

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ПО β -ПРОЦЕССАМ В НУКЛОННОЙ ПЛАЗМЕ С РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ПАРАМИ

Г.С.БИСНОВАТЫЙ-КОГАН

Поступила 30 мая 2012

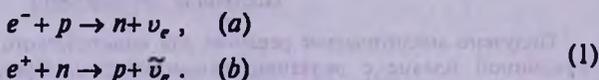
Получено аналитическое решение для кинетического равновесия по β -процессам в нуклонной плазме с релятивистскими парами. Нуклоны (n , p) предполагаются нерелятивистскими и невырожденными (их масса считается бесконечной), в то время как электроны и позитроны предполагаются ультрарелятивистскими из-за большой температуры ($T > 6 \cdot 10^8$ К), или высокой плотности ($\rho > \mu 10^6$ г/см³), или то и другое вместе. Здесь μ определяет число нуклонов на один электрон. Рассмотрение удается упростить благодаря аналитической связи плотности с химическим потенциалом электронов в ультрарелятивистской плазме, а также использованию модифицированного метода Гаусса для вычисления функций Ферми. Химический потенциал электронов и число нуклонов на один начальный электрон рассчитаны как функции ρ и T .

Ключевые слова: *релятивистская плазма: кинетическое β -равновесие*

1. **Введение.** В процессе коллапса, ведущего к образованию нейтронной звезды, вещество проходит состояния с очень высокими температурами и плотностями, при которых происходит интенсивное рождение нейтрино. В горячем ядре вновь рожденной нейтронной звезды непрозрачность по отношению к нейтрино достаточно велика для установления термодинамического равновесия по β -процессам. Области вне нейтриносферы почти прозрачны по отношению к нейтрино, поэтому термодинамическое равновесие установиться не может. В [1] было показано, что характерное время процессов слабого взаимодействия вокруг нейтриносферы может быть много меньше характерного гидродинамического времени. В этих условиях устанавливается кинетическое равновесие, при котором отношение числа нейтронов к протонам определяется из условия равенства скоростей рождения и уничтожения протонов (нейтронов). Детальное исследование кинетического β -равновесия в нуклонном (n - p) газе было сделано численно в [1] для общего случая ρ и T . Частные случаи кинетического β -равновесия в холодной pne^- , и очень горячей pne^\pm плазме исследовались численно в [2], где автор описывает кинетическое β -равновесие приближенно, в терминах соотношений между химическими потенциалами нуклонов и пар, аналогично [3]. При больших плотностях, и увеличении степени вырождения электронов, точность этого приближения ухудшается.

В настоящей работе задача о кинетическом β -равновесии рассмотрена для случая ультрарелятивистских пар с нуклонами, массы которых считаются очень большими, по сравнению с массой-энергией пар. Этот случай рассмотрен без каких-либо дополнительных упрощений, и решается сравнительно просто, благодаря аналитической связи плотности вещества ρ с химическим потенциалом электронов μ_e , найденной в [4], см. также [5]. Использование модифицированного метода Гаусса для вычисления функций Ферми, предложенного в [6], позволяет получить полностью аналитическое решение для этого случая.

2. Скорости β -реакций. Рассмотрим кинетическое равновесие для ультрарелятивистских пар относительно следующих процессов



Вероятности реакций (1) для бесконечно тяжелых ядер записываются в виде [1,7]

$$\begin{aligned} W^{(a)} &= [\ln 2 / (F_{1/2})_n] (kT/m_e c^2)^5 I_2, \\ W^{(b)} &= [\ln 2 / (F_{1/2})_n] (kT/m_e c^2)^5 J_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $(F_{1/2})_n \approx 1200$ есть характерная величина для распада нейтрона. Интегралы I_2 и J_2 определяются в виде

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 (x + x_0) \sqrt{(x + x_0)^2 - \alpha^2} [1 + \exp(x + x_0 - \beta)]^{-1} dx, \quad (a)$$

$$J_2 = \int_0^\infty (x + x_0 + \alpha)^2 (x + \alpha) \sqrt{x^2 + 2\alpha x} [1 + \exp(x + \alpha + \beta)]^{-1} dx. \quad (b) \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} x_0 &= \Delta_{np}/kT, \quad \Delta_{np} = m_n - m_p \approx 1.29 \text{ MeV}, \\ \alpha &= m_e c^2/kT, \quad \beta = \mu_e/kT. \end{aligned} \quad (4)$$

Для позитронов химический потенциал $\mu_{e^+} = -\mu_e$. В верхнем интеграле (3) определен как $x = (E_e/kT) - x_0$, а в нижнем - $x = (E_{e^+}/kT) - \alpha$, ($E_{e^+} = \sqrt{p^2 c^2 + m_e c^2}$), p - импульс электрона (позитрона).

