

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА
ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ
АТМОСФЕРЕ. II

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 18 января 2012

В работе описывается новая возможность, позволяющая свести линейные задачи переноса излучения в плоскопараллельной неоднородной атмосфере к решению задач с начальными условиями. Показывается, что в общем случае для нахождения как внешнего, так и внутреннего поля излучения достаточно решить две такие задачи для дифференциальных уравнений. С этой целью применяется метод инвариантного погружения. Рассматриваются как одномерная, так и трехмерная задачи диффузного отражения и пропускания для семейства сред различных оптических толщин. Предлагаемый подход применяется также для получения решения задачи переноса излучения в трехмерных неоднородных атмосферах, содержащих источники энергии. Приводятся результаты численных расчетов.

Ключевые слова: перенос излучения; трехмерная среда; дифференциальные уравнения с начальными условиями

1. *Введение.* В первой части работы [1] (далее Н1) был показан путь, позволяющий свести задачи переноса излучения в неоднородной атмосфере к решению более простых и удобных для вычислений задач с начальными условиями. Идея заключалась в том, что вначале находятся коэффициенты отражения и пропускания для семейства атмосфер с различными оптическими толщинами, после чего определяется поле излучения внутри среды. Важную роль в методе играло введение в рассмотрение функции $P(\tau_0)$ (или матрицы $P(\tau_0)$ - в случае некогерентного рассеяния), обратной коэффициенту прохождения. Для нее было получено и решено отдельное уравнение. В матричном случае это позволяло избежать трудностей, связанных с многократным обращением матрицы $Q(\tau_0)$. Здесь более подробно остановимся на другой возможности, указанной в конце предыдущей части работы. При этом мы вновь начнем с рассмотрения задачи переноса излучения в неоднородной одномерной среде и только после этого покажем каким образом описываемый подход может быть применен в случае трехмерной среды.

2. *Задача о некогерентном рассеянии в неоднородной одномерной атмосфере.* Рассмотрим атмосферу конечной оптической толщины τ_0 , в которой рассеяние внутри линии происходит с полным перераспределением по частотам. Тогда уравнение (37Н1) для коэффициента

отражения $r(x', x, \tau_0)$ (напомним, что такое обозначение относится к случаю, когда квант частоты x падает на среду со стороны границы τ_0 , как это показано на верхнем чертеже рис.1) переписывается в виде

$$\frac{dr}{d\tau_0} = -[\alpha(x) + \alpha(x')]r(x', x, \tau_0) + \frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\varphi(x, \tau_0)\varphi(x', \tau_0) \quad (1)$$

где

$$\varphi(x, \tau_0) = \alpha(x) + \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x', \tau_0)\alpha(x')dx' \quad (2)$$

и $\tilde{\lambda}(\tau_0) = A\lambda(\tau_0)$. В данной работе в численных расчетах мы ограничимся рассмотрением доплеровского уширения линии, при котором профиль коэффициента поглощения $\alpha(x) = \exp(-x^2)$ и нормировочный множитель $A = 1/\sqrt{\pi}$. В качестве начального условия имеем $r(x', x, 0) = 0$. При

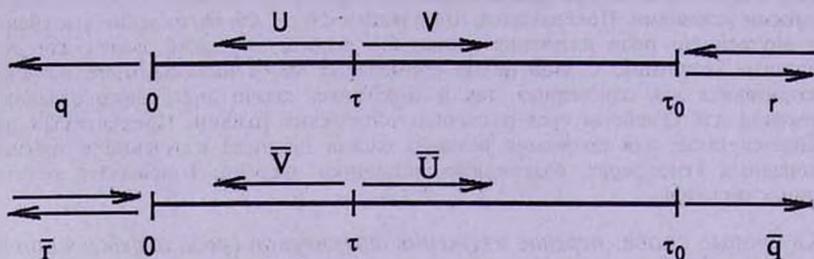


Рис.1. Схематическое изображение переноса излучения в одномерной атмосфере.

численном решении отмеченные в Н1 достоинства скалярного аналога уравнения (1) сохраняются и в данном более общем случае. Вычисления методом Рунге-Кутты четвертого порядка показывают достаточно высокую точность вплоть до толщин, при которых искомая функция достигает своего асимптотического значения.

