

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ. МЕТОД ДВУСТОРОННЕГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Н.Б.ЕНГИБАРЯН, А.Г.БАРСЕГЯН

Поступила 18 июля 2012

Принята к печати 12 сентября 2012

Предлагается метод двустороннего продолжения решения астрофизических задач переноса излучения. Применением уравнения Амбарцумяна для полубесконечной среды задача сводится к двум интегральным уравнениям фундаментального характера, допускающих простое численно-аналитическое решение.

Ключевые слова: *уравнение переноса в слое конечной толщины; метод двустороннего продолжения*

1. Введение. Ряд задач переноса излучения в плоскопараллельной среде, занимающих важное место в теоретической астрофизике, описывается следующим интегральным уравнением переноса типа свертки (см. [1-9]):

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^r K(|\tau - t|) S(t) dt, \quad (1)$$

с четной ядерной функцией K , представленной в виде суперпозиции экспонент:

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_a^b \exp(-|\tau|s) G(s) ds, \quad \tau \in (-\infty; \infty), \quad 0 \leq a < b \leq \infty, \\ G(s) \geq 0 \quad \int_a^b s^{-1} G(s) ds = 1. \quad (2)$$

Здесь $r \leq \infty$ - толщина слоя; S - искомая функция источника; g - заданное распределение первичных источников. Число λ представляет собой вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния: $0 \leq \lambda \leq 1$.

К известным частным случаям уравнения (1), (2) относятся:

- Основное интегральное уравнение переноса: тогда $K(x) = \frac{\lambda}{2} E_1(|x|)$, где E_1 - первая интегральная показательная функция.

- Интегральное уравнение некогерентного изотропного рассеяния при полном перераспределении по частотам (см. [6-9]).

- Уравнение для основных гармоник в случае анизотропного рассеяния (см. [1,3,6]).

Уравнение (1) играет роль также в вопросах решения задач переноса в среде с отражающей границей, в сферически-симметрической среде, в неоднородной среде, в нелинейных задачах переноса и др. (см. напр., [8-11]).

Вопросы эффективного решения уравнений (1), (2) не потеряли свою актуальность.

В случае полубесконечной среды Π_{∞} , уравнение (1) обращается в интегральное уравнение Винера-Хопфа. Наиболее действенный метод его решения в случае ядра (2) основан на применении нелинейного уравнения Амбарцумяна (УА) (см. [1-3], [6-9]), которое легко решается численно:

$$\varphi(s) = 1 + \frac{\lambda}{2} \varphi(s) \int_a^b \frac{\varphi(p)G(p)dp}{s+p}. \quad (3)$$

Хорошо известно, что решение уравнения переноса в слое конечной толщины Π_r , $r < \infty$, существенно сложнее случая полубесконечной среды. Эвристические соображения показывают, что функция Амбарцумяна φ может играть роль в данном вопросе. Впервые такую попытку сделал Ямамото [12] для решения основного интегрального уравнения переноса (при $r < \infty$). В работе [13] Соболев показал, что формула Ямамото не является точной.

В работах [14,15] впервые был найден точный метод решения уравнений (1), (2) и более общих уравнений переноса в слое конечной толщины, с использованием функций Амбарцумяна для полупространства. Применению и развитию результатов этих работ посвящен ряд исследований (см. напр., [16-21]). В [22] метод из [15] получил факторизационную трактовку и был применен к случаю произвольного распределения g первичных источников.

Метод работ [15,22] основан на одностороннем продолжении поля излучения вне рассматриваемого слоя. Таким способом устанавливается связь между решениями задач переноса в конечном слое и соответствующей задачи переноса в полубесконечной среде.

