АСТРОФИЗИКА

ТОМ 55 НОЯБРЬ, 2012 ВЫПУСК 4

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ БЛЕСКА ЗАТМЕННЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД ТИПА АЛГОЛЯ

И.Л.АНДРОНОВ

Поступила 16 августа 2012
Принята к печати 12 сентября 2012

Мы предлагаем специальный класс функций для математического моделирования периодических сигналов специального типа с неравномерным распределением аргументов. Данный метод разработан для определения феноменологических характеристик кривых блеска, необходимых для регистрации в "Общем каталоге переменных звезд" и других базах данных. Для типов затменных двойных звезд с плавными кривыми блеска - EB и EW рекомендуется тригонометрический полином оптимальной степени в полной или симметричной форме. Для затменных двойных систем с относительно узкими минимумами статистически оптимальной является аппроксимация кривых блеска в классе неполиномиальных сплайн-функций. Используется комбинация тригонометрического полинома второго порядка (TP2, что описывает эффекты "отражения", "эллипсоидальности" и "пятнистости") и локализованных вкладов минимумов (параметризованных по глубине и профиля отдельно для главного и вторичного минимумов). Такое приближение характеризуется статистической точностью сглаживающей кривой, которая до ~1.5-2 раз лучше, чем у тригонометрического полинома статистически оптимальной степени, а также отсутствием ложных "волн" на кривой блеска, связанных с эффектом Гиббса. Кроме ширины минимума, которую невозможно определить при аппроксимации тригонометрическим полиномом, метод позволяет определять с лучшей точностью его глубину, а также разделить эффекты затмения и внезатменной части. Для многоцветных наблюдений, улучшение точности сглаживающей кривой в каждом фильтре позволит с лучшей точностью получить кривые изменения показателя цвета. Эффективность предложенного метода повышается с уменьшением ширины затмения. Метод дополняет аппроксимацию тригонометрическим полиномом. Метод, названный NAV ("New Algol Variable"), иллюстрирован применением для затменных двойных систем VSX J022427.8-104034=USNO-B1.0 0793-0023471 и BM UMa. Для VSX J022427.8-104034 рассмотрена альтернативная модель "удвоенного периода".

Ключевые слова: *двойные звезды:типа Алголя:феноменологическое моделирование*

1. *Введение*. Исследование переменных звезд является одним из важнейших направлений современной астрофизики. Для классификации новых открытых переменных звезд и занесения их в "Общий каталог переменных звезд" [1] (регулярно обновляемая электронная версия доступна по адресу http://www.sai.msu.su/groups/cluster/gcvs/gcvs/) или другие базы данных (напр. "Variable Star Index", http://www.aavso.org/vsx, или национальные, или обсерваторские списки новооткрытых переменных звезд), необходимо определение характеристик переменности. В частности, для поиска возможной периодичности используется большое количество методов периодограммного

анализа. Их условно можно разделить на группы "непараметрических" (или "точка-точка") и "параметрических" (или "точка-линия"). К непараметрическим относятся: метод Лафлера-Кинмана [2], усовершенствованный Холоповым [3] и его модификации, сравнительный анализ которых был проведен Андроновым и Чинаровой [4]. Параметрические методы основаны на анализе отклонений индивидуальных наблюдений ("точек") от сглаживающей кривой ("линия"), параметры которой определяются методом наименьших квадратов (см. монографию Андерсона [5]). Проблемы выделения периодических компонент сигналов рассмотрены также в монографиях Теребижа [6,7].

В данной работе мы рассматриваем алгоритм аппроксимации периодических процессов с использованием базисных функций специального вида специально для звезд типа Алголя (EA). Это "затменно-двойные со сферическими или слегка эллипсоидальными компонентами, обладающие кривыми блеска, позволяющими фиксировать моменты начала и конца затмений" [8,1,9] в отличие от звезд типов EB и EW. С математической точки зрения это означает, что изменения у EB и EW плавные (производная непрерывна), а у EA производная резко изменяется в моменты начала и конца затмения. Поэтому для кривых блеска типов EB, EW коэффициенты тригонометрического полинома быстро убывают с номером гармоники, и статистически оптимальная степень s сравнительно невелика [10,11].

При уменьшении ширины минимума D, являющейся обязательным параметром для этого типа звезд в "Общем каталоге переменных звезд" [1], величина s увеличивается, что приводит к ухудшению качества аппроксимации - как за счет появления формальных "волн" на кривой блеска (эффект Гиббса [12]), так и к увеличению статистической погрешности аппроксимации [10,11].

"Феноменологическое" моделирование является оптимальным для большинства известных двойных звезд, поскольку "физическое" моделирование (см. монографию [13]) на основании метода Вилсона-Девинни [14] и его многочисленных модификаций требует дополнительной информации о температурах и лучевых скоростях обеих компонент и отношении масс, которая доступна лишь для ~1% объектов. Для остальных ~99% актуальными остаются "феноменологические" модели.

Определение физических характеристик компонент (и, возможно, пятен) требует решения некорректной обратной задачи (напр., [15]) и обычно приводит к протяженной области решений в пространстве параметров, которые дают сходные по качеству аппроксимации результаты. Как показано далее в этой работе, "феноменологическое" моделирование дает согласие с "физической" аппроксимацией в пределах погрешностей, однако, требует значительно меньших вычислительных затрат.

2. *Математические модели.*

2.1. *Тригонометрический полином.* Для периодических сигналов

выполняется соотношение $x(1+kP)=x(t)$, где $x(t)$ - значение сигнала в момент времени t, P - период и k - произвольное целое число. Если измеряемым сигналом является блеск (звездная величина), то график зависимости $x(t)$ наблюдаемых значений сигнала x_i от времени t_i ($i=1, \ldots n$ - номер текущего наблюдения) называется "кривой блеска". Поскольку часто наблюдения астрономических объектов проводятся не непрерывно, а в дискретные моменты времени (напр., патрульный фотографический, визуальный или ПЗС мониторинг), то такое представление данных не является удобным. Для звезд с моно-периодическими изменениями можно записать общее выражение для тригонометрического полинома степени s (иногда называемого усеченным рядом Фурье [13]):

$$x_{TP,s}(t)=C_1+\sum_{j=1}^{s}\left(C_{2j}\cos(j\,\omega(t-T_0))+C_{2j+1}\sin(j\,\omega(t-T_0))\right)= \tag{1}$$

$$=C_1+\sum_{j=1}^{s}R_j\cos(j\,\omega(t-T_{0j})). \tag{2}$$

Здесь неизвестными являются коэффициенты C_α, $\alpha=1,\ldots,m$, $m=1+2s$, $\omega=2\pi/P$ - основная круговая частота, $j\omega$ - круговая частота гармоники номер (j-1), T_0 - "начальная эпоха" (эта аппроксимация от нее не зависит). Больший физический смысл имеет вторая форма записи, где используется полуамплитуда R_j волны с круговой частотой $j\omega$ и "начальная эпоха" T_{0j}, соответствующая максимуму значения вклада соответствующей волны.