При нахождении коэффициента пропускания $q(x', x, \tau_0)$ выделим, как это обычно делается, его диффузную составляющую $\sigma(x', x, \tau_0)$ так, что

$$q(x', x, \tau_0) = \delta(x - x')\exp[-\alpha(x)\tau_0] + \sigma(x', x, \tau_0), \quad (3)$$

где δ есть δ -функция Дирака. Описанная в Н1 процедура инвариантного погружения, связанная с вариацией оптической толщины τ_0 , позволяет написать

$$\frac{d\sigma}{d\tau_0} = -\alpha(x)\sigma(x', x, \tau_0) + \frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2}\varphi(x, \tau_0)\psi(x', \tau_0), \quad (4)$$

где

$$\psi(x', \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x', x'', \tau_0)\alpha(x'')dx'' = \exp[-\alpha(x)\tau_0] + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x', x'', \tau_0)\alpha(x'')dx'', \quad (5)$$

и начальное условие $\sigma(x', x, 0) = 0$.

На данном этапе важно заметить, что после определения коэффициентов отражения и пропускания поле излучения внутри среды, вообще говоря, можно определить путем решения обычной системы уравнений переноса для функций U и V с заданными, однако теперь, начальными условиями. Выбранный нами подход более прост и позволяет обойтись без решения уравнения (4). Чтобы показать это, обратимся к вопросу о нахождении величины $U(x', \tau; x, \tau_0)$, представляющей собою вероятность пролета на глубине τ кванта с частотой, заключенной в интервале $(x', x' + dx')$. Как и в случае коэффициента пропускания, выделим ее диффузную составляющую $u(x', \tau; x, \tau_0)$ так, что

$$U(x', \tau; x, \tau_0) = \delta(x - x') \exp[-\alpha(x)(\tau_0 - \tau)] + u(x', \tau; x, \tau_0). \quad (6)$$

Используемый нами подход инвариантного погружения приводит к следующему уравнению для функции $u(x', \tau; x, \tau_0)$,

$$\frac{du}{d\tau} = -\alpha(x)u(x', \tau; x, \tau_0) + \frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2} \varphi(x, \tau_0) \Psi(x', \tau, \tau_0), \quad (7)$$

причем

$$\begin{aligned} \Psi(x', \tau, \tau_0) = & \int_{-\infty}^{\infty} U(x', \tau; x'', \tau_0) \alpha(x'') dx'' = \exp[-\alpha(x)(\tau_0 - \tau)] + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} u(x', \tau; x'', \tau_0) \alpha(x'') dx''. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) удовлетворяет начальному условию $u(x', \tau; x, \tau) = 0$. Исходя из физического смысла рассматриваемых величин легко заключить, что $u(x', 0; x, \tau_0) = \sigma(x', x, \tau_0)$, поэтому, решая уравнение (7), мы находим, в частности, и коэффициент пропускания среды $q(x', x, \tau_0)$. Ниже мы убедимся, что решение двух интегродифференциальных уравнений (1) и (7) достаточно для определения всех величин, описывающих диффузное отражение и пропускание плоскопараллельных неоднородных атмосфер различных оптических толщин. Здесь же пока заметим, что уравнение (7) позволяет найти интенсивность излучения на глубине с координатой τ для семейства сред с $\tau_0 \geq \tau$. Если же задаться целью найти интенсивность излучения на разных глубинах для атмосферы фиксированной толщины, то для этого, как было указано выше, достаточно обратиться к обычному уравнению переноса, которое записывается в виде

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha(x')u(x', \tau; x, \tau_0) - \frac{\tilde{\lambda}(\tau_0)}{2} \alpha(x') \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x'', \tau) U(x'', \tau; x, \tau_0) dx'', \quad (9)$$

однако с условием $u(x', 0; x, \tau_0) = \sigma(x', x, \tau_0)$.

Знание величины U позволяет определить интенсивность излучения в обратном направлении по формуле

$$V(x', \tau; x, \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'', \tau) U(x'', \tau; x, \tau_0) dx'', \quad (10)$$

завершая тем самым решение задачи о нахождении поля излучения внутри среды.