В ультрарелятивистской плазме $x + x_0 \gg \alpha$ в случае (a) и $x \gg \alpha$ в случае (b). Таким образом, интегралы (3) упрощаются к виду

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 (x + x_0)^2 [1 + \exp(x + x_0 - \beta)]^{-1} dx, \quad (a)$$

$$J_2 = \int_0^\infty (x + x_0)^2 x^2 [1 + \exp(x + \beta)]^{-1} dx. \quad (b) \quad (5)$$

Вводя Ферми интегралы

$$F_n(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{1 + \exp(x - \alpha)}. \quad (6)$$

Запишем интегралы (5) в виде

$$I_2 = F_4(\beta - x_0) + 2x_0 F_3(\beta - x_0) + x_0^2 F_2(\beta - x_0),$$

$$J_2 = F_4(-\beta) + 2x_0 F_3(-\beta) + x_0^2 F_2(-\beta). \quad (7)$$

При наличии ультрарелятивистских пар в термодинамическом равновесии, связь плотности ρ , температуры T и числа нуклонов на один протон $\mu = (n_p + n_n)/n_p$ с безразмерным химическим потенциалом электронов β в нуклонной плазме с произвольной степенью вырождения пар, и невырожденными, нерелятивистскими нуклонами, определяется аналитически в виде [4,5,7]

$$\frac{\rho}{\mu m_p} = \frac{1}{3\pi^2} (kT/\hbar c)^3 (\beta^3 + \pi^2 \beta). \quad (8)$$

3. *Кинетическое β -равновесие.* При тех параметрах плазмы, когда электронно-позитронные пары являются ультрарелятивистскими, кинетическое β -равновесие обеспечивается балансом процессов захвата электронов и позитронов нуклонами, а вклад от радиоактивного распада

Таблица 1

ЗАВИСИМОСТЬ БЕЗРАЗМЕРНОГО ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА $\beta = \mu_e/kT$ И ЧИСЛА НУКЛОНОВ НА ОДИН ПЕРВИЧНЫЙ ЭЛЕКТРОН $\mu = 1 + n_n/n_p$, В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПЛОТНОСТИ ρ , ДЛЯ ФИКСИРОВАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ, $T = 10^{10}$ К (слева), и $T = 2 \cdot 10^{10}$ К (справа), В КИНЕТИЧЕСКОМ β -РАВНОВЕСИИ С УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИМИ ПАРАМИ, В НУКЛОННОЙ ПЛАЗМЕ С $\Delta_{np} = 1.293$ MeV (соответствует $1.5 \cdot 10^{10}$ К)

