$

Полагая $s=0$, мы возвращаемся к (1). Для определения искомой средней величины для отраженных квантов следует ввести производную $\Omega_*(x,\eta;x,\xi;\tau_0)=\left.\frac{dT}{ds}\right|_{s=0}$. Из (28) следует

$$\frac{d\Omega_*}{d\tau_0}=-\left[\frac{\gamma(x')}{\eta}+\frac{\gamma(x)}{\xi}\right]\Omega_*(x',\eta;x,\xi;\tau_0)-\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\eta}\right)\widetilde{\rho}(x',\eta;x,\xi;\tau_0)+$$
$$+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\left[\varphi(x',\eta,\tau_0)\widetilde{f}(x,\xi,\tau_0)+\widetilde{f}(x',\eta,\tau_0)\varphi(x,\xi,\tau_0)\right], \quad (30)$$

где

$$\widetilde{f}(x,\xi,\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x')dx'\int_0^1\Omega_*(x',\eta;x,\xi;\tau_0)\frac{d\eta'}{\eta'}. \quad (31)$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение может быть получено дифференцированием уравнения (1) по β с последующей заменой знака на противоположный. Аналогичный результат для однородной атмосферы был получен в [11]. Таким образом, мы приходим к важному обобщению этого результата на случай неоднородных сред. Как и в случае СЧР, процедуру дифференцирования можно применять лишь для отраженных и пропущенных квантов. Очевидно, что частное Ω_*/ρ дает подробное представление о среднем времени, затрачиваемом отраженными квантами в зависимости от частоты и угла как для падающих, так и отраженных квантов.

Если нас интересуют все отраженные кванты независимо от частоты и угла отражения, то интегрируя (30) по x' и η, получим для ожидаемого значения времени отражения $\overline{\Omega}_*(x,\xi,\tau_0)$

$$\frac{d\overline{\Omega}_*}{d\tau_0}=-\left[\frac{\gamma(x)}{\xi}+\beta\right]\overline{\Omega}_*(x,\xi,\tau_0)+\frac{1}{\xi}\overline{\rho}(x,\xi,\tau_0)+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\widetilde{f}_0(\tau_0)\varphi(x,\xi,\tau_0)-$$
$$-\left[1-\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\varphi_0(\tau_0)\right]\widetilde{f}(x,\xi,\tau_0)+1+\overline{\rho}(x,\xi,\tau_0), \tag{32}$$

где $\widetilde{f}_0(\tau_0)=-\partial\varphi_0(\tau_0)/\partial\beta$ и $\overline{\Omega}_*(x,\xi,0)=0$.

Аналогичные рассуждения для пропущенных квантов приводят для соответствующего времени $\overline{\Omega}_0(x,\xi,\tau_0)$ к уравнению

$$\frac{d\overline{\Omega}_0}{d\tau_0}=-\frac{\gamma(x)}{\xi}\overline{\Omega}_0(x,\xi,\tau_0)+\frac{1}{\xi}\overline{q}(x,\xi,\tau_0)+$$
$$+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\left[\widetilde{g}_0(\tau_0)\varphi(x,\xi,\tau_0)+\psi_0(\tau_0)\widetilde{f}(x,\xi,\tau_0)\right], \tag{33}$$

где $\widetilde{g}_0(\tau_0)=-\partial\psi_0(\tau_0)/\partial\beta$ и начальное условие $\overline{\Omega}_0(x,\xi,0)=0$.

Что касается квантов, гибнущих в атмосфере, то уравнение для ожидаемого значения искомого времени $\overline{\Omega}_a$ может быть получено применением метода инвариантного погружения

$$\frac{d\overline{\Omega}_a}{d\tau_0}=-\frac{\gamma(x)}{\xi}\overline{\Omega}_a(x,\xi,\tau_0)+\frac{1}{\xi}R_0(x,\xi,\tau_0)+$$
$$+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\left[\widetilde{h}_0(\tau_0)\varphi(x,\xi,\tau_0)+\phi_0(\tau_0)\widetilde{f}(x,\xi,\tau_0)\right]+(1-\lambda(\tau_0))\widetilde{f}(x,\xi,\tau_0)+\beta\overline{\Omega}_*(x,\xi,\tau_0), \tag{34}$$

где введено обозначение $\widetilde{h}_0(\tau_0)=-\partial\phi(\tau_0)/\partial\beta$, и начальное условие - $\overline{\Omega}_a(x,\xi,0)=0$. После решения уравнений (32)-(34) величины $\overline{\Omega}_*/\overline{\rho}$, $\overline{\Omega}_0/\overline{q}$, $\overline{\Omega}_a/\overline{R}_0$ дают требуемые значения среднего времени пребывания в среде для трех типов квантов. Далее, очевидно, что $\langle\Omega\rangle=\overline{\Omega}_*+\overline{\Omega}_0+\overline{\Omega}_a$ представляет собой среднее время диффузии квантов в среде независимо от того, покидают ли они среду или гибнут в ней. Из уравнений (32)-(34) получаем

$$\frac{d\langle\Omega\rangle}{d\tau_0}=-\frac{\gamma(x)}{\xi}\langle\Omega(x,\xi,\tau_0)\rangle+\frac{\widetilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\widetilde{\Phi}(\tau_0)\varphi(x,\xi,\tau_0)+1+\overline{\rho}(x,\xi,\tau_0), \tag{35}$$

