АСТРОФИЗИКА

ТОМ 55 МАЙ, 2012 ВЫПУСК 2

ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК СВЕТА В ЦЕНТРЕ ОДНОРОДНОГО ШАРА И В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

А.Г.БАРСЕГЯН, В.В.ТЕР-АВЕТИСЯН

Поступила 19 декабря 2011
Принята к печати 4 апреля 2012

Излагается метод решения интегрального уравнения переноса в бесконечой среде и в однородном шаре, в центре которого находится точечный источник. Рассеяние считается изотропным и когерентным. Применяется функция Амбарцумяна для полубесконечной среды. Устраняется неинтегрируемая особенность функции первичного источника.

Ключевые слова: *интегральное уравнение:факторизация:точечный источник света:изотропное и когерентное рассеяние: функция Амбарцумяна:метод дискретных ординат*

1. *Введение*. Задача многократного рассеяния излучения в однородном шаре, в центре которого находится точечный источник, относится к известным задачам теории переноса. Среди астрофизических применений этой задачи видное место занимает модельная задача свечения сферической туманности с центральной звездой (см. [1]).

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая изотропного и когерентного рассеяния. Тогда функция источника S зависит только от оптического расстояния τ переменной точки от центра шара и имеет вид:

$$S(\tau)=\frac{\lambda A}{\tau}H(\tau),$$

где функция H удовлетворяет следующему интегральному уравнению свертки на конечном промежутке с суммарно-разностным ядром (см. [1]):

$$H(\tau)=g(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int_0^R\left(E_1(|\tau-t|)-E_1(\tau+t)\right)H(t)dt,\ \tau>0. \qquad (1)$$

Здесь $R<\infty$ - оптический радиус шара (туманности); $\lambda\in(0,1]$ - вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния, а E_1 - интегрально-показательная функция:

$$E_1(\tau)=\int_1^\infty\frac{e^{-\tau s}}{s}ds,\quad \tau>0.$$

Свободный член

$$g(\tau)=\frac{e^{-\tau}}{\tau} \qquad (2)$$

обусловлен однократно рассеянным излучением от первичного δ-образного источника.

Уравнение (1) при $R = \infty$ соответствует задаче о точечном источнике в бесконечной среде.

Трудности, связанные с решением уравнения (1) при $R < \infty$, в основном обусловлены его следующими двумя особенностями:

а) Хорошо известно, что решение уравнения переноса на конечном промежутке существенно сложнее решения аналогичного уравнения для полупространства или пространства. К тому же, в (1), кроме разностного ядра, участвует второе (хоть и менее проблематичное) ганкелево ядро, зависящее от суммы аргументов.

б) Свободный член (2) уравнения (1) не является интегрируемой функцией в окрестности точки $\tau = 0$: $\int_0^R \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \infty$ при произвольном $R > 0$. По этой причине прямое применение к (1) известных конструкций теории интегральных уравнений свертки невозможно из-за возникновения расходящихся интегралов. Заметим, что в случае конечного промежутка $(0, R)$ класс (абсолютно) интегрируемых функций практически является наиболее широким классом, в котором рассматривается интегральный оператор $\hat{K}_R$ с ядром $E_1(|\tau - t|)$.

Одним из способов устранения отмеченной сингулярности свободного члена является выделение неинтегрируемой части функции H путем ее представления в виде

$$H(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\tau} + f(\tau), \quad f \geq 0. \tag{3}$$

Формула (3) согласуется с формулой (32.38) из [1]. В работе [2] показано, что функция f интегрируема на $(0, R)$ и определяется из уравнения вида (1) с интегрируемым свободным членом.

В настоящей работе приводится конструктивный способ решения уравнения (1), которое допускает полное математическое обоснование. Применяемый подход опирается на работу [3] по решению уравнения на конечном промежутке с суммарно-разностным ядром, в сочетании с результатом работы [2]. Отметим, что в [3] получены факторизационная трактовка и обобщение метода работы [4] решения уравнения переноса в плоском слое конечной толщины. В работах [3,4] ключевую роль играет функция Амбарцумяна (ФА) для полубесконечной среды.

В конце статьи на рис.1-4 и в табл.1 приведены результаты некоторых численных расчетов по решению уравнения (1) с $R \leq \infty$.