T (К)	ρ (г/см ³)	β	μ	T (К)	ρ (г/см ³)	β	μ
10^{10}	$5.72 \cdot 10^3$	10^{-4}	1.23	$2 \cdot 10^{10}$	$5.50 \cdot 10^4$	10^{-4}	1.48
10^{10}	$5.72 \cdot 10^4$	10^{-3}	1.23	$2 \cdot 10^{10}$	$5.51 \cdot 10^5$	10^{-3}	1.48
10^{10}	$2.86 \cdot 10^5$	0.005	1.23	$2 \cdot 10^{10}$	$2.76 \cdot 10^6$	0.005	1.49
10^{10}	$5.74 \cdot 10^5$	0.01	1.24	$2 \cdot 10^{10}$	$5.54 \cdot 10^6$	0.01	1.49
10^{10}	$1.15 \cdot 10^6$	0.02	1.24	$2 \cdot 10^{10}$	$1.11 \cdot 10^7$	0.02	1.50
10^{10}	$2.91 \cdot 10^6$	0.05	1.25	$2 \cdot 10^{10}$	$2.84 \cdot 10^7$	0.05	1.53
10^{10}	$5.95 \cdot 10^6$	0.1	1.28	$2 \cdot 10^{10}$	$5.89 \cdot 10^7$	0.1	1.58
10^{10}	$1.25 \cdot 10^7$	0.2	1.34	$2 \cdot 10^{10}$	$1.28 \cdot 10^8$	0.2	1.71
10^{10}	$2.84 \cdot 10^7$	0.4	1.50	$2 \cdot 10^{10}$	$3.10 \cdot 10^8$	0.4	2.05
10^{10}	$5.04 \cdot 10^7$	0.6	1.75	$2 \cdot 10^{10}$	$5.89 \cdot 10^8$	0.6	2.55
10^{10}	$8.32 \cdot 10^7$	0.8	2.10	$2 \cdot 10^{10}$	$1.04 \cdot 10^9$	0.8	3.29
10^{10}	$1.35 \cdot 10^8$	1	2.63	$2 \cdot 10^{10}$	$1.79 \cdot 10^9$	1	4.38
10^{10}	$4.56 \cdot 10^8$	1.5	5.33	$2 \cdot 10^{10}$	$6.78 \cdot 10^9$	1.5	9.91
10^{10}	$1.62 \cdot 10^9$	2	12.4	$2 \cdot 10^{10}$	$2.54 \cdot 10^{10}$	2	24.3
10^{10}	$5.87 \cdot 10^9$	2.5	30.9	$2 \cdot 10^{10}$	$9.30 \cdot 10^{10}$	2.5	61.3
10^{10}	$2.09 \cdot 10^{10}$	3	78.5	$2 \cdot 10^{10}$	$3.31 \cdot 10^{11}$	3	155
10^{10}	$7.25 \cdot 10^{10}$	3.5	199	$2 \cdot 10^{10}$	$1.13 \cdot 10^{12}$	3.5	389
10^{10}	$2.43 \cdot 10^{11}$	4	499				

Таблица 2

ТО ЖЕ, ЧТО В ТАБЛ.1, ДЛЯ ФИКСИРОВАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ТЕМПЕРАТУРЫ, $T = 6 \cdot 10^{10}$ К (слева), $T = 2 \cdot 10^{11}$ К (справа)

T (К)	ρ (г/см ³)	β	μ	T (К)	ρ (г/см ³)	β	μ
$6 \cdot 10^{10}$	$1.79 \cdot 10^6$	10^{-4}	1.78	$2 \cdot 10^{11}$	$7.17 \cdot 10^7$	10^{-4}	1.93
$6 \cdot 10^{10}$	$1.79 \cdot 10^7$	10^{-3}	1.79	$2 \cdot 10^{11}$	$7.17 \cdot 10^8$	10^{-3}	1.93
$6 \cdot 10^{10}$	$8.98 \cdot 10^7$	0.005	1.79	$2 \cdot 10^{11}$	$3.60 \cdot 10^9$	0.005	1.94
$6 \cdot 10^{10}$	$1.80 \cdot 10^8$	0.01	1.80	$2 \cdot 10^{11}$	$7.24 \cdot 10^9$	0.01	1.95
$6 \cdot 10^{10}$	$3.64 \cdot 10^8$	0.02	1.82	$2 \cdot 10^{11}$	$1.46 \cdot 10^{10}$	0.02	1.97
$6 \cdot 10^{10}$	$9.35 \cdot 10^8$	0.05	1.86	$2 \cdot 10^{11}$	$3.76 \cdot 10^{10}$	0.05	2.02
$6 \cdot 10^{10}$	$1.96 \cdot 10^9$	0.1	1.95	$2 \cdot 10^{11}$	$7.92 \cdot 10^{10}$	0.1	2.13
$6 \cdot 10^{10}$	$4.34 \cdot 10^9$	0.2	2.16	$2 \cdot 10^{11}$	$1.77 \cdot 10^{11}$	0.2	2.37
$6 \cdot 10^{10}$	$1.10 \cdot 10^{10}$	0.4	2.71	$2 \cdot 10^{11}$	$4.57 \cdot 10^{11}$	0.4	3.03
$6 \cdot 10^{10}$	$2.20 \cdot 10^{10}$	0.6	3.52	$2 \cdot 10^{11}$	$9.21 \cdot 10^{11}$	0.6	3.99
$6 \cdot 10^{10}$	$4.03 \cdot 10^{10}$	0.8	4.72	$2 \cdot 10^{11}$	$1.71 \cdot 10^{12}$	0.8	5.41
$6 \cdot 10^{10}$	$7.16 \cdot 10^{10}$	1	6.48	$2 \cdot 10^{11}$	$3.06 \cdot 10^{12}$	1	7.49
$6 \cdot 10^{10}$	$2.84 \cdot 10^{11}$	1.5	15.4	$2 \cdot 10^{11}$	$1.23 \cdot 10^{13}$	1.5	18.0
$6 \cdot 10^{10}$	$1.08 \cdot 10^{12}$	2	38.4	$2 \cdot 10^{11}$	$4.71 \cdot 10^{13}$	2	45.1
$6 \cdot 10^{10}$	$3.98 \cdot 10^{12}$	2.5	97.1				
$6 \cdot 10^{10}$	$1.41 \cdot 10^{13}$	3	245				