Отметим, что, для симметричных кривых блеска $x(T_0+\tau)=x(T_0-\tau)$, целесообразно использовать аппроксимацию с $m=1+s$ коэффициентами и $R_j=C_j-1$:

$$x_{TP,s}(t)=C_1+\sum_{j=1}^{s}C_{j+1}\cos(j\,\omega(t-T_0)). \tag{3}$$

Однако вопрос о наличии асимметрии обычно решается в результате оценки статистической значимости коэффициентов при синусах $C_{2j}+1$ в (1), при начальной эпохе T_0, соответствующей минимуму сглаживающей кривой.

Учитывая, что максимум звездной величины соответствует минимуму потока, это иногда приводит к недоразумениям в статьях. Например, при исследовании пульсирующих звезд, начальная эпоха соответствует максимуму блеска (т.е. минимуму звездной величины). Поэтому в [10,11] перед суммой стоит знак "минус". Однако для затменных звезд минимум блеска соответствует максимуму звездной величины, поэтому в данной статье удобнее использовать именно такое определение (2).

Для фиксированного значения степени тригонометрического полинома s и в общем случае неравномерных аргументов сигнала, коэффициенты C_α следует определять методом наименьших квадратов (напр., [16]). На практике, во многих статьях применяются упрощенные формулы для "численного преобразования Фурье", которые дают значения коэффициентов, отличающиеся

от статистически оптимальных, полученных методом наименьших квадратов.

"Симметричная" форма (3) используется для исследования зависимостей амплитуд R_j от физических характеристик затменной двойной системы (напр., [17]).

Для иллюстрации поиска статистически оптимальной степени тригонометрического полинома s для системы типа EA, используем наблюдения затменной двойной звезды VSX J022427.8-104034 = USNO-B1.0 0793-0023471 (далее VSX0224) в созвездии Кита, открытой Н.А.Вирниной.

Наблюдения опубликованы на сайте AAVSO http://www.aavso.org/vsx/docs/239151/1027/var_photometry.txt. Сообщение об открытии опубликовано в электронном циркуляре VSNET http://ooruri.kusastro.kyoto-u.ac.jp/mailarchive/vsnet-ecl/3749, где, используя нашу программу [10] и параметр $s=9$, определены значения периода $P=0.522734\pm0.000015^d$, начальной эпохи $T_0=2455106.3231\pm0.0005^d$, сглаженных значений блеска в минимуме $m_{min}=16.079\pm0.008^m$ (без фильтра, калибровка в системе R) и максимуме $m_{max}=15.417\pm0.011^m$.

На рис.1. показаны зависимости характеристик аппроксимирующих функций в зависимости от степени тригонометрического полинома s (см. подробнее [10,11,16]). По разным критериям оптимальными являются значения

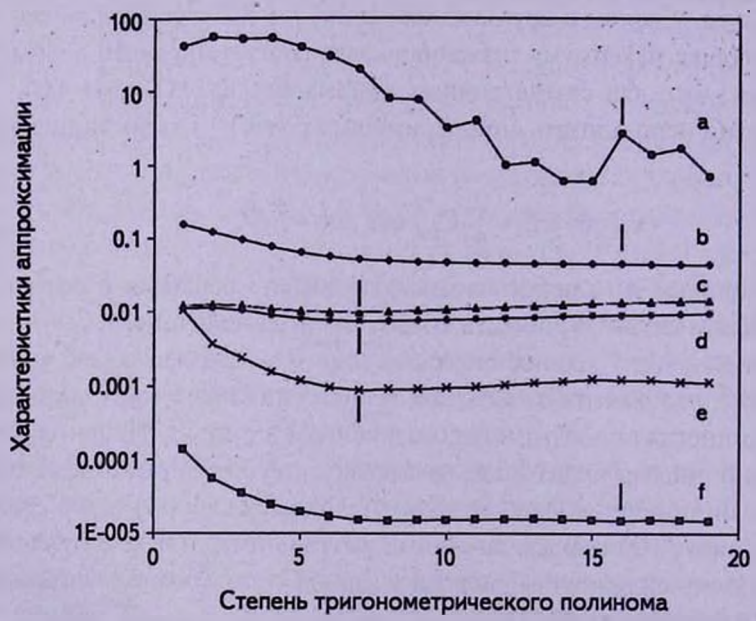

Рис.1. Зависимости от степени тригонометрического полинома s характеристик аппроксимаций кривой блеска затменной звезды VSX0224: a - log FAP, b - среднеквадратичного отклонения наблюдений от сглаживающей функции; c - среднеквадратичного значения точности сглаживающей кривой блеска; d - точности определения блеска в минимуме; e - точности определения фазы минимума; f - точности определения периода. Вертикальные черточки соответствуют оптимальному (для данного критерия) значению s.

$s = 16$ (критерий Фишера с вероятностью ложной тревоги FAP < 0.01; минимальная статистическая погрешность определения фотометрического периода) и $s = 7$ (минимальная статистическая погрешность определения сглаживающей функции; блеска в минимуме; фазы минимума).

Данный результат подтверждает, что критерий Фишера часто дает завышенную оценку оптимальной степени s, что может быть связано с коррелированностью отклонений наблюдений, полученных в близкие моменты времени, от сглаживающей кривой.

Использованное Н.А.Вирниной значение $s = 9$ соответствует значительно меньшему значению $\mathrm{FAP} < 2 \cdot 10^{-8}$ ($-\log \mathrm{FAP} = 7.7$). Однако анализ кривых блеска показывает, что, поскольку минимум на кривой блеска узкий, то аппроксимации при $s = 7$ и $s = 9$ проходят существенно выше наблюдаемых точек, и $s = 16$ соответствует существенно лучшему описанию самого минимума, хотя на внезатменной части кривой появляются "волны" из-за эффекта Гиббса.

Поэтому в дальнейшем для построения фазовых кривых VSX0224 используются значения $T_0 = \mathrm{HJD}\ 2455106.3236 \pm 0.0006$, $P = 0.522724 \pm 0.000014^d$, соответствующие $s = 16$. Значение блеска в минимуме $m_{min} = 16.109 \pm 0.009^m$ существенно лучше соответствует наблюдениям.