В настоящей работе предлагается *метод двустороннего продолжения* (МДП) решения уравнения переноса (1) в слое конечной толщины. Этот метод, имеющий некоторое сходство с подходом работы [14], основан на установлении связи между решениями задач переноса в слое конечной толщины и соответствующей задачи переноса в бесконечной среде. Используется факторизационная трактовка уравнения Амбарцумяна, которая будет описана в разделе 2.2. При произвольном распределении первичных источников уравнения (1), (2) сводятся к следующим двум уравнениям ($s > 0$ - параметр):

$$C^{\pm}(z, s) = \frac{1}{z+s} \pm \int_0^b \frac{1}{p+z} C^{\pm}(p, s) \exp(-rp) d\rho(p). \quad (4)$$

Функция ρ строится через функцию φ . Она универсальна: не зависит от r . Уравнения (4) легко решаются численно, с применением методов дискретных ординат.

2. Факторизация уравнения (1) для бесконечной и полубесконечной сред.

2.1. *Факторизационная трактовка уравнения Амбарцумяна.* Метод решения уравнений переноса (1), (2) в полубесконечной среде, обычно применяемый в астрофизике, основан на построении следующих трех фундаментальных функций φ , L , Φ (см. [7]):

а) Функция Амбарцумяна φ определяется как основное решение (ОР) уравнения (3) (см. [7,16]). Она обладает следующими свойствами:

$$\varphi(s) \geq 1, \quad \varphi \downarrow \text{ по } s, \quad \int_a^b \frac{1}{s} \varphi(s) G(s) ds = 1 - \sqrt{1 - \lambda}. \quad (5)$$

Под ОР понимается предел простых итераций с нулевым начальным приближением. Оно является единственным "физическим" решением уравнения (3);

б) функция L определяется по формуле

$$L(\tau) = \int_a^b \exp(-\tau s) \varphi(s) G(s) ds, \quad \tau > 0. \quad (6)$$

Функция L обладает следующими свойствами, согласованными с (5):

$$L \geq 0, \quad \int_0^\infty L(\tau) d\tau = 1 - \sqrt{1 - \lambda};$$

в) Функция Φ определяется из следующего уравнения свертки типа Вольтерра:

$$\Phi(\tau) = V(\tau) + \int_0^\tau V(\tau - t) \Phi(t) dt. \quad (7)$$

Указанные функции имеют прямую связь с вольтерровой факторизацией уравнения переноса в бесконечной и полубесконечной среде. Факторизационная трактовка метода уравнения Амбарцумяна, которая будет описана ниже, значительно упрощает построение теории уравнения (1) в полубесконечной среде и будет использована нами к задачам переноса в слое конечной толщины.

Пусть Λ следующий интегральный оператор свертки:

$$\left(\hat{\Lambda} f \right)(\tau) = \int_d^\infty K(\tau - t) f(t) dt \quad (8)$$

с ядерной функцией (2). Случай $d = -\infty$ соответствует бесконечной среде, а случай $d = 0$ (или $d > -\infty$) - полупространству.

Рассмотрим следующую факторизацию (разложение):

$$I - \hat{\Lambda}_d = \left(I - \hat{L}_- \right) \left(I - \hat{L}_+ \right), \quad (9)$$

где I - единичный оператор, а $\hat{L}_\pm$ - следующие вольтерровы операторы свертки с одной и той же искомой ядерной функцией V :

$$\left(\hat{L}_+ f \right)(\tau) = \int_d L(\tau - t) f(t) dt, \quad \left(\hat{L}_- f \right)(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} (t - \tau) f(t) dt. \quad (10)$$

То обстоятельство, что в выражениях обоих операторов $\hat{V}_\pm$ фигурирует одна и та же ядерная функция L , обусловлено симметричностью ядра $K(\tau - t)$.

Раскрывая (9), с учетом правила композиции ядер при умножении интегральных операторов, после простых выкладок приходим к нелинейному уравнению факторизации (НУФ) (см. [16]):

$$L(\tau) = K(\tau) + \int_0^{\infty} L(t) L(\tau + t) dt. \quad (11)$$

НУФ (11) имеет один и тот же вид как для полубесконечной, так и для бесконечной среды.

При произвольном $\lambda \leq 1$ существует основное решение уравнения (11). Теперь мы воспользуемся представлением (2) ядра через экспоненты. Прямой постановкой проверяется, что тогда имеет место формула (6).