Таблица 3

ТО ЖЕ, ЧТО В ТАБЛ.1, ДЛЯ ФИКСИРОВАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ТЕМПЕРАТУРЫ, $T = 6 \cdot 10^{11}$ К (слева), $T = 1.5 \cdot 10^{12}$ К (справа)

T (К)	ρ (г/см ³)	β	μ	T (К)	ρ (г/см ³)	β	μ
$6 \cdot 10^{11}$	$1.79 \cdot 10^6$	10^{-5}	1.78	$1.5 \cdot 10^{12}$	$7.17 \cdot 10^7$	10^{-5}	1.93
$6 \cdot 10^{11}$	$1.79 \cdot 10^7$	10^{-4}	1.79	$1.5 \cdot 10^{12}$	$7.17 \cdot 10^8$	10^{-4}	1.93
$6 \cdot 10^{11}$	$8.98 \cdot 10^7$	10^{-3}	1.79	$1.5 \cdot 10^{12}$	$3.60 \cdot 10^9$	10^{-3}	1.94
$6 \cdot 10^{11}$	$1.80 \cdot 10^8$	0.005	1.80	$1.5 \cdot 10^{12}$	$7.24 \cdot 10^9$	0.005	1.95
$6 \cdot 10^{11}$	$3.64 \cdot 10^8$	0.01	1.82	$1.5 \cdot 10^{12}$	$1.46 \cdot 10^{10}$	0.01	1.97
$6 \cdot 10^{11}$	$9.35 \cdot 10^8$	0.02	1.86	$1.5 \cdot 10^{12}$	$3.76 \cdot 10^{10}$	0.02	2.02
$6 \cdot 10^{11}$	$1.96 \cdot 10^9$	0.05	1.95	$1.5 \cdot 10^{12}$	$7.92 \cdot 10^{10}$	0.05	2.13
$6 \cdot 10^{11}$	$4.34 \cdot 10^9$	0.1	2.16	$1.5 \cdot 10^{12}$	$1.77 \cdot 10^{11}$	0.1	2.37
$6 \cdot 10^{11}$	$1.10 \cdot 10^{10}$	0.2	2.71	$1.5 \cdot 10^{12}$	$4.57 \cdot 10^{11}$	0.2	3.03
$6 \cdot 10^{11}$	$2.20 \cdot 10^{10}$	0.4	3.52	$1.5 \cdot 10^{12}$	$9.21 \cdot 10^{11}$	0.4	3.99
$6 \cdot 10^{11}$	$4.03 \cdot 10^{10}$	0.6	4.72	$1.5 \cdot 10^{12}$	$1.71 \cdot 10^{12}$	0.6	5.41
$6 \cdot 10^{11}$	$7.16 \cdot 10^{10}$	0.8	6.48	$1.5 \cdot 10^{12}$	$3.06 \cdot 10^{12}$	0.8	7.49
$6 \cdot 10^{11}$	$2.84 \cdot 10^{11}$	1	15.4	$1.5 \cdot 10^{12}$	$1.23 \cdot 10^{13}$	1	18.0
$6 \cdot 10^{11}$	$1.08 \cdot 10^{12}$	1.5	38.4	$1.5 \cdot 10^{12}$	$4.71 \cdot 10^{13}$	1.5	45.1
$6 \cdot 10^{11}$	$3.98 \cdot 10^{12}$	2	97.1	$1.5 \cdot 10^{12}$	$1.73 \cdot 10^{14}$	2	114
$6 \cdot 10^{11}$	$1.41 \cdot 10^{13}$	2.5	245	$1.5 \cdot 10^{12}$	$6.11 \cdot 10^{14}$	2.5	287