2.2. *Метод "асимптотических парабол"*. Для независимой оценки параметров минимума на фазовой кривой мы использовали метод "асимптотических парабол" [18]. По 82 точкам в интервале фаз от -0.06 до +0.06 получено значение $m_{min} = 16.154 \pm 0.015^m$, что соответствует "треугольному" профилю минимума. Точность определения фазы минимума практически одинакова для тригонометрического полинома с $s = 16$ (0.00119) и "асимптотических парабол" (0.00122).

2.3. *Метод "кусочных аппроксимаций"*. С учетом локальности минимумов полной продолжительностью D [1], естественно разделить фазовую кривую блеска на части - "внезатменную" ($D/2$,0.5-$D/2$; 0.5+$D/2$,1-$D/2$), "главный минимум" (-$D/2$,+$D/2$) и "вторичный минимум" (0.5-$D/2$,0.5+$D/2$). Предполагаем, что период и начальная эпоха определены другими методами (обычно, для уже известных звезд, с учетом более ранних наблюдений других авторов), а орбита двойной звезды является круговой (поэтому главный и вторичный минимумы имеют одинаковую продолжительность D, и разделены половиной периода P). Как обычно, считаем, что фазы ϕ ($E + \phi = (t - T_0)/P$) из интервала [0,1) могут быть расширены на все вещественные значения добавлением к ним произвольных целых чисел. Целочисленные значения E называют "номером цикла" (напр., [8,9]).

При таких предположениях, можно записать

$$x_C(\phi) = C_1 + C_2 \cos(2\pi\phi) + C_3 \sin(2\pi\phi) + C_4 \cos(4\pi\phi) + C_5 \sin(4\pi\phi) + \\ + C_6 H(\phi; C_8; \beta_1) + C_7 H(\phi - 0.5; C_8; \beta_2). \quad (4)$$

В предположении круговой орбиты ширина $D=2C_8$ обоих минимумов одинакова. Однако в общем случае глубины C_6, C_7 и параметры профиля β_1 и β_2 различны для главного и вторичного минимумов.

Использование тригонометрического полинома степени 2 для аппроксимации внезатменной части кривой блеска обусловлено физическими моделями. Коэффициенты C_2, C_4 соответствуют главным вкладам эффектов "отражения" и "эллипсоидальности", а C_3, C_5 описывают асимметрию кривой, обычно связанную с эффектом O'Connel (пятнистостью одной или обеих звезд) (напр., [9,13]).

Основная проблема в выборе безразмерной функции $V(z)=H(\phi;C_8;\beta)$, описывающей профиль минимума, где $z(\phi;C_8)=\phi/C_8$. Для ограниченных по ширине функций, для $|z|\geq 1$ принимаем $V(z)=0$, т.е. в дальнейшем речь идет об определении функции $V(z)$ только внутри интервала [-1,1].

Очевидно, из-за симметрии минимума функция должна быть симметрична $V(-z)=V(z)=V(|z|)$ и, желательно, $V(0)=1$. Требование непрерывности и кусочной монотонности кривой блеска приводит к условиям $V(\pm 1)=0$, $dV(|z|)/d|z|\leq 0$.

В монографии [12] приводятся классические "функции фильтра": "прямоугольная" $V(z)=1$, "треугольная" (Бартлетта) $V(z)=1-|z|$, фон Ганна $V(z)=(1+\cos\pi z)/2$ и др. Однако их профили сильно отличаются от наблюдаемых у затменных звезд. Кроме того, для описания профилей минимумов, желательно выполнение требований скорости вычисления (простоты) функции $V(z)$ и минимального количества дополнительных параметров (β). Следующим классом функций, рассмотренных для аппроксимации, был

$$V(z)=\left(1-z^2\right)^{\beta}. \tag{5}$$

Семейство функций $V(z)$ показано на рис.2 (слева). При $\beta=0$, получаем классический "прямоугольный" профиль, при $\beta=0.5$ - "полуокружность", при $\beta=1$ - параболу, при $\beta\to\infty$, гауссиану $V(z)=\exp\left(-\beta|z|^2\right)$.

Альтернативным классом функций является предложенный в 2010г. Андроновым [19, http://www.astrokarpaty.net/kolos2010abstractbook.pdf]:

$$V(z)=\left(1-|z|^{\beta}\right)^{3/2}. \tag{6}$$

Семейство этих функций показано на рис.2 (справа). Фиксированный показатель степени, равный 3/2, соответствует асимптотической форме вблизи границы затмения (см. ниже). При $\beta\to 0$, функция показывает уменьшение ширины до нуля, что не имеет физического смысла. При $\beta\to 1$, профиль наиболее близок к треугольному. С увеличением β, профиль становится более плоским вблизи середины, что соответствует полному затмению. Таким образом, предварительный качественный анализ показывает

применимость семейства функций (6) для описания фазовых кривых блеска затменных двойных типа EA. Поскольку метод был разработан для новых переменных типа Алголя, он был назван NAV (New Algol Variable).

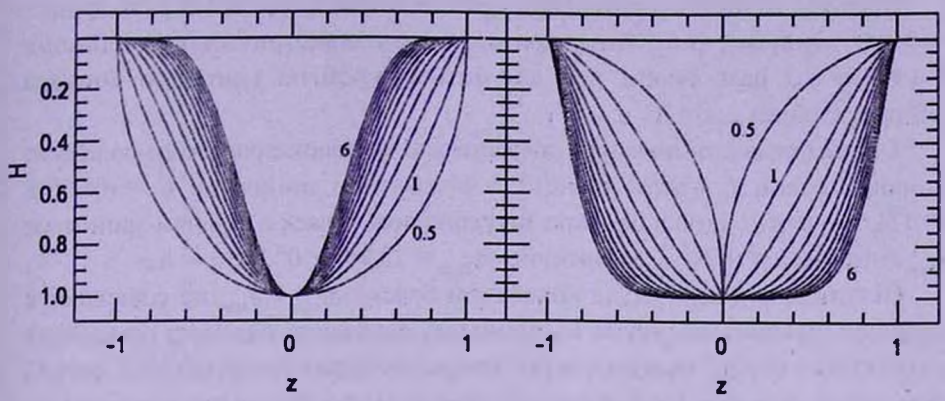

Рис.2. Значения функции $H(z;\beta)$ для разных β от 0.5 до 6 с шагом 0.5 для (5) (слева) и (6) (справа).

2.4. *Определение параметров аппроксимации*. В соотношении (4), параметры C_1, ..., C_7 могут быть определены линейным методом наименьших квадратов при фиксированных значениях параметров $C_8 = D/2$, $C_9 = \beta_1$, $C_{10} = \beta_2$. При этом, "скрытыми неизвестными параметрами" являются также начальная эпоха T_0 и период P, используемые для определения фаз наблюдений.