Итак, путем решения УА, по формуле (6) определяется функция L , через которую строится факторизация (9).

2.2. Резольвентная функция. Обратные операторы $(I - \hat{L}_\pm)^{-1}$ имеют вид:

$$\left(I - \hat{L}_\pm \right)^{-1} = I + \hat{\Phi}_\pm, \quad (12)$$

где

$$\left(\hat{\Phi}_+ f \right)(\tau) = \int_d \Phi(\tau - t) f(t) dt, \quad \left(\hat{\Phi}_- f \right)(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \Phi(t - \tau) f(t) dt. \quad \tau > 0. \quad (13)$$

Резольвентная функция Φ определяется из уравнения (7). Она допускает представление в виде суперпозиции экспонент: (см. [8,23]):

$$\Phi(\tau) = \int_0^b \exp(-\tau p) \psi(p) dp,$$

где функция ψ может иметь изолированную слагаемую в виде δ функции Дирака.

Функция Φ может быть записана в виде интеграла Стильтьеса:

$$\Phi(\tau) = \int_0^b \exp(-\tau p) d\omega(p). \quad (14)$$

Здесь ω - неубывающая функция, причем

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau) d\tau = \int_0^b \frac{1}{p} d\omega(p) = (1 - \lambda)^{-1/2} - 1 (\leq \infty).$$

Такая запись удобна в вопросах приближенного численно-аналитического решения уравнения (7).

2.3. Схема решения уравнения (1) в полубесконечной среде ($r = +\infty$) методом УА. Связь уравнения Амбарцумяна с вольтерровой факторизацией (9) приводит к следующей известной схеме решения уравнения переноса

$$\left(I - \hat{\Lambda}_d \right) S = g$$

с ядром (2), при $d \geq -\infty$ (в полубесконечной и бесконечной среде).

Шаг 1. Из уравнения Амбарцумяна (3) определяется функция Φ ;

Шаг 2. По формуле (6) определяется функция L .

Шаг 3. Из уравнения (7) определяется резольвентная функция Φ в виде (14).

Шаг 4. Решение уравнения (1) строится с применением формулы

$$S = \left(I + \hat{\Phi}_+ \right) \left(I + \hat{\Phi}_- \right) g,$$

где операторы $\hat{\Phi}_{\pm}$ определяются согласно (13).

При решении некоторых частных задач переноса, нахождение функции Φ не требуется. Например, решение задачи диффузного отражения от полубесконечной среды непосредственно выражается через функцию Φ (см. [1-3, 6, 7]).

3. Факторизация уравнения (1) в случае слоя конечной толщины.

3.1. Два продолжения функции источника S . Рассмотрим теперь уравнение (1) при $r < \infty$. Пусть $\hat{K}_r$ - интегральный оператор, участвующий в (1):

$$\left(\hat{K}_r f \right) (\tau) = \int_0^r K(\tau - t) f(t) dt.$$

Вид (2) ядра пока не будем использовать.

Для определенности будем считать, что функция g ограничена. Тогда уравнение (1) обладает единственным ограниченным решением S как в диссипативном случае $\lambda < 1$, так и в консервативном случае $\lambda = 1$.

Рассмотрим равенство (1) не только на интервале $[0; r]$, но и на всей вещественной оси $(-\infty; \infty)$. При этом будем считать, что

$$g(\tau) = 0, \quad \tau \notin [0, r].$$

Введем следующие два продолжения $f^{\pm}$ функции источника S :

$$f^+(\tau) = \int_0^r K(\tau-t)S(t)dt \quad \tau > r, \quad (15)$$

$$f^-(\tau) = \int_0^r K(\tau-t)S(t)dt \quad \tau < 0. \quad (16)$$

Обозначим через h^- , h и h^+ характеристические функции интервалов $(-\infty; 0)$, $[0; r]$ и $(r; \infty)$ соответственно. Например, $h(\tau) = 1$ при $0 \leq \tau \leq r$ и $h(\tau) = 0$ при $\tau \notin [0; r]$. Имеем:

$$h(\tau) + h^+(\tau) + h^-(\tau) = 1.$$

Наряду с уравнением (1), мы будем рассматривать следующее уравнение на всей прямой

$$f(\tau) = g(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau-t)f(t)h(t)dt, \quad -\infty < \tau < +\infty. \quad (17)$$