2. *О методе функции Амбарцумяна.*

2.1. *Операторная форма уравнения (1).* Перепишем (1) в операторной форме: $H = g + \left(\hat{K}_R - \hat{T}_R\right)H$, или:

$$H = g + \hat{W}_R H .$$

Здесь $\hat{K}_R$ и $\hat{T}_R$ следующие интегральные операторы:

$$\hat{K}_R f(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^R E_1(|\tau - t|) f(t)dt , \quad \hat{T}_R f(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^R E_1(\tau + t) f(t)dt ,$$

а $\hat{W}_R = \hat{K}_R - \hat{T}_R$ оператор на $(0, R)$ с ядром

$$W(\tau, t) = \frac{\lambda}{2}\left(E_1(|\tau - t|) - E_1(\tau + t)\right) \geq 0 . \tag{4}$$

Соответствующие операторы на полупрямой (т.е. когда $R = \infty$) обозначаются через $\hat{K}$, $\hat{T}$, $\hat{W}$.

Под нормой $\|f\|$ функции f будем понимать ее интегральную норму на $(0, R)$ (при фиксированном R):

$$\|f\| = \int_0^R |f(\tau)| d\tau . \tag{5}$$

Негативный эффект неинтегрируемости свободного члена (2) проявляется в том, что операторы $\hat{K}_R$, $\hat{T}_R$ в отдельности не действуют на свободный член, поскольку соответствующие интегралы расходятся: $\int_0^R E_1(\tau - t)\frac{e^{-t}}{t}dt = +\infty$, $\int_0^R E_1(\tau + t)\frac{e^{-t}}{t}dt = +\infty$ (при любом $\tau > 0$). Так как искомая функция $H \geq g$, то операторы $\hat{K}_R$, $\hat{T}_R$ не действуют также на H. Несмотря на это, интеграл $\int_0^R W(\tau, t)\frac{1}{t}e^{-t}dt$ существует благодаря тому, что ядро $W(\tau, t)$ является разностью двух положительных ядер и достаточно быстро стремится к 0 при $\tau \to 0$. Из сказанного следует, что в данном случае

$$\left(\hat{K}_R - \hat{T}_R\right)g \neq \hat{K}_R g - \hat{T}_R g$$

(правая часть этого неравенства просто не существует).

Пусть $F = \hat{W}_R f$, где f - функция с конечной нормой (5). Из неравенства (4) и неравенств $\int_0^R E_1(|x - t|)dx \leq 2\int_0^{\frac{R}{2}} E_1(y)dy \leq 2$ следует, что при $R \leq \infty$ и $\lambda \leq 1$ имеет место следующая оценка:

$$\|F\| \leq q\|f\|, \quad \text{где} \quad q = \lambda\int_0^{\frac{R}{2}} E_1(\tau)d\tau \leq 1 . \tag{6}$$

Если $R < \infty$ или $\lambda < 1$, то $q < 1$. Если же одновременно $R = \infty$ и $\lambda = 1$, то $q = 1$.

2.2. *Точечный источник в бесконечной среде.* Решение уравнения

(1) начнем с рассмотрения случая бесконечной среды, т.е. когда $R=\infty$. Эта задача сводится к следующему уравнению на полупрямой относительно функции $U(\tau)=\int_\tau^\infty S(t)t\,dt$ (см. [1], уравнение (32).(34)):

$$U(\tau)=\lambda A E_1(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty\left[E_1(|\tau-t|)+E_1(\tau+t)\right]U(t)\,dt\,,\quad \tau>0\,. \tag{7}$$

Переход к функции U позволил устранить неинтегрируемую особенность свободного члена.

Уравнение (7) решено в замкнутом виде. Имеет место следующая формула (см. [1], формулу (32).(36)):

$$S(\tau)=\frac{A}{\tau}\left\{4\lambda\int_1^\infty\frac{x^2 e^{-x\tau}\,dx}{(\lambda\pi)^2+\left(2x+\lambda\ln\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}+\frac{2k^2\left(1-k^2\right)}{\lambda+k^2-1}e^{-k\tau}\right\}, \tag{8}$$

где k определяется из характеристического уравнения

$$\frac{\lambda}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}=1\,. \tag{9}$$

Формула (8) обладает следующим явным преимуществом над формальной процедурой решения уравнения через преобразование Фурье: решение представляется через интегралы не от быстро осциллирующих функций, а от регулярно и экспоненциально убывающих в бесконечности функций. Благодаря этому формула (8) допускает эффективную численную реализацию. Казалось бы, с прикладной точки зрения остается лишь сосредоточить внимание на разработке эффективных способов вычисления интеграла в (8). Однако здесь возникает ряд вопросов, о которых речь пойдет чуть позже.

В следующем разделе мы вкратце изложим другой способ решения уравнения (7), основанный на применении метода ФА. Излагаемые результаты будут использованы в вопросе решения уравнения (1) при $R<\infty$. Некоторые аргументы в пользу решения (7) методом ФА (при наличии замкнутого решения (8) задачи) будут приведены в разделе 2.4.