нейтронов пренебрежимо мал. В этих условиях уравнение баланса при кинетическом равновесии по β -процессам записывается в виде

$$n_p W^{(a)} = n_n W^{(b)}, \quad \mu = 1 + \frac{W^{(a)}}{W^{(b)}} = 1 + \frac{I_2}{J_2}. \quad (9)$$

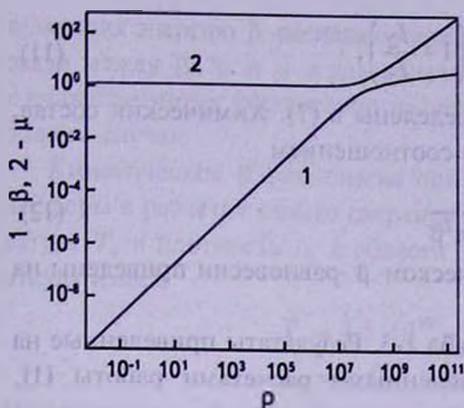


Рис.1. Зависимости безразмерного химического $\beta = \mu_e / kT$ и числа нуклонов на один первичный электрон $\mu = 1 + n_p / n_e$ от плотности ρ (г/см^3) для фиксированного значения температуры $T = 10^{10}$ К, в кинетическом β -равновесии с ультрарелятивистскими парами, в нуклонной плазме с $\Delta_{np} = 1.293$ МэВ (соответствует $1.15 \cdot 10^{10}$ К).

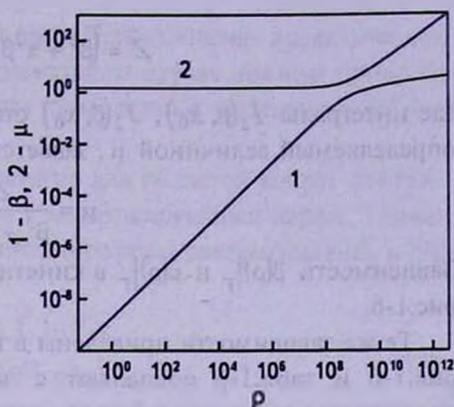


Рис.2. То же, что на рис.1, для фиксированного значения температуры, $T = 2 \cdot 10^{10}$ К.

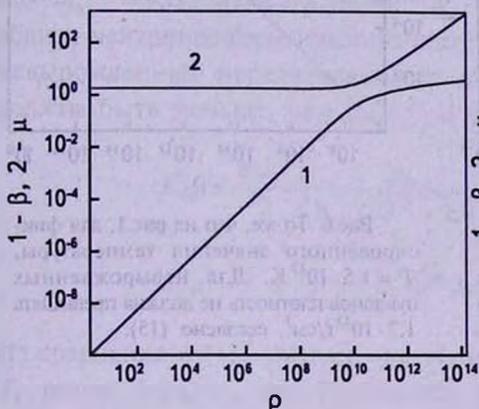


Рис.3. То же, что на рис.1, для фиксированного значения температуры, $T = 6 \cdot 10^{10}$ К. Для невырожденных нуклонов плотность не должна превышать $1.3 \cdot 10^{13}$ г/см^3 , согласно (15).

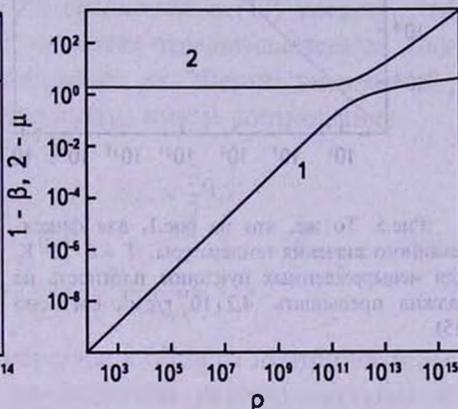


Рис.4. То же, что на рис.1, для фиксированного значения температуры, $T = 2 \cdot 10^{11}$ К. Для невырожденных нуклонов плотность не должна превышать $8.1 \cdot 10^{13}$ г/см^3 , согласно (15).