Имеют место очевидные равенства:

$$f(\tau) = S(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq r; \quad f(\tau) = f^-(\tau), \quad \tau < 0; \quad f(\tau) = f^+(\tau), \quad \tau > r. \quad (18)$$

Эти равенства указывают на следующий физический смысл функций $f^\pm$. Они представляют собой "крылья" функции источника для такой неоднородной бесконечной среды, которая получается из слоя Π , добавлением с двух сторон полупространств, в которых вероятность выживания поглощенного кванта равна нулю, в них первичные источники отсутствуют; распределение свободного пробега кванта во всей бесконечной среде описывается исходной ядерной функцией K .

Пусть $\hat{h}$, $\hat{h}^-$ и $\hat{h}^+$ операторы умножения на функции h , h^+ и h^- соответственно. Например, $(\hat{h}f)(\tau) = h(\tau)f(\tau)$. Имеем:

$$\hat{h}_+ \hat{h}^+ + \hat{h}^- = I. \quad (19)$$

Уравнение (1) можно записать в следующей векторно-операторной форме:

$$(I - \hat{T}\hat{h})f = g, \quad (20)$$

где $\hat{T} = \hat{T}_{-\infty}$ - интегральный оператор на всей прямой, рассмотренный в разделе 2.4:

$$(\hat{T}f)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau-t)f(t)dt.$$

Мы будем заниматься решением уравнения (20).

3.2. Факторизация оператора $I - \hat{T}\hat{h}$. В случае бесконечной среды сомножители в правой части (9) коммутируют. Поэтому при $d = -\infty$ имеют место равенства:

$$I - \hat{\Lambda} = \left(I - \hat{L}_- \right) \left(I - \hat{L}_+ \right) = \left(I - \hat{L}_+ \right) \left(I - \hat{L}_- \right). \quad (21)$$

Формулы (21) дают возможность построить следующие два разложения оператора $I - \hat{\Lambda} \hat{h}$, участвующего в уравнении (20):

$$I - \hat{\Lambda} \hat{h} = \left(I - \hat{L}_- \right) \left[I - \hat{L}_+ \hat{h} + \hat{\Phi}_- \left(\hat{h}^+ + \hat{h}^- \right) \right], \quad (22)$$

$$I - \hat{\Lambda} \hat{h} = \left(I - \hat{L}_+ \right) \left[I - \hat{L}_- \hat{h} + \hat{\Phi}_+ \left(\hat{h}^+ + \hat{h}^- \right) \right]. \quad (23)$$

Действительно, используя (19), (12) и разложение (21), получаем:

$$\begin{aligned} I - \hat{T} \hat{h} &= I - \hat{T} + \hat{T} \left(\hat{h}^+ + \hat{h}^- \right) = \left(I - \hat{V}_- \right) \left(I - \hat{V}_+ \right) + \hat{T} \left(\hat{h}^+ + \hat{h}^- \right) = \\ &= \left(I - \hat{V}_- \right) \left[I - \hat{V}_+ + \left(I + \hat{\Phi}_- \right) \hat{T} \left(\hat{h}^+ + \hat{h}^- \right) \right]. \end{aligned}$$

Из (21) имеем $(I + \hat{\Phi}_-) \hat{T} = \hat{V}_+ + \hat{\Phi}_-$. Поэтому имеет место (22). Разложение (23) проверяется аналогичным образом.

4. Применение разложений (22) и (23).