2.3. *Применение функции Амбарцумяна к (7).* Начнем с изложения метода ФА решения основного интегрального уравнения переноса в однородной полубесконечной среде:

$$B(\tau)=B_0(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty E_1(|\tau-t|)B(t)\,dt,\qquad \tau>0\,. \tag{10}$$

В методе ФА фундаментальную роль играют следующие три функции: функция Амбарцумяна φ, функция L и резольвентная функция Φ. Они определяются следующим образом (см. [1], раздел 3).

Функция φ определяется из уравнения Амбарцумяна (и является его основным решением):

$$\varphi(s) = 1 + \frac{\lambda}{2}\varphi(s)\int_1^\infty \frac{1}{s+p}\varphi(p)\frac{dp}{p}. \tag{11}$$

Функция L определяется по формуле:

$$L(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_1^\infty e^{-\tau s}\varphi(s)\frac{ds}{s}. \tag{12}$$

Резольвентная функция Φ определяется из уравнения типа Вольтерра

$$\Phi(\tau) = L(\tau) + \int_0^\tau L(\tau - t)\Phi(t)dt.$$

Она допускает представление в виде интеграла Стилтьеса:

$$\Phi(\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau s}d\,\omega(s), \tag{13}$$

Функция ω имеет скачок в точке $k \in [0,1)$, определяемой из характеристического уравнения (9). Метод приближенного построения функции ω описан в [5].

Функции Φ может быть записана в форме $\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-xs}G(s)ds$. Тогда в выражении функции G будет участвовать δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке k.

Мы воспользуемся данной Н.Б.Енгибаряном факторизационной трактовкой метода ФА (см. [6]). Перепишем уравнение (10) в виде:

$$\left(I - \hat{K}\right)B = B_0, \tag{14}$$

где I - единичный оператор. С помощью функции L строится следующее разложение (вольтерровая факторизация):

$$I - \hat{K} = \left(I - \hat{V}_-\right)\left(I - \hat{V}_+\right). \tag{15}$$

Здесь $\hat{V}_\pm$ - вольтерровые операторы, определяемые по формулам:

$$\left(\hat{V}_+ f\right)(\tau) = \int_0^\tau L(\tau - \tau')f(\tau')d\tau', \quad \tau > 0,$$

$$\left(\hat{V}_- f\right)(\tau) = \int_\tau^\infty L(\tau' - \tau)f(\tau')d\tau', \quad \tau > 0.$$

Операторы $\left(I - \hat{V}_\pm\right)^{-1}$, обратные к $I - \hat{V}_\pm$, имеют вид:

$$\left(I - \hat{V}_\pm\right)^{-1} = I + \hat{\Phi}_\pm, \tag{16}$$

где операторы $\hat{\Phi}_\pm$ строятся через резольвентную функцию Φ:

$$\left(\hat{\Phi}_+ f\right)(\tau) = \int_0^\tau \Phi(\tau - t) f(t)\,dt\,, \quad \tau > 0,$$

$$\left(\hat{\Phi}_- f\right)(\tau) = \int_\tau^\infty \Phi(t - \tau) f(t)\,dt\,, \quad \tau > 0.$$

Решение (14) дается формулой

$$B = \left(I + \hat{\Phi}_+\right)\left(I + \hat{\Phi}_-\right) B_0\,.$$

Ниже мы опишем способ применения разложения (15) к уравнению (7) с суммарно-разностным ядром. Этот способ исходит из работы [7] и, в сочетании с уравнением Амбарцумяна, был применен к задачам переноса в полубесконечной среде с отражающей границей (см., напр., [8]).

Представим уравнение (7) в форме:

$$\left(I - \hat{K} - \hat{T}\right) U = \lambda A E_1\,, \tag{17}$$

где $\hat{K}$ и $\hat{T}$ - суть операторы, введенные в разделе 2.1.
Из (15) и (16) приходим к следующему разложению:

$$I - \hat{K} - \hat{T} = \left(I - \hat{V}_-\right)\left(I - \hat{Z}\right)\left(I - \hat{V}_+\right), \tag{18}$$

где $\hat{Z}$ - ганкелевый оператор:

$$\hat{Z} f(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty Z(\tau + t) f(t)\,dt \tag{19}$$

с ядерной функцией

$$Z(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_1^\infty e^{-\tau s} \varphi^2(s) \frac{1}{s}\,ds\,. \tag{20}$$