Сами параметры C_8, C_9, C_{10} могут быть определены любым из соответствующих численных методов - перебором, Монте-Карло или дифференциальных поправок. Для последнего метода необходимо вычисление производных от сглаживающей функции по данным параметрам. Промежуточные производные от функции профиля минимума равны

$$dV/d|z| = -1.5\beta|z|^{\beta-1}\left(1-|z|^{\beta}\right)^{1/2}, \tag{7}$$

$$dV/d\beta = -1.5\beta|z|^{\beta}\left(1-|z|^{\beta}\right)^{1/2}\ln|z|. \tag{8}$$

Несмотря на простоту используемых функций и соответствующих производных, программа вычисления сглаживающей функции и ее производных достаточно громоздка из-за кусочной заданности аппроксимации. Метод дифференциальных поправок (напр., [10,11]) требует определения начальных значений параметров вблизи оптимального значения. Поэтому нами реализован метод перебора параметров, а затем уточнения их значений методом дифференциальных поправок.

Для фазовой кривой ,использованной выше для примера объекта VSX0224, нами получены следующие значения параметров: $C_8 = 0.1012$, $C_9 = 1.040$,

$C_{10} = 0.1$, $\sigma = 0^m.0466$. По величине среднеквадратичного отклонения наблюдений от сглаженной кривой, такая аппроксимация соответствует тригонометрическому полиному степени $s = 10$ с $m = 1 + 2s = 21$ параметрами.

Средняя точность сглаженной кривой $0^m.0065$, что в 1.5 раза лучше, чем для наилучшего по этому критерию тригонометрического полинома с $s = 7$ и в 2 раза лучше, чем для оптимальной по критерию Фишера аппроксимации с $s = 16$.

Глубина главного минимума относительно тригонометрического полинома второй степени $C_6 = 0.686 \pm 0^m.012$, а вторичного минимума $C_7 = -0.085 \pm 0^m.124$, что равно нулю в пределах погрешностей. Блеск в главном минимуме $m_{min} = 16.156 \pm 0^m.008$, в максимуме $m_{Max} = 15.437 \pm 0^m.005$.

Отметим, что амплитуда колебаний блеска $m_{min1} - m_{Max}$ не совпадает с глубиной главного минимума C_6, поскольку последний параметр показывает уменьшение блеска относительно "аппроксимации внезатменной части". Этот подход близок к "ректификации" кривой блеска [9], однако используется только для минимумов, а не для всей кривой.

Еще одну аппроксимацию минимума предложили в 2011г. Микулашек и др. [20], которую в наших обозначениях можно записать как:

$$V(z) = 1 - \left(1 - \exp\left(-z^2\right)\right)^{\beta}. \qquad (9)$$

При $\beta = 1$ эта функция совпадает с гауссианой. Однако, как и в случае приближения (5), дает семейство функций. Очевидно, что для этой функции ограничение $|z| \le 1$ отсутствует, и минимум формально имеет бесконечную ширину. Поэтому определение параметра D для "Общего каталога переменных звезд" с использованием такой функции невозможно.

Для VSX0224 наилучшая аппроксимация при $C_5 = 0.0536$, что существенно меньше приведенного выше значения; $\sigma = 0^m.0476$, $C_6 = 0.622 \pm 0^m.012$, $m_{min} = 16.093 \pm 0^m.007$, что хуже, чем аппроксимация тригонометрическим полиномом или функцией NAV (4,6).

Полная форма аппроксимации у [20] отличается от нашей. Из тригонометрического полинома оставлено только слагаемое с косинусом удвоенной фазы (что соответствует эффекту "эллипсоидальности" только), а эффект O'Connel описывается комбинацией из трех синусоид. Такое приближение еще хуже описывает фазовую кривую.

Сглаженные кривые блеска, полученные разными методами, показаны на рис.3. Наилучшей для описания как внезатменной части кривой блеска, так и затмения, является аппроксимация методом NAV (рис.3с).

Хотя для "физического" моделирования звездные величины обычно переводят в относительные интенсивности, и такой сигнал также может быть аппроксимирован методом NAV (в том числе, для многоцветных наблюдений и с учетом точности индивидуальных наблюдений), для занесения феноменологических характеристик в каталоги удобнее исполь-

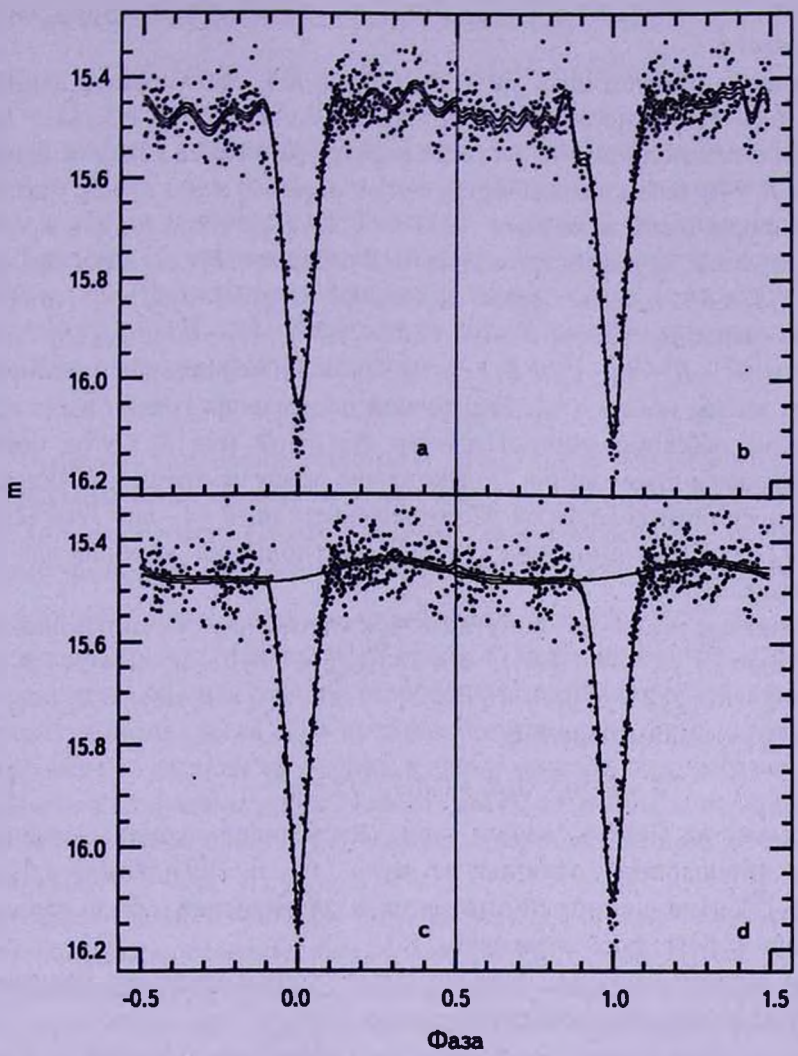

Рис.3. Аппроксимации фазовой кривой затменной переменной VSX0224: a - тригонометрическим полиномом степени $s = 7$; b - $s = 16$; c - методом NAV; d - с использованием функции (9) [20]. Показаны коридоры ошибок для сглаживающих функций. Для аппроксимаций (c,d) показаны продолжения на фазы затмений внезатменной части.