4.1. Система интегральных уравнений для $f^\pm$. Покажем, что разложения (22) и (23) сводят уравнение (20) (и тем самым - исходное уравнение (1)) к следующей системе интегральных уравнений относительно функций f^+ и f^-

$$f^-(\tau) = g^-(\tau) - \int_{\tau}^0 \Phi(t - \tau) f^-(t) dt - \int_r^{\infty} \Phi(t - \tau) f^+(t) dt, \quad \tau < 0, \quad (24)$$

$$f^+(\tau) = g^+(\tau) - \int_{-\infty}^0 \Phi(\tau - t) f^-(t) dt - \int_r^{\tau} \Phi(\tau - t) f^+(t) dt, \quad \tau > r, \quad (25)$$

где

$$g^- = \left(I + \hat{\Phi}_- \right) g, \quad g^+ = \left(I + \hat{\Phi}_+ \right) g,$$

$$\begin{aligned} g^-(\tau) &= g(\tau) + \int_{\tau}^r \Phi(t - \tau) g(t) dt, \quad \tau \leq r, \quad g^-(\tau) = 0, \quad \tau > r, \\ g^+(\tau) &= g(\tau) + \int_0^{\tau} \Phi(\tau - t) g(t) dt, \quad \tau \geq 0, \quad g^+(\tau) = 0, \quad \tau < 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Действительно, применяя к обеим частям (20) оператор $(I - \hat{V}_\pm)^{-1} = I + \hat{\Phi}_\pm$, получаем:

$$\left[I - \hat{V}_+ \hat{h} + \hat{\Phi}_- \left(\hat{h}^- + \hat{h}^+ \right) \right] f = g^-,$$

или

$$f(\tau) = g^-(\tau) + \int_{-\infty}^{\tau} V(\tau-t)h(t)f(t)dt - \int_{\tau}^{\infty} \Phi(t-\tau)[h^+(t) + h^-(t)]f(t)dt. \quad (27)$$

Полагая $\tau < 0$ в (27), мы приходим к (24). Аналогично получается соотношение (25).

4.2. Упрощение системы (24), (25). Рассмотрим функции $F_1^{\pm}$, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} F_1^-(\tau) &= f^-(\tau) + \int_{\tau}^0 \Phi(t-\tau)f^-(t)dt, \quad \tau < 0, \\ F_1^+(\tau) &= f^+(\tau) + \int_r^{\tau} \Phi(\tau-t)f^+(t)dt, \quad \tau > r. \end{aligned} \quad (28)$$

Введем обозначения

$$F^+(\tau) = F_1^+(\tau+r), \quad F^-(\tau) = F_1^-(\tau), \quad \tau > 0. \quad (29)$$

Используя (12), из (28) можно получить следующие выражения $f^{\pm}$ через $F_1^{\pm}$:

$$\begin{aligned} f^-(\tau) &= F_1^-(\tau) - \int_{\tau}^0 V(t-\tau)F_1^-(t)dt, \quad \tau < 0, \\ f^+(\tau) &= F_1^+(\tau) - \int_r^{\tau} V(\tau-t)F_1^+(t)dt, \quad \tau > r. \end{aligned} \quad (30)$$

Покажем, что функции $F^{\pm}$ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений типа Ганкеля (то есть - с ядрами, зависящими от суммы аргументов)

$$F^{\pm}(\tau) = q^{\pm}(\tau) - \int_0^{\infty} U(\tau+t+r)F^{\mp}(t)dt, \quad \tau > 0, \quad (31)$$

где

$$q^+(\tau) = g^+(\tau+r), \quad q^-(\tau) = g^-(\tau), \quad \tau > 0, \quad (32)$$

а ядерная функция U имеет вид

$$U(\tau) = \Phi(\tau) - \int_0^{\infty} \Phi(\tau+t)V(t)dt. \quad (33)$$

Из (24), (25) и (28) имеем

$$\begin{aligned} F_1^+(\tau) &= g^+(\tau) - \int_{-\infty}^0 \Phi(\tau-t)f^-(t)dt, \quad \tau > r, \\ F_1^-(\tau) &= g^-(\tau) - \int_r^{\infty} \Phi(t-\tau)f^+(t)dt, \quad \tau < 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 F^+(\tau) &= q^+(\tau) - \int_{-\infty}^0 \Phi(\tau+r-t) f^-(t) dt, \\
 F^-(\tau) &= q^-(\tau) - \int_r^{\infty} \Phi(\tau+t) f^+(t) dt, \quad \tau > 0.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Подставляя выражения (30) для $f^{\pm}$ в (34), после небольших выкладок получаем:

$$F^+(\tau) = q^+(\tau) - \int_{-\infty}^0 U(\tau+r-t) F_1^-(t) dt, \quad F^-(\tau) = q^-(\tau) - \int_r^{\infty} U(t-\tau) F_1^+(t) dt, \quad \tau > 0.$$

Используя (29), мы приходим к уравнениям (31).