Разложение (18) сводит уравнение (17) к последовательному решению следующих трех уравнений:

$$\left(I - \hat{V}_-\right) F = \lambda A E_1\,, \tag{21}$$

$$\left(I - \hat{Z}\right) P = F\,, \tag{22}$$

$$\left(I - \hat{V}_+\right) U = P\,. \tag{23}$$

Решение уравнения (21) записывается в явном виде:

$$F(\tau) = \lambda A \int_1^\infty e^{-\tau s} \varphi(s) \frac{1}{s}\,ds\,. \tag{24}$$

Уравнение (22), путем применения метода дискретных ординат, сводится к простой линейной алгебраической системе. Наконец, решение уравнения (23) имеет вид (см. (16)):

$$U = \left(I + \hat{\Phi}_{+} \right) P .$$

2.4. *Сравнение метода функции Амбарцумяна решения (7) с применением формулы (8).* Приведем некоторые соображения в пользу применения ФА:

а) Метод ФА достаточно общий. Он допускает распространение на широкие классы задач переноса, описываемых скалярными и векторными интегральными уравнениями.

б) Появляется возможность взаимного контроля двух методов с точки зрения точности численных результатов (см. табл.1).

в) Численная реализация метода ФА выглядит менее трудоемкой по сравнению с вычислением по формуле (8). Следует учесть также то обстоятельство, что в литературе неизвестны критерии, которыми следует руководствоваться в вопросе дискретизации интеграла в (8) (зависящего от параметра τ) при численных расчетах. Такие критерии в случае метода ФА имеются.

г) Построение функции S через U предполагает выполнение операции дифференцирования. Как хорошо известно, задача численного дифференцирования является некорректно поставленной задачей (см. [9]). Применение ФА не предполагает вычисления производных.

3. *Случай шара конечного радиуса.*

3.1. *Усечение свободного члена уравнения (1).* Уравнение вида (1) сравнительно просто решается в тех случаях, когда свободный член является суперпозицией экспонент. Нами будет применен редукционный способ решения (1), позволяющий свести (1) к новому уравнению, в котором свободный член интегрируемый и представляется через экспоненты.

Воспользуемся формулой:

$$g(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\tau} = \int_1^\infty e^{-\tau s}\, ds, \quad \tau > 0 .$$

Представим функцию g в виде:

$$g = g_r + \delta_r , \quad g_r \ge 0 , \quad \delta_r \ge 0 , \tag{25}$$

где $r \ge 1$, $g_r(\tau) = \int_1^r e^{-\tau s}\, ds > 0$, $\delta_r(\tau) = \int_r^\infty e^{-\tau s}\, ds > 0$.

Функция g_r интегрируема при каждом конечном r. Покажем, что функция $\rho_r = \hat{W}\delta_r \ge 0$ существует и интегрируема, а параметр редукции r может быть выбран настолько большим, чтобы функция ρ_r стала сколь угодно малой (по норме).

Можно показать, что интегральная норма функции $\rho_r = \hat{W}_R\,\delta_r$

удовлетворяет неравенству:

$$\|\rho_r\| \le \lambda\left[\ln\left(1+\frac{1}{r}\right) - E_1(rR) + E_1((r+1)R) + \int_0^R e^{-tr} E_1(t)dt\right]. \tag{26}$$

Мы опустим доказательство этого неравенства. Отметим некоторые следствия из формулы (26):

а) Функция $\rho_1 = \hat{W}_R g$ существует и интегрируема. При произвольном $R>0$ имеет место оценка:

$$\|\rho_1\| \le \lambda\left[\ln 2 - E_1(R) + E_1(2R) + \int_0^R e^{-t} E_1(t)dt\right] < +\infty .$$

б) Если $r \to \infty$, то $\|\rho_r\| \to 0$.

в) Формула (26) количественно описывает степень малости $\|\rho_r\|$ при больших r. При больших значениях r норма $\|\rho_r\|$ ведет себя как λ/r.

3.2. *Структура решения уравнения (1). Усеченное уравнение.* Представим искомое решение уравнения (1) в виде

$$H = f_r + \delta_r . \tag{27}$$

Подставляя (25) и (27) в (1) получаем следующее уравнение относительно f_r:

$$f_r = g_r + \rho_r + \hat{W}_R f_r . \tag{28}$$

Свободным членом этого уравнения служит интегрируемая функция $g_r + \rho_r$. Из оценки (6) и принципа сжимающих отображений следует, что если $R < \infty$ или $\lambda < 1$, то (28) обладает единственным интегрируемым решением $f_r \ge 0$ (ради математической строгости отметим, что существование и интегрируемость решения a priori следует понимать в смысле интеграла Лебега).