До сих пор мы рассматривали случай, когда среда освещается со стороны границы $\tau = \tau_0$. Допустим теперь, что среда освещается с противоположной стороны и покажем, что найденные выше величины r и u полностью определяют оптические характеристики и поле излучения внутри среды и в этом случае (величины, относящиеся к данному случаю, сверху будут снабжаться чертой). Так, например, упомянутая выше процедура, связанная с вариацией толщины атмосферы, приводит к следующему уравнению для коэффициента отражения $\bar{r}(x', x, \tau_0)$ (см. нижний чертеж на рис.1)

$$\frac{d\bar{r}}{d\tau_0} = \frac{\bar{\lambda}(\tau_0)}{2} \psi(x, \tau_0) \psi(x', \tau_0) \quad (11)$$

с условием $\bar{r}(x', x, 0) = 0$. При выводе данного уравнения было учтено, что $\bar{q}(x', x, \tau_0) = q(x, x', \tau_0)$, выражающее свойство обратимости оптических явлений (см. также [2]). Мы видим, что поскольку коэффициент пропускания был определен выше, то правая часть уравнения (11) является известной и потому его решение равносильно вычислению обычного интеграла. Однако здесь также, как и выше при определении коэффициента пропускания, можно обойтись без обращения к уравнению (11). Действительно, для функции $\bar{V}(x', \tau; x, \tau_0)$ нетрудно получить

$$\frac{d\bar{V}}{d\tau_0} = \frac{\bar{\lambda}(\tau_0)}{2} \Psi(x', \tau, \tau_0) \psi(x, \tau_0) \quad (12)$$

с начальным условием $\bar{V}(x', \tau; x, \tau) = 0$. Положение дел в данном случае аналогично тому, что имело место в случае уравнения (7). После определения коэффициента отражения и функции U вопрос о нахождении величины \bar{V} сводится к вычислению интеграла

$$\bar{V}(x', \tau; x, \tau_0) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\tau_0} \bar{\lambda}(t) \Psi(x', \tau, t) \psi(x, t) dt. \quad (13)$$

Более того, очевидно, что уравнение (11) является частным случаем уравнения (13), когда $\tau = 0$. Что касается величины \bar{U} , то ее диффузная составляющая $\bar{u}(x', \tau; x, \tau_0)$

$$\bar{U}(x', \tau; x, \tau_0) = \delta(x - x') \exp[-\alpha(x)\tau] + \bar{u}(x', \tau; x, \tau_0), \quad (14)$$

связана с найденной выше величиной $\bar{V}(x', \tau; x, \tau_0)$ простым соотношением

$$\bar{u}(x', \tau; x, \tau_0) = \psi(x, \tau) + \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'', \tau) \bar{V}(x'', \tau; x, \tau_0) dx'', \quad (15)$$

обладающей очевидным физическим смыслом.

Таким образом мы нашли последнюю из величин, определяющих поле излучения в задаче о диффузном отражении и пропускании неоднородной атмосферой конечной толщины. Мы видим, что знание величин, описывающих диффузию излучения в среде при ее освещении с одной стороны является достаточным для определения тех же величин при ее освещении с обратной стороны. Далее, мы убедились, что все интересующие нас величины легко могут быть вычислены, если только решены уравнения (1) для одного из коэффициентов отражения и (7) - для функции u . В обоих случаях мы имеем дело с задачами с начальными условиями (задачи Коши). Все остальные величины задаются в явном виде соотношениями (10), (13) и (15) и легко вычисляются.

Для иллюстрации полученных результатов на рис.2 приводятся профили коэффициентов отражения и пропускания для семейства неоднородных атмосфер различных толщин, если на них падает излучение в непрерывном