Примечательно, что ядерная функция $U(\tau)$ является универсальной функцией, не зависящей от толщины r слоя. Она участвует в обоих уравнениях при $\tau \geq r$.

Итак, при решении уравнения (1) на конечном промежутке к фундаментальным функциям одной переменной φ , V и Φ присоединяется новая фундаментальная функция U .

4.3. Окончательная форма уравнений (34). Уравнения (31) справедливы независимо от представления (2) ядра K в виде суперпозиции экспонент. Поэтому эти уравнения могут быть применены к решению (1) в более общих ситуациях (например - при решении уравнения переноса резонансного излучения в движущейся среде).

Ниже мы займемся упрощением уравнений (31), используя при этом представление (2), функцию Амбарцумяна и представление (14) резольвентной функции Φ . С учетом (6) и (13), из (33) получаем:

$$U(\tau) = \int_a^b \exp(-\tau p) \left[1 - \int_a^b \frac{\varphi(s)}{s+p} G(s) d(s) \right] d\omega(p).
 \tag{35}$$

Согласно уравнению Амбарцумяна, выражение внутри квадратных скобок равно $[\varphi(p)]^{-1}$. Поэтому

$$U(\tau) = \int_0^b \exp(-\tau p) d\rho(p), \quad d\rho(p) = [\varphi(p)]^{-1} d\omega(p).
 \tag{36}$$

Из (36) видно, что ядерная функция $U(\tau+t+r)$ убывает с возрастанием r . Поэтому уравнения (31) решаются тем легче, чем больше r . Аналогичная ситуация имеет место в случае методов работ [14,15] и их модификаций.

Обозначим через $Q^{\pm}(p)$ преобразования Лапласа от функций $F^{\pm}$:

$$Q^{\pm}(p) = \int_0^{\infty} \exp(-\tau p) F^{\pm}(\tau) d\tau, \quad p \in (0; b).
 \tag{37}$$

Покажем, что (Q^+, Q^-) удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} Q^+(z) &= A^+(z) - \int_0^b \frac{1}{p+z} Q^-(p) \exp(-rp) d\rho(p), \\ Q^-(z) &= A^-(z) - \int_0^b \frac{1}{p+z} Q^+(p) \exp(-rp) d\rho(p), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$A^\pm(z) = \int_0^\infty \exp(-\tau z) q^\pm(\tau) d\tau, \quad (39)$$

$$A^+(z) = \int_r^\infty \exp[-(\tau-r)z] g^+(\tau) d\tau, \quad A^-(z) = \int_{-\infty}^0 \exp(\tau z) g^-(\tau) d\tau.$$

Из (31) и (36) имеем

$$F^\pm(\tau) = q^\pm(\tau) - \int_0^b \exp(-\tau p) Q^\mp(p) \exp(-rp) d\rho(p). \quad (40)$$

Умножая эти соотношения на $\exp(-\tau z)$ и интегрируя по τ на $[0, \infty)$, мы приходим к уравнениям (38).

Складывая и вычитая уравнения (38), можно получить отдельные уравнения относительно $Q^+ + Q^-$ и $Q^+ - Q^-$.