зовать звездные величины.

2.5. *Кривая блеска для упрощенной модели сферических компонент*. Не приводя полный набор формул, используемых для вычисления "физических" моделей кривых блеска, многократно описанных в литературе [9,13-15], рассмотрим самый простой случай сферических компонент (подробнее описан в монографии [21]). Также пренебрегаем потемнением диска к краю. Для слегка вытянутых компонент, использовался метод "ректификации" кривой блеска делением потока на данной фазе на

сглаженное значение, полученное аппроксимацией внезатменной части кривой блеска.

Обозначим радиусы двух звезд R_1 и R_2 ($\le R_1$), светимости в данном фильтре L_1 и L_2 и относительные потоки $l_1 = L_1/(L_1+L_2)$, $l_2 = L_2/(L_1+L_2)$. Тогда наблюдаемый поток $l(\Theta)=1$, если видимое расстояние между центрами звезд $\Theta \ge R_1+R_2$ (внезатменная часть); $l(\Theta)=l_1$, если $0 \le \Theta \le R_1-R_2$ (полное затмение, вторая звезда за первой); $l(\Theta)=1-l_1\ (R_2/R_1)^2$, если $0 \le \Theta \le R_1-R_2$ (частное затмение, первая звезда за второй). В интервале $R_1-R_2 \le \Theta \le R_1+R_2$, $l(\Theta)=1-l_1 S/\pi R_1^2$ (первая звезда за второй), $l(\Theta)=1-l_2 S/\pi R_2^2$ (вторая звезда за первой). Здесь $S=(\gamma_1-0.5\sin 2\gamma_1)R_1^2+(\gamma_2-0.5\sin 2\gamma_2)R_2^2$, где $\gamma_0=\arccos\left(\Theta^2+R_j^2-R_{3-j}^2\right)/\left(2\Theta R_j\right)$ - угол между линией центров и вектором от центра звезды номер $j(=1,\ 2)$ и точкой пересечения границ звезд при проекции на небесную сферу. Параметр $\Theta = a\sin\theta$ (где θ - угол между линией центров и лучом зрения, a - расстояние между центрами звезд) связан с наклонением орбиты i и фазой ϕ соотношением $\sin^2\theta = 1-\sin^2 i\cos^2(2\pi\phi)$ (напр., [22]). Очевидно, при $i=90°$, соотношение упрощается до $\theta=\arcsin|\sin(2\pi\phi)|$.

Для малых углов α получаем асимптотическое соотношение $(\gamma-0.5\sin 2\gamma)\approx 2\gamma^3/3 = 2h^3/(3R^3)$, $S\approx 2h^3(1/R_1+1/R_2)/3$ и $\eta_1=(R_1+R_2)-$ $-\Theta\approx\left(R_1\gamma_1^2+R_2\gamma_2^2\right)/2 = h^2(1/R_1+1/R_2)/2$, где $h=R_1\sin\gamma_1=R_2\sin\gamma_2\approx$ $\approx R_1\gamma_1\approx R_2\gamma_2$. Таким образом,

$$S\approx 2^{5/2}\eta_1^{3/2}(1/R_1+1/R_2)^{-1/2}/3\sim\eta_1^{3/2}. \qquad (10)$$

Поскольку на фазе ϕ_e начала (или, симметрично, конца) затмения $\eta=0$, а производная отлична от нуля, то $\eta_1=(d\eta/d\phi)(\phi-\phi_e)$, и $S\sim(\phi-\phi_e)^{3/2}$, Именно это асимптотическое соотношение и было использовано при выборе формы затмения (6).

Перед входом в полную фазу затмения (второй контакт), получаем аналогичное асимптотическое соотношение

$$\pi R_2^2-S\approx 2^{5/2}\eta_2^{3/2}(-1/R_1+1/R_2)^{-1/2}/3\sim\eta_2^{3/2}, \qquad (11)$$

где $\eta_2=\Theta-(R_1-R_2)$. Конечно, такую модель также можно было бы внести в программу и определять 4 дополнительных параметра l_1 (= 1 - l_2), R_1/a, R_2/a, I вместо одного β. Затраты времени на вычисления становятся сравнимыми с необходимыми для вычисления "физических" моделей, и поэтому такая "упрощенная модель" бесполезна.

Производная функции (10) равна нулю при $\eta_1=0$, что означает, что производная от блеска по фазе не имеет скачка в моменты входа и выхода из затмений. Однако она быстро увеличивается, поэтому можно говорить о границах затмений.

Можно предложить бесконечное количество монотонных функций, удовлетворяющих асимптотическим зависимостям для начала и конца

нисходящей ветви затмения. Такими свойствами обладает, напр., функция

$$V(\phi) = \kappa\, w(\chi)(1-\chi)^{3/2} + (1-\kappa)\left(1-(1-w(\chi))\chi^{3/2}\right), \qquad (12)$$

где $w(\chi)$ - весовая функция, равная 1 при $\chi = 0$ и 0 при $\chi = 1$, а ее первая и вторая производная равны нулю на концах интервала [0,1]. Здесь $\chi = (|\phi| - \phi_2)/(\phi_1 - \phi_2)$, где ϕ_1 и ϕ_2 - фазы конца затмения и конца полной фазы затмения, которые также являются неизвестными параметрами, как и κ. Параметр κ связан с различием коэффициентов пропорциональности в (10) и (11). Предполагая симметрию функции $w(\chi)$ относительно середины интервала ($\chi = 0.5$), можно предложить, напр., простейшую полиномиальную функцию с указанными свойствами

$$w(\chi) = 1 - 10\chi^3 + 15\chi^4 - 6\chi^5 . \qquad (13)$$

Функция (12) хорошо описывает восходящую или симметричную ей нисходящую ветвь, однако, по количеству параметров, не является удобной для аппроксимации. Поэтому вместо данной модели мы использовали форму минимума (6) с одним феноменологическим параметром β.

2.6. *Гипотеза удвоенного периода для VSX0224.* Несмотря на то, что электронные публикации об открытии переменности VSX0224 содержат информацию об орбитальном периоде $P = 0.5227^d$, отсутствие вторичного минимума вблизи фазы 0.5 в пределах погрешностей вызывает удивление, поскольку оно является аргументом в пользу того, что поверхностная яркость вторичного компонента пренебрежимо мала по сравнению с этим параметром для главного компонента, т.е. спутник имеет существенно более низкую температуру.