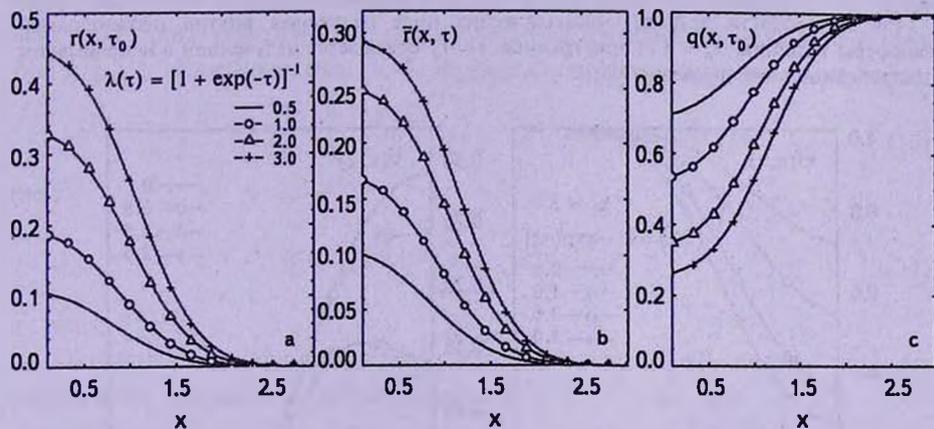


Рис.2. Профили коэффициентов отражения и пропускания для неоднородных атмосфер различных оптических толщин при освещении их излучением в непрерывном спектре единичной интенсивности. Предполагается, что диффузия излучения происходит с полным перераспределением по частотам. Значения оптических толщин приводятся на рис.2а.

спектре единичной интенсивности. Расчеты относятся к случаю, когда коэффициент рассеяния меняется с глубиной по закону $\lambda(\tau) = [1 + \exp(-\tau)]^{-1}$. Такой выбор обусловлен большей наглядностью при иллюстрации поведения исследуемых величин. Рис.2а, б позволяют проследить, в какой мере эффект неоднородности проявляется для атмосфер различных оптических толщин. На рис.3, 4 показана эволюция профилей величин, описывающих поле излучения внутри неоднородной атмосферы толщины $\tau_0 = 3$ в двух разобранных нами случаях, соответствующих освещению той или иной границы сред. Новых обозначений для всех профилей на рис.2-4 мы не вводим: за ними сохраняются обозначения интегрируемых величин, но с меньшим количеством аргументов, что не должно привести к недоразумениям.

Все расчеты проведены для полного перераспределения по частотам.

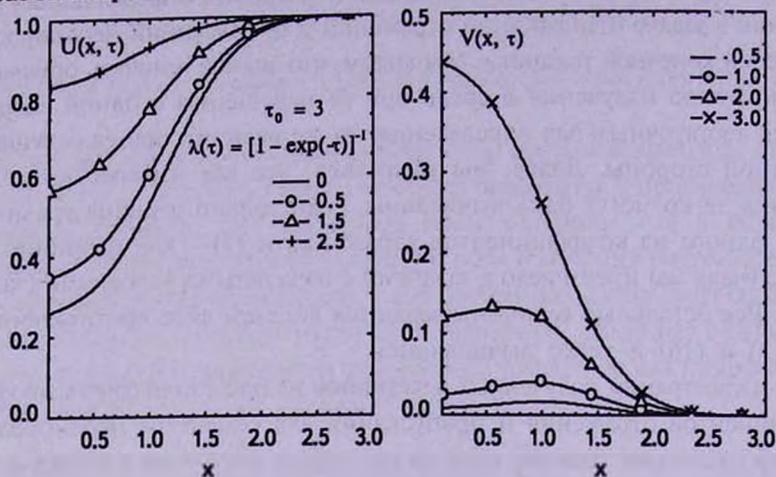


Рис.3. Профили величин, описывающих поле излучения внутри неоднородной атмосферы толщины $\tau_0 = 3$, когда граница $\tau = \tau_0$ освещается излучением в непрерывном спектре единичной интенсивности.

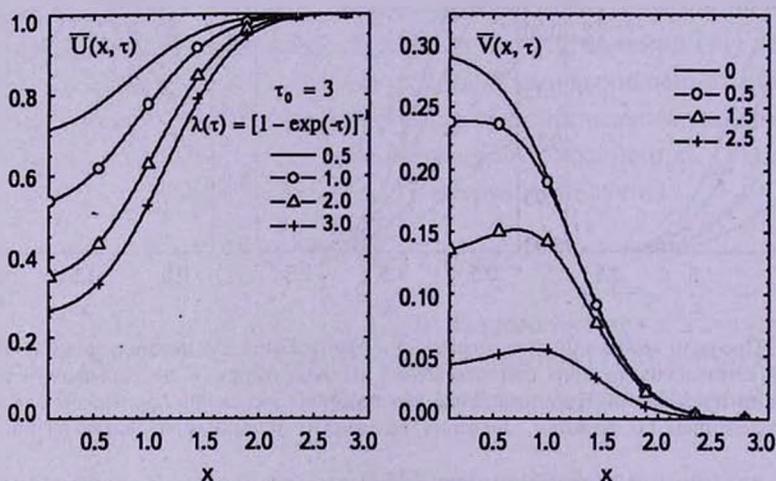


Рис.4. То же самое, что на рис.3, при освещении границы 0.