В условиях ультрарелятивистских пар связь термодинамических функций пар с температурой T и плотностью ρ сводится к зависимости от комбинации ρ/T^3 . Вводя безразмерную переменную

$$Z = 3\pi^2 \frac{\rho}{m_p} (\hbar c / kT)^3, \tag{10}$$

из (8) и (9) следует, что уравнение, определяющее зависимость $\beta(Z, x_0)$, в условиях кинетического β -равновесия имеет вид

$$Z = (\beta^3 + \pi^2\beta) \left(1 + \frac{I_2}{J_2} \right), \quad (11)$$

где интегралы $I_2(\beta, x_0)$, $J_2(\beta, x_0)$ определены в (7). Химический состав, определяемый величиной μ , задается соотношением

$$\mu = \frac{Z}{\beta^3 + \pi^2\beta}. \quad (12)$$

Зависимости $\beta(\rho)|_T$ и $\mu(\rho)|_T$ в кинетическом β -равновесии приведены на рис.1-6.

Те же зависимости приведены в табл.1-3. Результаты приведенные на рис.1-6 и табл.1-3 совпадают с численными расчетами работы [1], приведенными на рис.1-3 этой статьи.

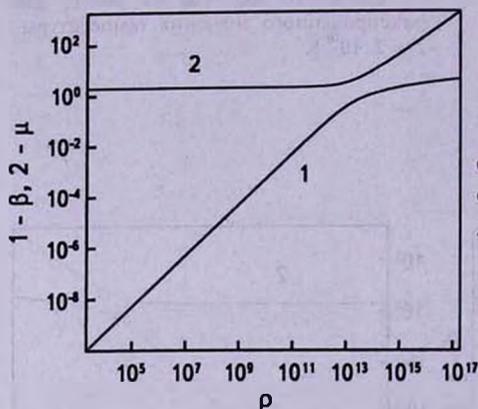


Рис.5. То же, что на рис.1, для фиксированного значения температуры, $T = 6 \cdot 10^{11}$ К. Для невыврожденных нуклонов плотность не должна превышать $4.2 \cdot 10^{14}$ г/см³, согласно (15).

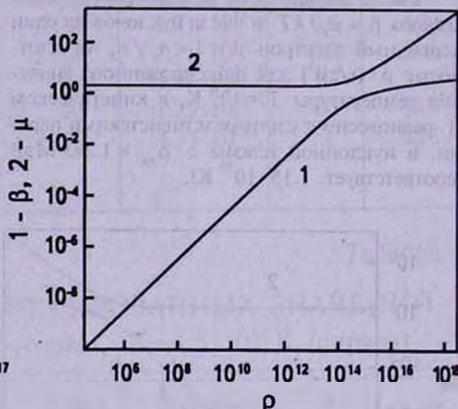


Рис.6. То же, что на рис.1, для фиксированного значения температуры, $T = 1.5 \cdot 10^{12}$ К. Для невыврожденных нуклонов плотность не должна превышать $1.7 \cdot 10^{13}$ г/см³, согласно (15).

4. *Обсуждение.* Заметим, что в работе [1] все интегралы и алгебраические уравнения для определения состава нуклонной плазмы в кинетическом, β -равновесии решались численно для общего случая. Здесь мы получили для частного случая ультрарелятивистских пар решение в аналитическом виде. В [2] зависимость $\beta(\rho, T)$ была получена с использованием приближенного подхода, а также для случая ультрарелятивистских пар, в то время как в данной работе этот случай исследован аналитически в точной постановке. Точный аналитический подход, используемый здесь для описания кинетического β -равновесия в нуклонной плазме, может быть легко обобщен для смеси ядер, находящихся либо в условиях ядерного равновесия, либо в случае замороженного ядерного состава. При этом в задаче будет присутствовать несколько параметров $x_{ZZ'} = \Delta_{ZZ'}/kT$, опре-

деляющих энергию β -распада соседних ядер. Использование аналитической связи между β , ρ и μ в ультрарелятивистском случае должно привести к существенному упрощению расчетов, проведенных численно в [8] для общего случая.