Модель системы могла бы быть проверена в будущем при проведении спектральных и многоцветных фотометрических наблюдений.

При наличии одноцветных наблюдений, как в случае VSX0224, возможен дополнительный тест. Предположим, что истинный период вдвое больше: $P = 2 \cdot 0.522724^d = 1.045448^d$, а главный и вторичный минимумы сравнимы по глубине. Тогда, с использованием процедуры NAV, получим новую аппроксимацию с несколько меньшим разбросом $\sigma = 0^m.0457$. По критерию Фишера, вероятность случайного уменьшения до такой величины составляет 33%, т.е. вдвое больше вероятность альтернативной гипотезы неслучайного уменьшения. Соответствующий набор параметров: $C_8 = 0.0528$ (что ненамного больше, чем половина значения $C_8 = 0.1040$ при рассмотренной выше гипотезе "короткого периода"), $C_9 = 1.030$ (что согласуется с приведенным ранее результатом), $C_{10} = 0.940$ (естественно, при наличии явно выраженного вторичного минимума, значение стало более близким к C_9). Блеск в минимумах $16.158 \pm 0^m.008$ (фаза 0.0), $16.203 \pm 0^m.016$ (фаза 0.5). Следует отметить понижение блеска на внезатменной части вблизи фазы 0.86, что может быть интерпретировано холодным пятном на одном из компонентов

двойной системы.

Глубины минимумов $C_6 = 0.692 \pm 0^m.010$ и $C_7 = 0.745 \pm 0^m.019$, т.е. более глубоким (главным) в этой модели является минимум на фазе 0.5, т.е. для внесения в каталог следует использовать начальную эпоху $T_0 = 2455106.8463 \pm 0.0006^d$. Разность глубин $C_7 - C_6 = 0.062 \pm 0^m.021$ составляет 3σ, и может считаться статистически значимой.

С учетом формулы Погсона, в минимуме затмевается часть потока

$$l = 1 - 10^{-0.4C}, \qquad (14)$$

где $C = C_6$ для минимума на фазе 0.0 и $C = C_7$ для минимума на фазе 0.5. Для полученных значений, $l_1 = 0.4713 \pm 0.049$, $l_2 = 0.4965 \pm 0.0089$. Значение $l_1 + l_2 = 0.9678 \pm 0.0101$ весьма близко к единице, что свидетельствует о том, что оба затмения "почти полные". Отношение средних поверхностных яркостей $l_2/l_1 = 0.949 \pm 0.020$ также близко к единице в пределах погрешностей. Пример аналогичного анализа для другой системы WZ Crv приведен нами в [23].

Таким образом, можно сделать самое упрощенное предположение, что компоненты затменной системы практически одинаковы, а наклонение орбиты близко к 90°. В этом случае, можно записать соотношение $(R_1 + R_2)/a = \sin\pi D = \sin 2\pi C_8$ [9,23], где R_1, R_2 - радиусы компонент, а a - расстояние между их центрами.

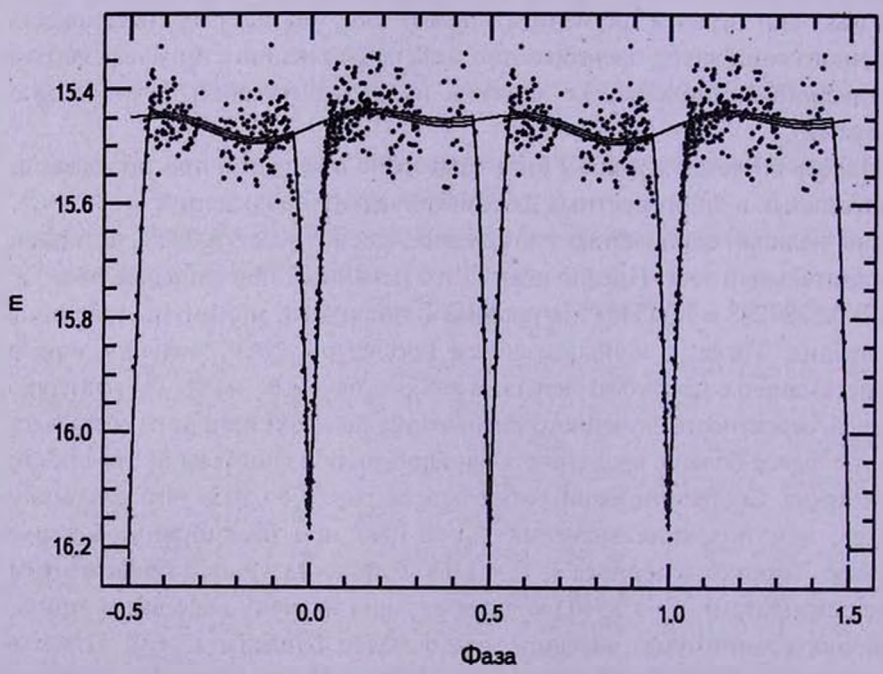

Рис.4. Фазовая кривая блеска VSX0224 для гипотезы "двух близких по глубине минимумов" (или "удвоенного периода") с начальной эпохой, соответствующей T_0 = HJD 2455106.3236 и периодом $P = 2 \cdot 0.522724^d = 1.045448^d$ и ее аппроксимация методом NAV.

Также предположим, что обе звезды находятся на Главной последовательности. Для околосолнечных масс, $R/R_\odot = M/M_\odot$, и получаем для параметра $C_s = 0.0528$ значение $M/M_\odot = 0.835$, что соответствует Sp G8V [24]. Очевидно, что это предварительная оценка, полученная при ряде упрощающих предположений.

Линейно интерполируя зависимость "спектр-масса-радиус" из таблицы 15.8 [24], получим (в предположении "одинаковых звезд"), $M/M_\odot = 0.735$, $R/R_\odot = 0.779$, Sp K2.8 V. Такое различие соответствующих параметров связано с различием эмпирических зависимостей "масса-радиус" по разным литературным данным.

Считая, что большая звезда более горячая (при предположении о Главной последовательности), можно было бы ожидать, что затмение на фазе 0.0 является полным, а на фазе 0.5 - частным. Однако для "серьезной" проверки этого предположения необходимы новые наблюдения с лучшей точностью. Кроме того, небольшое различие поверхностных яркостей, свидетельствующее о различии температур, должно привести к изменениям показателя цвета в интервалах фаз затмений с максимумом вблизи фазы 0.0 и минимумом вблизи фазы 0.5.