3. *Трехмерная неоднородная атмосфера.* Подход, описанный в предыдущем разделе, естественным образом обобщается на случай трехмерной атмосферы. Рассмотрим задачу о диффузном отражении и пропускании монохроматического излучения для плоскопараллельной конечной атмосферы. Для простоты допустим, что рассеяние является изотропным. Как и выше, начнем с определения глобальных величин, характеризующих оптические свойства среды при освещении со стороны границы $\tau = \tau_0$ (см. рис.5).

Для коэффициента отражения от границы $\tau = \tau_0$ введем обозначение $\rho(\eta, \xi, \tau_0)$, где ξ - определяет угол падения, а η - угол отражения (углы

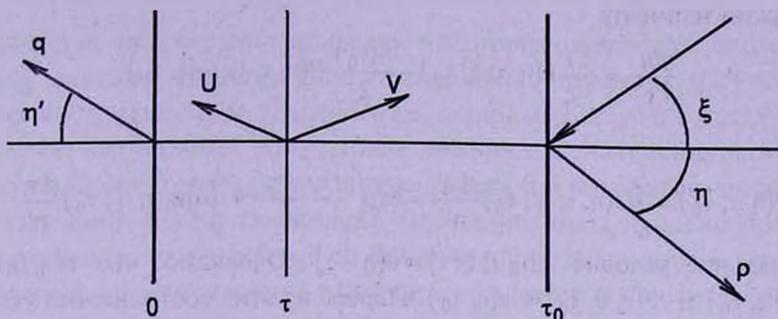


Рис.5. Схематическое изображение переноса излучения в трехмерной атмосфере при ее освещении со стороны границы τ_0 .

отсчитываются от направления внешней нормали к границе $\tau = \tau_0$). Он вводится таким образом, что вероятностным смыслом обладает величина $\rho(\eta, \xi, \tau_0)/\xi$. Как известно [3,4], функция ρ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\rho}{d\tau_0} = -\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right)\rho(\eta, \xi, \tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\varphi(\eta, \tau_0)\varphi(\xi, \tau_0), \quad (16)$$

где

$$\varphi(\eta, \tau_0) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\eta, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} \quad (17)$$

и $\rho(\eta, \xi, 0) = 0$.

Перейдя к коэффициенту пропускания $q(\eta, \xi, \tau)$, введем для его диффузной составляющей обозначение $\sigma(\eta, \xi, \tau)$ так, что

$$q(\eta, \xi, \tau_0) = \xi\delta(\eta - \xi)\exp[-\tau_0/\xi] + \sigma(\eta, \xi, \tau_0). \quad (18)$$

Известно [3,4], что функция σ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\sigma}{d\tau_0} = -\frac{1}{\xi}\sigma(\eta, \xi, \tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\psi(\eta, \tau_0)\varphi(\xi, \tau_0), \quad (19)$$

где

$$\psi(\eta, \tau_0) = \int_0^1 q(\eta, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} = \exp\left(-\frac{\tau_0}{\eta}\right) + \int_0^1 \sigma(\eta, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} \quad (20)$$

и в качестве начального условия имеем $\sigma(\eta, \xi, 0) = 0$.

Оба уравнения, (16) и (18), получаются той же процедурой инвариантного погружения прибавлением к границе бесконечно тонкого слоя с дальнейшим переходом к пределу, когда его толщина стремится к нулю. Аналогичным образом выводятся уравнения для величин, описывающих поле излучения внутри среды. Если для диффузной составляющей величины $U(\eta, \tau; \xi, \tau_0)$ (рис.5) ввести обозначение $u(\eta, \tau; \xi, \tau_0)$ так, что

$$U(\eta, \tau; \xi, \tau_0) = \xi \delta(\eta - \xi) \exp\left[-\frac{\tau_0 - \tau}{\xi}\right] + u(\eta, \tau; \xi, \tau_0), \quad (21)$$

то можно написать

$$\frac{du}{d\tau_0} = -\frac{1}{\xi} u(\eta, \tau; \xi, \tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2} \Psi(\eta, \tau, \tau_0) \Phi(\xi, \tau_0), \quad (22)$$