Кинетическое β -равновесие применимо для областей вокруг нейтриноносферы в расчетах взрыва сверхновых с коллапсирующим ядром. Температура T_ν и плотность ρ_ν в области нейтриноносферы рассчитывались в [9], откуда имеем

$$\begin{aligned} T_\nu &= 4.5 \cdot 10^{10} - 6.3 \cdot 10^{10} \text{ К}, \\ \rho_\nu &= 3 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{12} \text{ г/см}^3. \end{aligned} \quad (13)$$

Полученные в данной работе результаты применимы в том случае, когда нуклоны являются нерелятивистскими и невырожденными. Ферми импульс нейтронов (протонов) p_n (p_p) в полностью вырожденном газе записывается в виде [7]

$$\frac{p_{n,p}}{m_{n,p}c} \approx \left(\frac{\rho_{n,p}}{6.2 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3} \right)^{1/3}, \quad (14)$$

где $m_n c^2 = 931.5 \text{ МэВ} = k 5.4 \cdot 10^{12} \text{ К}$. Из сравнения с (13) следует, что вблизи нейтриноносферы нуклоны всегда остаются нерелятивистскими. Для невырожденных нерелятивистских нейтронов их "Ферми энергия" E_{Fe} должна быть меньше, чем $1.5 kT$. В результате имеем соотношение

$$\begin{aligned} E_{Fe} &= \frac{m_n c^2}{2} \left(\frac{\rho_n}{6.2 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3} \right)^{2/3}, \quad E_{Fe} = \frac{3}{2} kT \\ \text{при } T &= T_d = 3.6 \cdot 10^{10} \text{ К} \left(\frac{\rho_n}{6.2 \cdot 10^{12} \text{ г/см}^3} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (15)$$

Из сравнения с (13) следует, что температура в области нейтриноносферы T_ν всегда больше, чем T_d , так что приближение нерелятивистских и невырожденных нуклонов всегда выполняется в области нейтриноносферы.

Работа была частично поддержана грантом РФФИ 11-02-00602, Программой РАН "Происхождение и эволюция объектов Вселенной", и грантом Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-3458.2010.2.

Приложение

Вычисление функций Ферми обобщенным методом Гаусса. Введем функцию

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-\alpha}}, \quad (16)$$

и запишем функцию Ферми $F_n(\alpha)$ в виде

$$F_n(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x, \alpha) x^n e^{-x} dx. \quad (17)$$

Метод Гаусса для вычисления определенного интеграла на интервале от (-1) до (1) , предполагает сведение его к вычислению алгебраического выражения, в котором используется значение подынтегральной функции $f(x)$ в m фиксированных узлах x_i , и вычисляется сумма этих значений с фиксированными коэффициентами A_i , $i \leq m$. Для полиномиальной функции $f(x)$ этот метод дает точное значение интеграла, когда степень полинома $p \leq 2m-1$. Таким образом, используется представление

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^m A_i f(x_i), \quad (18)$$

где рассчитанные значения x_i и A_i для различного числа узлов, от $m=2$ до $m=96$ приведены в [10]. Для расчета несобственных интегралов с бесконечным верхним пределом лучше использовать модифицированный метод Гаусса, в котором интегралы с различным асимптотическим поведением записываются в виде

$$\int_0^{\infty} f(x) x^n e^{-x} dx = \sum_{i=1}^m A_{ni} f(x_{ni}). \quad (19)$$