Оценим вклад "корректировки" с учетом наблюдаемого отношения средних яркостей, линейно интерполируя в интервале спектральных классов K0 - K5, массы, радиусы, абсолютные звездные величины в фотометрической системе R, и параметр, обратный температуре ($1/T$). Результирующие пары параметров для наблюдаемых значений периода и ширины затмения: $M_1 = 0.740\,M_\odot$, $M_2 = 0.732\,M_\odot$, $R_1 = 0.785\,R_\odot$, $R_2 = 0.775\,R_\odot$, $T_1 = 4751$ K, $T_2 = 4696$ K, Sp1 K2.5V, $L_1/(L_1 + L_2) = 0.519$ (близко к наблюдаемому значению 0.529). Абсолютная звездная величина $M_{R_1} = 5^m.81$, что соответствует расстоянию ~207 пк. Отметим еще раз, что, поскольку разность глубин минимумов на пределе обнаружения - 3σ, то данные оценки приведены лишь для иллюстрации разности параметров по сравнению со случаем "точно одинаковых звезд".

2.7. *Применение к другим двойным системам.* Выше, метод NAV был иллюстрирован применением к одной двойной системе VSX0224. Однако он использовался и для звезд с более широкими минимумами - типов EB, EW. На рис.5 показана аппроксимация методом NAV фазовой кривой блеска BM UMa по CCD V наблюдениям Вирниной и др. [25]. Система была классифицирована, как EW [26], и физическое моделирование [25] с использованием программы [27] подтверждает, что это сверхконтактная система. Согласно "классическому" определению, в таких системах невозможно определить начало и конец минимума. Однако на кривой блеска видна существенная разница между "плавными" изменениями, связанными с вытянутостью компонентов, и сравнительно узкими минимумами. Статис-

тически оптимальными являются параметры $C_8=0.104$, $C_9=1.4$, $C_{10}=1.1$.

Таким образом, метод NAV применим и к звездам типа EW. Хотя, во многих случаях, их кривые блеска хорошо описываются и тригономет-

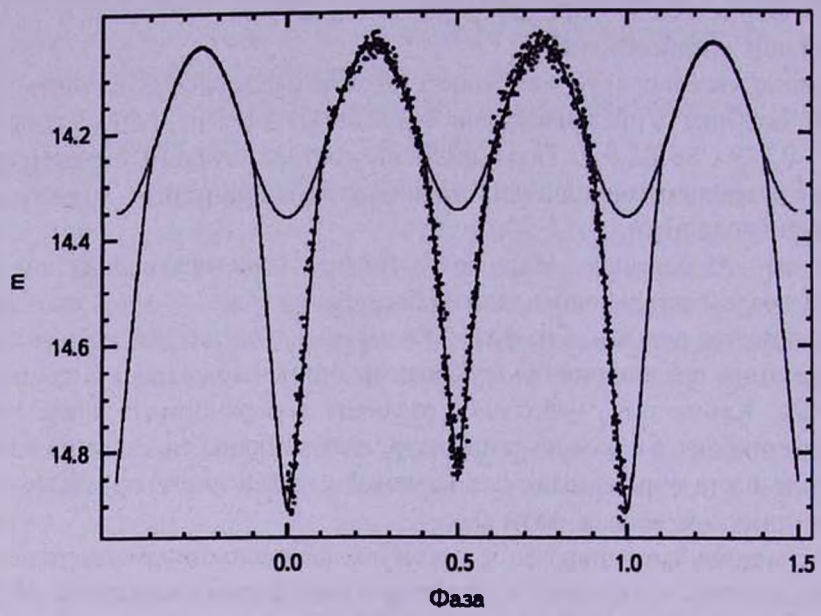

Рис.5. Аппроксимация методом NAV фазовой кривой блеска BM UMa в фильтре *V*.

рическим полиномом [10,13,17]. В частности, оптимальным значением для BM UMa является степень $s=8$, которая и использовалась в работе [25]. Однако число параметров $m=1+2s=17$ существенно больше, чем 10 в методе NAV, поэтому статистическая точность аппроксимации NAV в 1.3 раза лучше, чем для тригонометрического полинома.

В качестве "предшественника" метода NAV, нами использовалась раздельная аппроксимация внезатменной и полной фазовых кривых блеска WZ Crv [23] тригонометрическими полиномами соответственно степени $s=2$ и оптимальной ($s=9$). Однако метод NAV дает лучшую аппроксимацию полной кривой блеска с определением границ затмения математическими методами, а не субъективными визуальными.

Следует отметить и хорошее согласие аппроксимаций методом NAV и теоретических кривых, рассчитанных с использованием метода Вилсона-Девинни [14]. Мы использовали программу, разработанную Золя [27].

3. *Обсуждение*. Поскольку для определения параметров кривых блеска переменных звезд, необходимых для регистрации в "Общем каталоге переменных звезд", необходимо вычисление статистически оптимальных аппроксимаций, нами был предложен метод "NAV", который был апробирован на наблюдениях десятков реальных звезд и теоретических моделях. Такое

феноменологическое моделирование особенно эффективно для новых (впервые открытых или малоисследованных) переменных типа Алголя (New Algol Variable), которые, в частности, исследуются в рамках проектов "Украинская виртуальная обсерватория" [28] и "Меж-долготная астрономия" [29].

С уменьшением ширины затмения, количество параметров гармоник возрастает и может достигать нескольких десятков. Эффект Гиббса и статистические погрешности измерений приводят к появлению коротко-периодических видимых волн на кривой блеска, которые физически не присутствуют в сигнале. Предлагаемый метод уменьшения статистически оптимального числа параметров заключается в альтернативном выборе группы базисных функций, отличных от классического набора синусов и косинусов. Используется комбинация тригонометрического полинома второго порядка (TP2, что описывает эффекты "отражения", "эллипсоидальности" и "пятнистости") и локализованных вкладов минимумов (параметризованных по глубине и профиля отдельно для главного и вторичного минимумов). Это позволяет существенно улучшить качество аппроксимации.

Основными параметрами для описания затмений являются: полуширина $C_s = D/2$, которая одинакова для главного и вторичного минимумов в частом предположении круговой орбиты, а также параметры β_1 и β_2, которые описывают профили затмений. Численные модели показывают, что, для близких по размерам звезд, $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 1$, и профиль в центре затмений "треугольный". При прохождении меньшей звезды по диску большей ("транзит"), основной эффект изменения блеска связан с потемнением к краю диска затмеваемой звезды, и можно ожидать, что $\beta_1 \approx 2$. В этом случае, второе затмение полное, и $\beta_2 > 2$.