где

$$\Psi(\eta, \tau, \tau_0) = \int_0^1 U(\eta, \tau; \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} = \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta}\right) + \int_0^1 u(\eta, \tau; \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'}, \quad (23)$$

и начальное условие $u(\eta, \tau; \xi, \tau) = \delta(\eta - \xi)$. Очевидно, что $u(\eta, 0; \xi, \tau_0) = \sigma(\eta, \xi, \tau_0)$ и $\Psi(\eta, 0, \tau_0) = \psi(\eta, \tau_0)$. Первое из этих соотношений указывает на то, что для достижения поставленной нами цели нет необходимости решения уравнения (19), поскольку, как и в рассмотренной выше задаче, знание функций $\rho(\eta, \xi, \tau_0)$ и $u(\eta, \tau; \xi, \tau_0)$ достаточно для определения всех остальных представляющих интерес величин. И только в случае, если необходимо определить функцию $u(\eta, \tau; \xi, \tau_0)$ для различных глубин в атмосфере наперед заданной оптической толщины (а не для семейства атмосфер), другими словами, при решении обычных уравнений переноса, знание коэффициента пропускания позволит свести вопрос об определении указанной величины к задаче с начальными условиями. Как легко видеть, аналогия с рассмотренной выше задачей полная.

После определения $u(\eta, \tau; \xi, \tau_0)$, на основе простых физических рассуждений находим

$$V(\eta, \tau; \xi, \tau_0) = \rho(\eta, \xi, \tau) \exp\left[-\frac{\tau_0 - \tau}{\xi}\right] + \int_0^1 \rho(\eta, \eta', \tau) u(\eta', \tau; \xi, \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'}. \quad (24)$$

Наконец перейдем к случаю, когда среда освещается со стороны границы $\tau = 0$. Как и выше, соответствующие величины сверху будут снабжаться чертой. Рассуждения, на основе которых получаются уравнения для этих величин идентичны тем, проведенным при изложении одномерной задачи, поэтому, опуская их, приведем лишь окончательные результаты. Коэффициент отражения $\bar{\rho}(\eta, \xi, \tau_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\tau_0} = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} \bar{\psi}(\eta, \tau_0) \bar{\Phi}(\xi, \tau_0), \quad (25)$$

с очевидным начальным условием $\bar{\rho}(\eta, \xi, 0) = 0$. Что касается коэффициента пропускания, то $\bar{q}(\eta, \xi, \tau_0) = q(\xi, \eta, \tau_0)$. Величины, описывающие поле излучения внутри среды, определяются решением уравнения

$$\frac{d\bar{V}}{d\tau_0} = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} \bar{\Psi}(\eta, \tau, \tau_0) \bar{\Psi}(\xi, \tau_0) \quad (26)$$

с начальным условием $\bar{V}(\eta, \tau; \xi, \tau) = 0$, после чего находим $\bar{U}(\eta, \tau; \xi, \tau_0)$ из соотношения

$$\bar{U}(\eta, \tau; \xi, \tau_0) = \psi(\xi, \tau) + \int_0^1 \rho(\eta, \eta', \tau) \bar{V}(\eta', \tau; \xi, \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} \quad (27)$$

В качестве иллюстрации приведем некоторые результаты численных расчетов, дающие представление о специфике переноса излучения в неоднородной атмосфере. Рассмотрим, например, случай, когда среда освещается изотропным излучением единичной интенсивности. нас интересует угловое распределение интенсивности как выходящего излучения, так и излучения внутри атмосферы. Оно может быть найдено простым интегрированием соответствующей величины по углу падения и делением на η . Например, для углового распределения интенсивности излучения, отраженного от границы τ_0 , имеем

$$I(\tau_0, \eta, \tau_0) = \int_0^1 \rho(\eta, \xi, \tau_0) \frac{d\xi}{\eta}, \quad I(0, \eta, \tau_0) = \int_0^1 q(\eta, \xi, \tau_0) \frac{d\xi}{\eta} \quad (28)$$