Уравнение (28) приближенно заменим усеченным уравнением

$$F_r = g_r + \hat{W}_R F_r . \tag{29}$$

Если число r достаточно велико, то, согласно (26), функция δ будет сколь угодно малой по норме, а решение F_r уравнения (29) - сколь угодно близким к f_r

В дальнейшем числа r и R мы будем считать фиксированными, зависимость решения от них отмечать не будем.

4. *Решение усеченного уравнения (29).*

4.1. *Факторизация уравнения (29).* Введем характеристические функции h_+ и h_- интервалов $[0, R]$ и (R, ∞), соответственно. Например, $h_+(\tau) = 1$ при $\tau \in [0, R]$ и $h_+(\tau) = 0$ при $\tau \in (r, \infty)$. Имеет место равенство:

$$h_+(\tau) + h_-(\tau) = 1, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Рассмотрим следующее уравнение на полупрямой:

$$P(\tau)=g_r(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty E_1(|\tau-\tau'|)h_+(\tau')P(\tau')d\tau'-\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty E_1(\tau+\tau')h_+(\tau')P(\tau')d\tau', \quad (30)$$

где g определяется согласно (25).

Очевидно, что если функция P удовлетворяет уравнению (30), то эта функция, рассмотренная на $[0, R]$, является решением уравнения (29).

Пусть $\hat{h}_+$ и $\hat{h}_-$ операторы умножения на функции h_+ и h_-, соответственно. Имеем: $\hat{h}_+ + \hat{h}_- = I$.

В операторной записи уравнение (30) принимает вид:

$$\left(I-\hat{K}\hat{h}_+ + \hat{T}\hat{h}_+\right)P = g_r. \quad (31)$$

Факторизация (15) оператора $I-\hat{K}$ дает возможность построить разложение для уравнения (30). Используя (15) и (16), получаем:

$$I-\hat{K}\hat{h}_+ + T\hat{h}_+ = I-\hat{K}+\hat{K}\hat{h}_- + \hat{T}\hat{h}_+ = \left(I-\hat{V}_-\right)\left[I-\hat{V}_+ + \left(I+\hat{\Phi}_-\right)\hat{K}\hat{h}_- + \hat{Y}\hat{h}_+\right]. \quad (32)$$

Здесь $\hat{Y}=\left(I+\hat{\Phi}_-\right)\hat{T}$ является (ганкелевым) оператором на полупрямой с суммарным ядром $Y(\tau+t)$, где

$$Y(\tau)=\frac{\lambda}{2}E_1(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty \Phi(t)E_1(\tau+t)dt. \quad (33)$$

Функция Y с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией F, заданной формулой (24):

$$Y(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty e^{-\tau s}\varphi(s)\frac{1}{s}ds. \quad (34)$$

Из (15), (16) получаем следующие выражения для оператора $\left(\mathrm{I}+\hat{\Phi}_-\right)\hat{K}$:

$$\left(I+\hat{\Phi}_-\right)\hat{K}=\hat{V}_+ + \hat{\Phi}_-, \quad (35)$$

подставляя которое в (32) приходим к разложению:

$$I-\hat{K}\hat{h}_+ + T\hat{h}_+ = \left(I-\hat{V}_-\right)\left[I-\hat{V}_+ + \left(\hat{V}_+ + \hat{\Phi}_-\right)\hat{h}_- + \hat{Y}\hat{h}_+\right]. \quad (36)$$

Факторизация (36) сводит (31) к уравнению

$$\left(I-\hat{V}_+\hat{h}_+ + \hat{\Phi}_-\hat{h}_- + \hat{Y}\hat{h}_+\right)P = q, \quad (37)$$

где

$$q=\left(I+\hat{\Phi}_-\right)g_r. \quad (38)$$

Используя (13) и (25), получаем

$$q(\tau)=g_r(\tau)+\int_\tau^\infty \Phi(t-\tau)g_r(t)dt=\int_1^r e^{-\tau s}\varphi(s)ds. \tag{39}$$

Перепишем уравнение (37) в раскрытом виде

$$P(\tau)=q(\tau)+\int_0^\tau L(\tau-t)h_+(t)P(t)dt-\int_\tau^\infty \Phi(t-\tau)h_-(t)P(t)dt-\int_0^\infty Y(\tau+t)h_+(t)P(t)dt. \tag{40}$$

Введем обозначение $Q(\tau)=P(\tau)$, $\tau>R$. Рассматривая равенство (40) при $\tau\le R$, будем иметь:

$$F(\tau)=q(\tau)+\int_0^\tau L(\tau-t)F(t)dt-\int_R^\infty \Phi(t-\tau)Q(t)dt-\int_0^R Y(\tau+t)F(t)dt. \tag{41}$$

К уравнению (41) присоединяем следующее соотношение, которое получается из (29) при $\tau>R$:

$$Q(\tau)=g_r(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int_0^R\left(E_1(\tau-t)-E_1(\tau+t)\right)F(t)dt. \quad \tau>R \tag{42}$$

Мы пришли к системе (41), (42) для определения функций F и Q. Из результатов работы [3] следует, что при $\lambda<1$ эта система имеет единственное решение. Случай $\lambda=1$ нуждается в специальном исследовании.