где $\widetilde{\Phi}=\widetilde{f}_0+\widetilde{g}_0+\widetilde{h}_0$ и $\langle\Omega(x,\xi,0)\rangle=0$. Для определения функции $\widetilde{\Phi}(\tau_0)$ легко вывести уравнение типа Вольтерра, аналогичное (20) и отличающееся от него лишь свободным членом

$$\widetilde{\Phi}(\tau_0)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\lambda(\tau)L(\tau_0-\tau)\widetilde{\Phi}(\tau)d\tau+\beta F(\tau_0). \tag{36}$$

Таким образом, вопрос об определении различных статистических средних величин, характеризующих диффузию излучения в неоднородной атмосфере, сводится к решению задач с начальными условиями для одинаковых по форме интегро-дифференциальных уравнений. С точки зрения чистой теории, в рассмотренном частном случае полного перераспределения по частотам количество аргументов у различных функций может быть сокращено путем введения комбинированных переменных типа $\gamma(x)/\xi$. Однако в работе мы предпочли разделение частотных и угловых переменных, что является более удобным при численных расчетах. В заключение заметим, что в случае однородной атмосферы из уравнений (12), (19), (31) вытекает хорошо известное соотношение, связывающее между собой различные статистически средние величины $(1-\lambda)\langle N\rangle+\lambda\beta\langle\Omega\rangle=R_0$.

5. *Заключительные замечания.* В предыдущих частях данной серии развивалась идея, заключающаяся в сведении применяемых в астрофизике стандартных задач теории переноса излучения к задачам с начальными условиями, которые более удобны для вычислений на современных ЭВМ. Подход, применяемый в указанных работах, основывается на применении метода инвариантного погружения, который позволяет преодолеть трудности, возникающие при решении задач с учетом неоднородности атмосферы. В настоящей работе мы показали, что такой подход может применяться и при определении различных статистически средних величин, описывающих диффузию излучения в неоднородной трехмерной и плоскопараллельной атмосфере. Помимо этого, показано, что полученные нами ранее результаты, связанные с формальным дифференцированием соответствующих уравнений по λ и β, остаются в силе и в случае неоднородной среды.

Мы ограничились рассмотрением СЧР и СВ, затрачиваемого квантом при диффузии в среде для трех типов квантов в случае, когда среда освещается со стороны границы $\tau=\tau_0$. Аналогичные рассуждения с учетом результатов, полученных нами в [2], упомянутые величины можно определить и в том случае, когда среда освещается с противоположной стороны.

Несмотря на то, что под неоднородностью в работе подразумевалась зависимость от глубины коэффициента рассеяния, полученные результаты легко обобщаются и на более сложные модели, в которых помимо указанной величины от глубины в атмосфере зависят другие величины, определяющие как характер элементарного акта рассеяния, так и распределение внутренних источников энергии. Напомним, что применяемый подход позволяет найти нужные величины для семейства атмосфер разных оптических толщин.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

SOLUTION OF LINEAR RADIATIVE TRANSFER PROBLEMS IN PLANE-PARALLEL ATMOSPHERES

A.G.NIKOGHOSSIAN

The paper treats the problem of determining the statistical mean quantities which describe the radiation diffusion in an inhomogeneous plane-parallel atmosphere. The mean number of scatterings and the average time of travel in the medium for different groups of quanta are found by using the method of invariant imbedding. In all cases the problem is reduced to the solution of similar integrodifferential equations with the given initial conditions, what is easy to realize in computations.

Key words: *radiative transfer:three-dimensional medium:initial-value integro-differential equations*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.G.Nikoghossian*, Astron. Astrophys., 422, 1059, 2004.
2. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 54, 617, 2011.
3. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 55, 293, 2012.
4. *J.Casti*, *R.Kalaba*, Imbedding Methods in Applied Mathematics, Addison-Wesley Co., Mass., 1973.
5. *W.M.Irvine*, Bull. Astron. Inst. Netherl., 17, 266. 1964.
6. *W.M.Irvine*, Astrophys. J., 144, 1140, 1966.
7. *В.В.Иванов*, Астрофизика, 6, 643, 1970.
8. *В.В.Иванов*, Астрофизика, 52, 29, 2009.
9. *В.В.Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, М., Наука, 1969.
10. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 21, 323, 1984.
11. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 24, 149, 1986.
12. В.А.*Амбарцумян*, Ученые записки ЛГУ, 22, 14, 1938.
13. В.А.*Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1960.
14. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 27, 335, 1987.
15. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 47, 289, 2004.
16. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 49, 263, 2006.
17. *В.А.Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 8, 101, 1948.
18. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.