Аналогичным образом определяется угловое распределение остальных величин. На рис.6 изображены такие распределения для отраженного и пропущенного излучения для атмосфер различных оптических толщин при $\lambda(\tau) = [1 + \exp(-\tau)]^{-1}$. Левый рисунок относится к случаю, когда освещается граница $\tau = 0$ среды, а правый - если среда освещается с противоположной стороны. Поэтому коэффициенты отражения изображены соответственно: слева - на левом рисунке и справа - на правом рисунке. В противоположных половинах рисунков показаны коэффициенты пропускания. Горизонтальная ось выбрана по направлению нормалей к границам среды. Бросается в глаза различие между величинами и угловыми

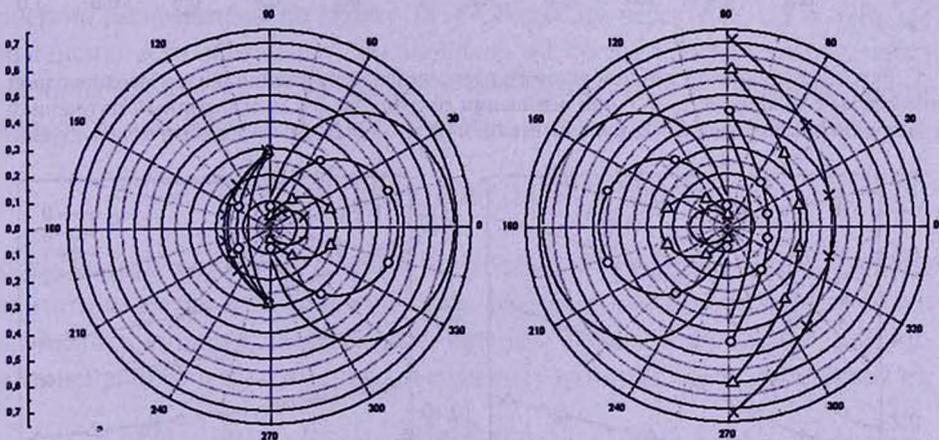


Рис.6. Угловое распределение излучения, отраженного и пропущенного неоднородными атмосферами различных оптических толщин при освещении их изотропным излучением единичной интенсивности. Сплошные линии соответствуют значению оптической толщины, равному 0,5, кружочками снабжены кривые для $\tau_0 = 1$, треугольниками - $\tau_0 = 2$, крестиками - $\tau_0 = 3$.

распределениями излучения, отраженного от двух границ среды. Как и следовало ожидать, величина отраженного излучения больше для границы τ_0 , на которой значение коэффициента рассеяния ближе к единице. С другой стороны, несмотря на то, что на обеих границах интенсивность отраженного излучения возрастает с увеличением угла по отношению к нормали, однако поведение указанных распределений различается: в случае границы $\tau = 0$ оно слабее зависит от оптической толщины среды. Важно также отметить, что большая часть излучения, пропущенного средой, наоборот, сосредоточена на углах, близких к нормали.

На рис.7, 8 изображены угловые распределения поля излучения в атмосфере оптической толщины $\tau_0 = 3$ при освещении каждой из двух ее границ

$$I^+(\eta, \tau, \tau_0) = \int_0^1 U(\eta, \tau; \xi, \tau_0) \frac{d\xi}{\eta}, \quad I^-(\eta, \tau, \tau_0) = \int_0^1 V(\eta, \tau; \xi, \tau_0) \frac{d\xi}{\eta}. \quad (29)$$

Одноименные величины при освещении границы $\tau = 0$, как и выше,

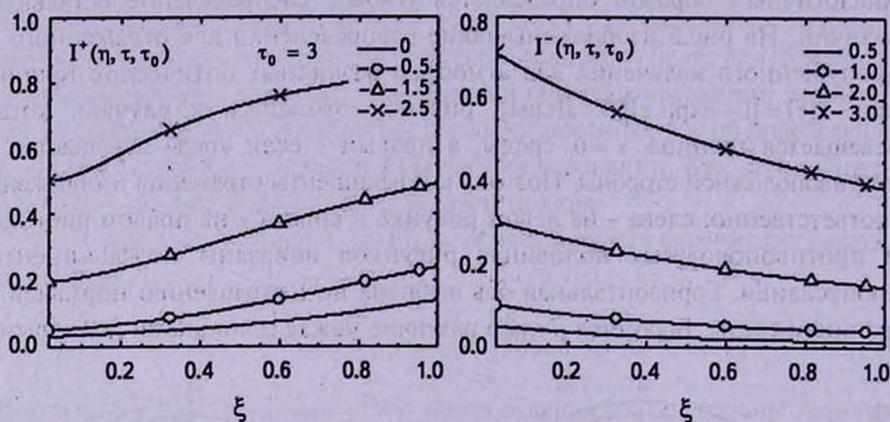


Рис.7. Изменение с глубиной углового распределения излучения внутри неоднородной атмосферы с толщиной $\tau_0 = 3$ при освещении ее границы $\tau = \tau_0$ изотропным излучением единичной интенсивности. В правом верхнем углу даются значения оптических глубин.