Значения A_{ni} и x_{ni} были вычислены в [6] для $m=5$, $n=0, 1, 2, 3, 4$, см. также [7]. Значения для $n=2, 3, 4$ приведены в табл.4. Ферми функции из (7), с $f(x, \alpha)$ из (16), записываются в виде

$$F_2(\alpha) = 0.52092 \cdot f(1.0311, \alpha) + 1.0667 \cdot f(2.8372, \alpha) + 0.38355 \cdot f(5.6203, \alpha) + 0.028564 \cdot f(9.6829, \alpha) + 2.6271 \cdot 10^{-4} \cdot f(15.828, \alpha), \quad (20)$$

$$F_3(\alpha) = 1.2510 \cdot f(1.4906, \alpha) + 3.2386 \cdot f(3.5813, \alpha) + 1.3902 \cdot f(6.6270, \alpha) + 0.11904 \cdot f(10.944, \alpha) + 1.2328 \cdot 10^{-3} \cdot f(17.357, \alpha), \quad (21)$$

Таблица 4

КОРНИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА (19) С $m=5$, $n=2, 3, 4$, из [6,7]

Корни x_i и коэффициенты A_i	$n=2$	$n=3$	$n=4$
x_1	1.0311	1.4906	1.9859
x_2	2.8372	3.5813	4.3417
x_3	5.6203	6.6270	7.6320
x_4	9.6829	10.944	12.188
x_5	15.828	17.357	18.852
A_1	0.52092	1.2510	4.1856
A_2	1.0667	3.2386	12.877
A_3	0.38355	1.3902	6.3260
A_4	0.028564	0.11904	0.60475
A_5	2.6271(-4)	1.2328(-3)	6.8976(-3)

$$F_4(\alpha) = 4.1856 \cdot f(1.9859, \alpha) + 12.877 \cdot f(4.3417, \alpha) + 6.3260 \cdot f(7.6320, \alpha) + 0.60475 \cdot f(12.188, \alpha) + 6.8976 \cdot 10^{-3} \cdot f(18.852, \alpha). \quad (22)$$

После вычисления I_1 и J_2 в (7), значения Z , μ , T , ρ находятся из соотношений

$$Z = 3\pi^2 \frac{\rho}{m_p} \left(\frac{\hbar c}{kT} \right)^3 = (\beta^3 + \pi^2 \beta) \left(1 + \frac{I_2}{J_2} \right),$$

$$\mu = 1 + \frac{I_2}{J_2}, \quad T = \frac{\Delta}{kx_0}, \quad \rho = \frac{Zm_p}{3\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3. \quad (23)$$

Институт космических исследований Российской академии наук,
Россия, e-mail: gkogan@iki.rssi.ru

ANALYTIC SOLUTION FOR KINETIC EQUILIBRIUM OF β -PROCESSES IN NUCLEONIC PLASMA WITH RELATIVISTIC PAIRS

G.S.BISNOVATYI-KOGAN

The analytic solution is obtained describing kinetic equilibrium of the β -processes in the nucleonic plasma with relativistic pairs. The nucleons (n , ρ) are supposed to be non-relativistic and non-degenerate (their masses are taken equal to infinity), while the electrons and positrons are ultra-relativistic due to high temperature ($T > 6 \cdot 10^9$ K), or high density ($\rho > \mu 10^6$ g/cm³) or both, where μ is a number of nucleons per one electron. The consideration is simplified because of the analytic connection of the density with the electron chemical potential in the ultra-relativistic plasma, and modified Gauss representation of Fermi functions. Electron chemical potential and number of nucleons per one initial electron are calculated as functions of ρ and T .

Key words: *relativistic plasma:kinetic β -equilibrium*

ЛИТЕРАТУРА

1. В.С.Имшенник, Д.К.Надежин, В.С.Пинаев, Астрон. ж., 44, 768, 1967.
2. Ye-Fei Yuan, Phys. Rev., D72, 013007, 2005.
3. В.С.Имшенник, Д.К.Надежин, Астрон. ж., 42, 1154, 1965.
4. P.Rhodes, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 204, 396, 1950.
5. Д.К.Надежин, Научные информации Астросовета Ан СССР, выпуск 32, 3, 1974.
6. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.М.Каждан, Астрон. ж., 43, 761, 1966.
7. G.S.Bisnovatyi-Kogan, Stellar Physics. Vol.1. Fundamental Concepts and Stellar Equilibrium, Springer, 2001.
8. В.М.Чечеткин, Астрон. ж., 46, 202, 1969.
9. Д.К.Надыозжин, Astrophys. J. Suppl. Ser., 53, 131, 1978.
10. М.Абрамовитц, И.А.Стегун, (eds). Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series - 55, 1964.