Используя выражения (26) и (13) для $g^\pm$ и Φ , получаем:

$$A^+(z) = \int_0^b \frac{1}{z+p} \bar{g}_+(p) d\omega(p), \quad A^-(z) = \int_0^b \frac{1}{z+p} \bar{g}_-(p) d\omega(p), \quad (41)$$

где

$$\bar{g}_-(p) = \int_0^r g(\tau) \exp(-\tau p) d\tau, \quad \bar{g}_+(p) = \int_0^r g(\tau) \exp[-(r-\tau)p] d\tau. \quad (42)$$

Обозначим через $C^\pm(p, s)$ решения следующих уравнений (в которых $s > 0$ - параметр)

$$C^\pm(z, s) = \frac{1}{z+s} \pm \int_0^b \frac{1}{p+z} C^\pm(p, s) \exp(-rp) d\rho(p). \quad (43)$$

Используя (41), в соответствии с принципом суперпозиции, функции $Q^\pm$ выражаем через $C^\pm$:

$$\begin{aligned} Q^+(z) + Q^-(z) &= \int_0^b C^+(z, p) [\bar{g}_+(p) + \bar{g}_-(p)] d\omega(p), \\ Q^+(z) - Q^-(z) &= \int_0^b C^-(z, p) [\bar{g}_+(p) - \bar{g}_-(p)] d\omega(p). \end{aligned} \quad (44)$$

4.4. *Определение функции источника S.* Рассмотрим теперь вопрос построения функции источника S по известным функциям $F^\pm$.

Рассматривая равенство (27) при $\tau \in [0, r]$, будем иметь следующее

уравнение типа Вольтерра для S :

$$S(\tau) = [g^-(\tau) - B(\tau)] + \int_0^{\tau} V(\tau - t) S(t) dt, \quad (45)$$

где

$$B(\tau) = \int_r^{\infty} \Phi(t - \tau) f^+(t) dt. \quad (46)$$

Из (30) имеем:

$$\int_r^{\infty} \exp(-tp) f^+(t) dt = \varphi^{-1}(p) \int_r^{\infty} \exp(-tp) F_1^+(t) dt. \quad (47)$$

Из (13), (46), (47) и (37) получаем:

$$B(\tau) = \int_0^b \exp[-(r - \tau)p] Q^+(p) d\rho(p). \quad (48)$$

Обозначим через $W(\tau, p)$ решение следующего уравнения типа восстановления (где $p > 0$ - параметр):

$$W(\tau, p) = \exp[-(r - \tau)p] + \int_0^{\tau} V(\tau - t) W(t, p) dt. \quad (49)$$

Используя резольвентную функцию Φ , получаем

$$W(\tau, p) = \exp[-(r - \tau)p] \left[1 + \int_0^{\tau} \Phi(t) \exp(-tp) dt \right], \quad \tau \leq r.$$

Используя (13), получаем:

$$W(\tau, p) = \exp[-(r - \tau)p] \left[1 + \int_0^b \frac{1}{p + q} (1 - \exp(-\tau(p + q))) d\rho(q) \right]. \quad (50)$$

Пусть S_0 является решением уравнения восстановления

$$S_0(\tau) = g^-(\tau) + \int_0^{\tau} V(\tau - t) S_0(t) dt. \quad (51)$$

Имеем:

$$S_0(\tau) = g^-(\tau) + \int_0^{\tau} \Phi(\tau - t) g^-(t) dt. \quad (52)$$

Сравнивая свободные члены уравнений (45), (49) и (51), с учетом (52), в соответствии с принципом суперпозиции получаем

$$S(\tau) = S_0(\tau) - \int_0^b W(\tau, p) Q^+(p) d\omega(p), \quad 0 \leq \tau \leq r. \quad (53)$$

Отметим, что $S_0(\tau)$ является решением уравнения (1) на полуоси со свободным членом $g(\tau)$, обращающимся в 0 при $\tau > r$,

$$S_0(\tau) = g(\tau) + \int_0^{\infty} K(\tau - t) S_0(t) dt.$$

Второе слагаемое в правой части (53) является поправкой, обусловленной конечностью g .

4.5. Схема решения уравнения (1), (2) при $g < \infty$. Теперь можно сформулировать последовательность шагов для решения уравнения (1) при $g < \infty$. Будем считать, что функции φ, V, Φ уже построены, т.е. реализованы все три шага схемы из раздела 2.4. Продолжим эту схему.