Мы будем преобразовывать систему (41), (42) в систему интегральных уравнений относительно следующих функций α, β, γ:

$$\alpha(\eta)=\int_0^R e^{-(R-t)\eta}F(t)dt,\quad \beta(\eta)=\int_R^\infty e^{-(t-R)\eta}Q(t)dt \quad\text{и}\quad \gamma(\eta)=\int_0^R e^{-t\eta}F(t)dt. \tag{43}$$

С учетом представлений (13), (34) для функций Φ и Y, из системы (41), (42) получаем:

$$F(\tau)=q(\tau)+\int_0^\tau L(\tau-t)F(t)dt-\int_0^\infty e^{-(R-\tau)s}\beta(s)d\,\omega(s)-\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty e^{-\tau s}\varphi(s)\frac{\gamma(s)}{s}ds, \tag{44}$$

$$Q(\tau)=g_r(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty e^{-(\tau-R)s}\frac{\alpha(s)}{s}ds-\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty e^{-\tau s}\frac{\gamma(s)}{s}ds, \tag{45}$$

решив уравнение Вольтерра (44) относительно F с помощью резольвенты Φ, будем иметь:

$$F(\tau)=q_1(\tau)-\int_0^\infty U_1(\tau,s)\beta(s)d\,\omega(s)-\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty U_2(\tau,s)\gamma(s)ds, \tag{46}$$

где $q_1(\tau)=q(\tau)+\int_0^\tau\Phi(\tau-t)q(t)dt$,

$$U_1(\tau,s)=e^{-(R-\tau)s}\left[1+\int_0^\tau\Phi(t)e^{-ts}dt\right],\quad U_2(\tau,s)=e^{-\tau s}\frac{\varphi(s)}{s}\left[1+\int_0^\tau\Phi(t)e^{ts}dt\right]. \tag{47}$$

Подставляя (45) и (46) в выражения (43) приходим к следующей линейной системе относительно функций α, β, γ:

$$\alpha(s)=G_1(s)-\int_0^\infty W_1(s,p)\beta(p)d\,\omega(p)-\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty W_2(s,s')\gamma(s')ds',$$

$$\beta(p)=G(p)+\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty \frac{\alpha(s)}{s(s+p)}ds-\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-Rs'}\gamma(s')}{s'(s'+p)}ds', \tag{48}$$

$$\gamma(s)=G_2(s)-\int_0^\infty W_3(s,p)\beta(p)d\,\omega(p)-\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty W_4(s,s')\gamma(s')ds',$$

где

$$G(s)=\int_R^\infty e^{-(t-R)s}g_r(t)dt=\int_1^r \frac{e^{-Rs'}}{s+s'}ds',$$

$$G_1(s)=\int_0^R e^{-(R-t)s}q_1(t)dt=\int_1^r \big(B(s)-B(s')\big)\frac{\varphi(s')}{s'-s}ds', \tag{49}$$

$$G_2(s)=\int_0^R e^{-ts}q_1(t)dt=\int_1^r \big(A(s)-e^{-Rs}B(s')\big)\frac{\varphi(s')}{s'+s}ds'.$$

$$W_1(s,p)=\frac{1}{s+p}\left[A(p)-e^{-Rp}B(s)\right],\quad W_2(s,p)=\frac{\varphi(p)}{p(p-s)}\left[B(s)-B(p)\right]. \tag{50}$$

$$W_3(s,p)=\frac{1}{p-s}\left[e^{-Rs}A(p)-e^{-Rp}A(s)\right],\quad W_4(s,p)=\frac{\varphi(p)}{p(p+s)}\left[A(s)-e^{-Rs}B(p)\right]. \tag{51}$$

Здесь сделаны обозначения:

$$A(p)=1+\int_0^R \Phi(t)e^{-tp}dt,\quad B(p)=e^{-Rp}\left(1+\int_0^R \Phi(t)e^{tp}dt\right). \tag{52}$$