Особый интерес представляют полные затмения. Формально они описываются профилем (6) при сравнительно больших значениях параметра β. Для полного затмения можно предложить более вычислительно медленные модели, рассмотренные выше. Однако они требуют определения большего количества параметров и затрат компьютерного времени при практически таком же качестве аппроксимации, поэтому мы их не использовали.

Профиль затмения, описываемый функцией (6), дает лучшее согласие с "физическими" моделями, чем (5) или (9).

Метод "NAV" применим также и к типам EB и EW, хотя наиболее эффективен для класса EA.

По результатам анализа, оценены характеристики VSX J022427.8-104034.

Автор благодарит Н.Н.Самуся, В.Ю.Теребижа, В.П.Гринина, D.Chochol, S.Otero за полезное обсуждение, S.Zola за программы физического моделирования затменных двойных звезд, описанные в [26], и фонд Королевы Ядвиги Ягеллонского университета (Краков) за индивидуальный грант. Работа была инициирована многочисленными открытиями новых затменных

двойных аспиранткой Н.А.Вирниной, опубликовавшей под моим руководством 19 статей.

Кафедра "Высшая и прикладная математика", Одесский Национальный Морской университет, Одесса, Украина; e-mail: tt_ari@ukr.net

PHENOMENOLOGICAL MODELING OF THE LIGHT CURVES OF ALGOL-TYPE ECLIPSING BINARY STARS

I.L.ANDRONOV

We introduce a special class of functions for mathematical modeling of periodic signals of special shape with irregularly spaced arguments. This method was developed for determination of phenomenological characteristics of the light curves, which are necessary for registration in the "General Catalogue of Variable Stars" and other databases. For eclipsing binary stars with smooth light curves - of types EB and EW - it is recommended a trigonometric polynomial of optimal degree in a complete or symmetric form. For eclipsing binary systems with relatively narrow minima (EA-type), statistically optimal is an approximation of the light curves in a class of non-polynomial spline functions. It is used a combination of the second-order trigonometric polynomial (TP2, what describes effects of "reflection", "ellipsoidality" and "spotness") and localized contibutions of minima (parametrized in depth and profile separately for primary and secondary minima). Such an approach is characterized by a statistical accuracy of the smoothing curve, which is up to ~1.5-2 times better than the trigonometric polynomial of statistically optimal degree, and the absence of false "waves" in the light curve associated with the effect of Gibbs. In addition to the minimum width, which can not be determined by a trigonometric polynomial approximation, the method allows to determine with better accuracy its depth, as well as to separate the effects of the eclipse and out-of-eclipse parts. For multi-color observations, improving the accuracy of the smoothing of the curve in each filter will allow to obtain with better accuracy the curves of the color index variations. Effectivity of the proposed method increases with decreasing eclipse depth. The method is a complementary one to the approximation using trigonometric polynomials. The method called NAV ("New Algol Variable"), was illustrated by application to eclipsing binary systems VSX J022427.8-104034=USNO-B1.0 0793-0023471 and BM UMa. For VSX J022427.8-104034, an alternative model of "double period" is discussed.

Key words: *binary stars:Algol-type:phenomenological modeling*

ЛИТЕРАТУРА

1. *N.N.Samus, O.V.Durlevich, E.V.Kazarovets et al.*, General Catalog of Variable Stars (GCVS database, Version 2012Jan), http://cdsarc.u-strasbg.fr/viz-bin/Cat?cat=B%2Fgcvs&
2. *J.Lafler, T.D.Kinman*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **11**, 216, 1965.
3. *П.Н.Холопов*, в "Методы исследования переменных звезд" (под ред. Б.В.Никонова), М., Мир, с.307, 1971.
4. *I.L.Andronov, L.L.Chinarova*, Kinem. Phys. Celest. Bodies, **13**, No.6, 55, 1997.
5. *Т.Андерсон*, Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.
6. *В.Ю.Теребиж*, Анализ временных рядов в астрофизике. М., Физматлит, 1992.
7. *В.Ю.Теребиж*, Введение в статистическую теорию обратных задач. М., Физматлит, 2005.
8. *П.Н.Холопов*, Переменные звезды, **21**, 465, 1981.
9. *В.П.Цесевич*, (ред.) Затменные переменные звезды, М., Наука, 1971.
10. *I.L.Andronov*, Odessa Astron. Publ., **7**, 49 1994.
11. *I.L.Andronov*, Astron. Soc. Pacif. Conf. Ser., **292**, 391, 2003.
12. *Р.В.Хемминг*, Цифровые фильтры, М., Советское радио, 1980.
13. *J.Kallrath, E.F.Milone*, Eclipsing Binary Stars: Modeling and Analysis. Springer, 2012.
14. *R.E.Wilson, E.J.Devinney*, Astrophys. J., **166**, 605, 1971.
15. *А.В.Гончарский, А.М.Черепащук, А.Г.Ягола*, Некорректные задачи астрофизики, М., Наука, 1985.
16. *I.L.Andronov, V.I.Marsakova*, Astrophysics, **49**, 370, 2007 (перевод из "Астрофизика" 49, 433, 2007).
17. *S.M.Rucinski*, Publ. Astron. Soc. Pacif., **105**, 1433, 1993.
18. *V.I.Marsakova, I.L.Andronov*, Odessa Astron. Publ., **9**, 127, 1996.
19. *I.L.Andronov*, Int. Conf. KOLOS-2010 Abstr. Booklet, Snina, Slovakia, 1, 2010.
20. *Z.Mikulášek, M.Zejda, J.Janik*, Proc. IAU Symp., **282**, 391, 2011.
21. *А.М.Шульберг*, Тесные двойные звездные системы с шаровыми компонентами, М., Наука, 1971.
22. *I.L.Andronov*, As. Ap. Transact., **2**, 341, 1992.
23. *N.A.Virnina, I.L.Andronov, M.V.Mogorean*, Journal of Physical Studies, **15**, 2901, 2011.
24. *A.N.Cox*, Allen's Astrophysical Quantities. 4th ed. The Athlone Press, London, 2000.
25. *N.A.Virnina, E.A.Panko, O.G.Sergienko et al.*, Odessa Astron. Publ., **23**, 147, 2010.
26. *R.G.Samec, J.D.Gray, B.J.Carrigan, T.J.Kreidl*, Publ. Astron. Soc. Pacif., **107**, 136, 1995.
27. *J.M.Kreiner, S.Rucinski, S.Zola et al.*, Astron. Astrophys., **412**, 465, 2003.
28. *I.B.Vavilova, L.K.Pakulyak, A.A.Shlyapnikov et al.*, Kinem. Phys. Celest. Bodies, **28**, 85, 2012.
29. *I.L.Andronov, K.A.Antoniuk, A.V.Baklanov et al.*, Odessa Astron. Publ., **23**, 8, 2010.