Шаг 4. Из (26) определяются функции $g^{\pm}$ в случае финитного свободного члена g .

Шаг 5. Из системы (38) определяются функции $Q^{\pm}$, где $A^{\pm}$ задаются посредством (39). При этом могут быть использованы формулы (44).

Шаг 6. Из (40) определяются функции $F^{\pm}$, где $q^{\pm}$ задаются посредством (32).

Шаг 7. Решение S -уравнения (1) определяется посредством (53), где W и S_0 определяются посредством (50) и (52), соответственно.

На вопросе численного решения рассматриваемой задачи мы в настоящей работе подробно останавливаться не будем. Ограничимся следующим замечанием. Применение метода дискретных ординат к уравнению связано с заменой исходной ядерной функции K , заданной посредством (2), конечной суммой вида

$$K(x) \approx \sum_{m=1}^N a_m \exp(-s_m x). \quad (54)$$

Хорошо известно, что при такой редукции исходное интегральное уравнение (1) эквивалентно краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения представляют собой результат дискретизации соответствующего интегро-дифференциального уравнения переноса. В результате той же редукции (54), в уравнении (38) переменные разделяются и они сводятся к конечной линейной алгебраической системе.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Институт математики НАН Армении,

e-mail: yengib@instmath.sci.am anibarseghyan@mail.ru

RADIATIVE TRANSFER IN PLANE LAYER OF
FINITE THICKNESS. THE METHOD OF
TWO-SIDE CONTINUATION

N.B.YENGIBARYAN, A.G.BARSEGHYAN

The work is devoted to a new method of solution of astrophysical problems of radiative transfer. With the use of Ambartsumian equation, the problem is reduced to the two integral equations of a fundamental nature, allowing a simple numerical-analytical solution.

Key words: *transfer equation:method of two-side continuation*

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Амбарцумян, Научные труды. Изд.-во Академии наук Арм. ССР, Ер., 1960, т.1, с.431.
2. I.M.Busbridge, The mathematics of the radiative transfer, Oxford, 1960.
3. С.Чандрасекар, Перенос лучистой энергии. М., ИЛ, 1953, с.432.
4. К.М.Кейз, П.Ф.Цвайфел, Линейная теория переноса, М., Мир, 1972.
5. D.Michalas, Stellar Atmospheres, W.H.Freeman and Company, 1978.
6. В.В.Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гостехиздат, 1956.
7. В.В.Соболев, Курс теоретической астрофизики, М., Наука, 1985.
8. В.В.Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел. М., Наука, 1969.
9. Д.И.Нагирнер, Астрофизика, 26, 1, 1987.
10. Н.Б.Енгибарян, Астрофизика, 1, 297, 1965.
11. Дж.Кастти, Р.Калаба, Методы погружения в прикладной математике, М., Мир, 1976.
12. G.Yamamoto, Sci Rep. Tohoku Univ. Ser. 5, Geophysics, 71, 1955.
13. V.V.Sobolev, J., 39, 229, 1962.
14. Н.Б.Енгибарян, М.А.Мнацаканян, ДАН СССР, 217, 3, с.533-536, 1974.
15. Н.Б.Енгибарян, М.А.Мнацаканян, Матем. заметки, 19:6, 1976, 927-932.
16. Л.Г.Арабаджян, Н.Б.Енгибарян, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, 22, М., ВИНТИ, 1984, 175-244.
17. J.Casti, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 72, pp.1210-1211, 1975.
18. О.В.Пикичян, ДАН СССР, 273, 861, 1983.
19. Э.Х.Даниелян, Астрофизика, 37, 129, 1994.
20. A.G.Nikoghossian, JQSRT, 61, 345, 1999.
21. А.Н.Афян, А.Х.Хачатрян, ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ., 41:8 2001, 1217-1228.
22. А.Г.Барсегян, Изв. НАН РА, Математика, 40:3, 2005, 22-32.
23. Н.Б.Енгибарян, А.А.Погосян, Матем. заметки, 47:6, 1990, 23-30.