4.2. *Применение метода дискретных ординат.* Нами были проведены численные расчеты с применением метода дискретных ординат по версии работы [5]. Ядерная функция E_1 и свободный член g_r уравнения (29) заменяются конечными линейными комбинациями экспонент:

$$E_1(x)\approx\sum_{k=0}^N a_k\exp(-s_k x), \tag{53}$$

$$g_r(\tau)\approx\sum_{m=0}^M c_m\exp(-\xi_m\tau). \tag{54}$$

Метод [5] дает гарантированную точность аппроксимации при подходящем выборе N и M. В этой работе подробно разобран случай функции E_1. Для аппроксимации (54) функции g_r рассмотрим некоторое разбиение интервала $[1,r]$: $1=s_0<s_1<\ldots<s_{M+1}=r$. Тогда будем иметь $c_m=s_{m+1}-s_m$. Возьмем $\xi_m\in[s_m;s_{m+1}]$. Оптимальные значения (s_m) и (ξ_m) определяются путем решения следующей системы из $2N$ уравнений:

$$\xi_m=\frac{1}{2}(s_m+s_{m+1}),\quad m=\overline{0,M-1}, \tag{55}$$

$$\frac{1}{s_{m+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi_m} + \frac{1}{\xi_{m+1}}\right), \quad m = \overline{0, M-1}. \tag{56}$$

Обозначим $y_m = s_{m-1}/s_m$. Можно показать, что $y_m = \text{const}$, откуда, учитывая $s_0 = 1$ и $s_{M-1} = r$, получим $s_m = r^{m/M+1}$. Числа ξ_m вычисляются по (55).

4.3. ***Результаты численных расчетов.*** В табл.1 приведены значения отношения $S(\tau)/S_1(\tau)$, вычисленные двумя разными способами:

I) с помощью формулы (32).(36) (см. [1] табл.50),

II) методом настоящей работы.

Табл.1 свидетельствует о хорошем согласии результатов решения уравнения (7) двумя способами.

На рис.1-4 приведены графики функции источника $\frac{1}{\tau}H(\tau)$ и функции F_r при различных значениях R, λ и r.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ $S(\tau)/S_1(\tau)$ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЫ

λ \ τ		0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.5	2	2.5	3
0.3	I	1	1.07	1.12	1.22	1.31	1.4	1.47	1.65	1.8	1.95	2.08
	II	1	1.061	1.12	1.225	1.318	1.402	1.479	1.651	1.802	1.94	2.07
0.5	I	1	1.12	1.23	1.43	1.62	1.82	2	2.47	2.94	3.42	3.91
	II	1	1.108	1.217	1.427	1.63	1.826	2.017	2.483	2.942	3.404	3.876
0.7	I	1	1.17	1.35	1.7	2.08	2.49	2.92	4.11	5.5	7.11	8.98
	II	1	1.145	1.313	1.168	2.085	2.519	2.982	4.266	5.746	7.446	9.401
0.9	I	1	1.24	1.51	2.14	2.9	3.81	4.89	8.5	13.8	21.4	32.1
	II	1	1.206	1.461	2.084	2.858	3.792	4.903	8.601	13.985	21.671	32.502

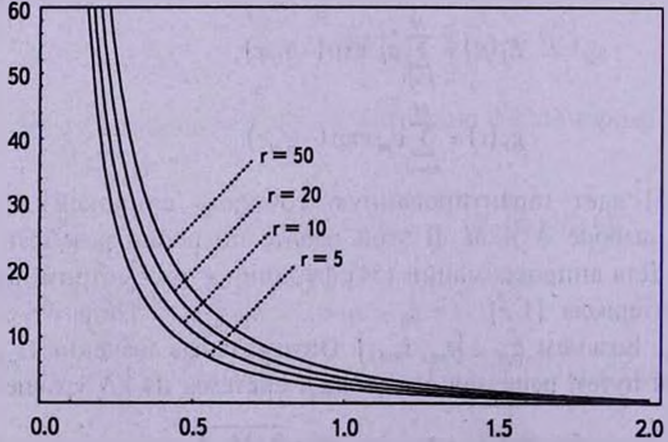

Рис.1. Функция источника $H(\tau)/\tau$ при $R = 2$, $\lambda = 0.9$.

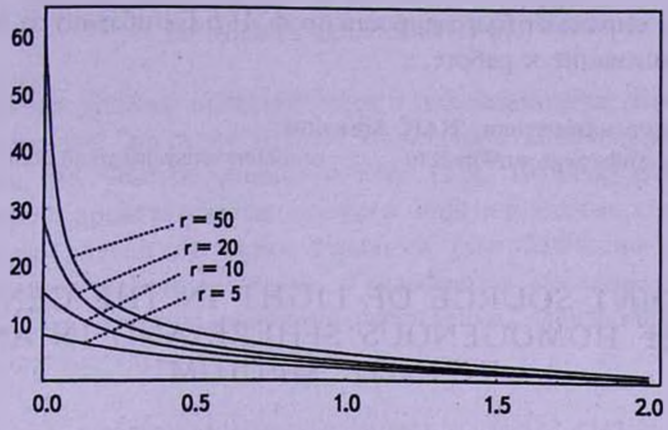

Рис.2. Функции F_r при $R = 2$, $\lambda = 0.9$.

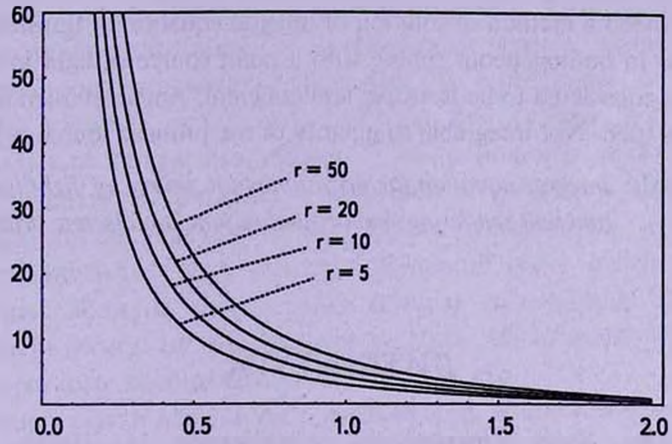

Рис.3. Функции источника $H(\tau)/\tau$ при $R = 2$, $\lambda = 0.99$.

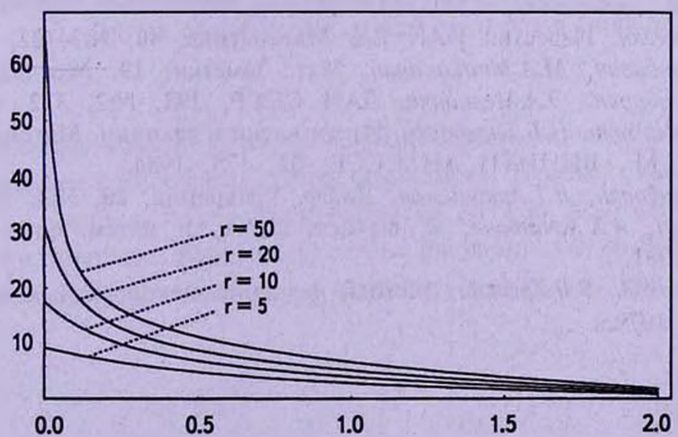

Рис.4. Функции F_r при $R = 2$, $\lambda = 0.99$.

Авторы выражают благодарность проф. Н.Б.Енгибаряну за постановку задачи и внимание к работе.

Институт математики, НАН Армении
e-mail: anibarseghyan@mail.ru van88teravetisyan@gmail.com

A POINT SOURCE OF LIGHT IN THE CENTER OF HOMOGENOUS SPHERE AND IN AN INFINITE MEDIUM

A.G.BARSEGHYAN, V.V.TER-AVETISYAN

It is provided a method of solution of integral equation of transfer in infinite medium and in homogeneous sphere with a point source of light in the center. Scattering is considered to be isotropic and coherent. Ambartsumian function for half-space is used. Not integrable singularity of the primary source is eliminated.

Key words: *integral equation:factorization:point source of light:isotropic and coherent scattering:Ambartsumian function:discrete ordinat method*

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.В.Соболев*, Курс теоретической астрофизики, М., Наука, 1985.
2. *В.В.Тер-Аветисян*, Третье Российско-Армянское рабочее совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. Краткие сообщения, с.151-153, Ереван, 2010.
3. *А.Г.Барсегян*, Известия НАН РА, Математика, 40, №3, 22, Ер. 2005.
4. *Н.Б.Енгибарян*, *М.А.Мнацаканян*, Мат. Заметки, 19, №6, 927, 1976.
5. *Н.Б.Енгибарян*, *Э.А.Мелконян*, ДАН СССР, 292, №2, 322, 1985.
6. *Л.Г.Арабаджян*, *Н.Б.Енгибарян*, Итоги науки и техники, Математический анализ, М., ВИНИТИ АН СССР, 22, 175, 1984.
7. *Н.Б.Енгибарян*, *Л.Г.Арабаджян*, Дифф. Уравнения, 26, №8, 1442, 1990.
8. *А.Н.Афян*, *А.Х.Хачатрян*, ж. вычисл. матем. и матем. физ., 41, №8, 1217, 2001.
9. *А.Н.Тихонов*, *В.Я.Арсенин*, Методы решения некорректных задач, М., Наука, 1979.