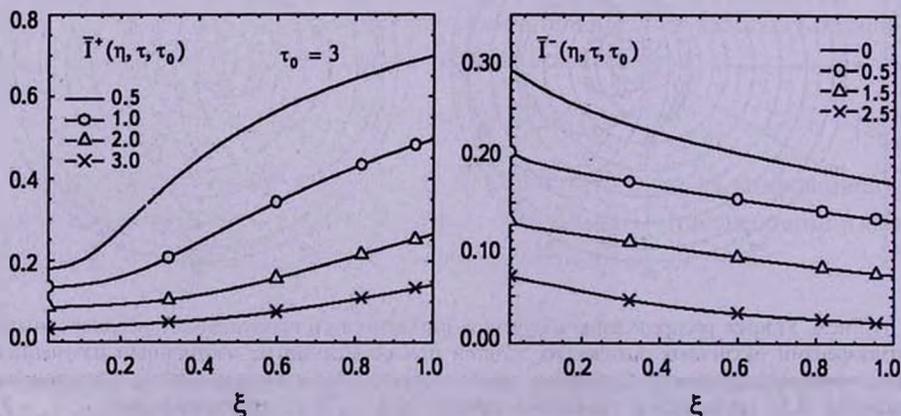


Рис.8. То же самое, что на рис.7, когда освещается граница $\tau = 0$ среды.

снабжаются сверху чертой.

Следует отметить, что если учесть принцип обратимости оптических явлений, то рассмотренным распределениям можно приписать также другой физический смысл. Например, $I(\tau_0, \eta, \tau_0)$ можно интерпретировать как вероятность того, что квант, падающий на среду под углом η , отразится от нее. Подобным образом, величина $I^+(\eta, \tau, \tau_0)$ равна вероятности выхода кванта, летящего на глубине τ в направлении η , через границу τ_0 среды.

4. *Внутренние источники энергии.* В настоящем разделе мы покажем, что после решения задачи диффузного отражения и пропускания, существенным образом упрощается решение другой стандартной и весьма важной для астрофизики задачи о свечении атмосферы, которая содержит первичные источники энергии. В реальности, как правило, приходится сталкиваться с необходимостью учитывать неоднородности в распределении различных физических величин, способных повлиять на наблюдаемые спектры. К числу таких величин относится мощность излучения внутренних источников энергии, которая задается величиной тех или иных термодинамических параметров и, вообще говоря, распределена в среде неравномерно. Поэтому, учитывая изменения в среде коэффициента излучения, естественным образом возникает задача о выявлении эффектов неоднородного распределения внутренних источников энергии. Здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда мощность указанных источников зависит лишь от оптической глубины, хотя интересующемуся читателю будет нетрудно в нижеприводимых уравнениях внести незначительные изменения с тем, чтобы учесть также и зависимость от угла.

Итак, пусть имеется трехмерная атмосфера, в которой источники энергии распределены по закону $B(\tau)$. Обозначим через $I_1(\eta, \tau_0)$ и $I_2(\eta, \tau_0)$ интенсивности излучения, выходящего из среды соответственно через границы $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$. Подход, применяемый в работе, позволяет свести вопрос о нахождении $I_1(\eta, \tau_0)$ к решению следующего уравнения

$$\frac{dI_1}{d\tau_0} = -\frac{1}{\eta} I_1(\eta, \tau_0) + \varphi(\eta, \tau_0) \left[B(\tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2} \int_0^1 I_1(\eta', \tau_0) d\eta' \right] \quad (30)$$

с начальным условием $I_1(\eta, 0) = 0$. Поскольку функцию $\varphi(\eta, \tau_0)$ можно считать известной, то при заданном $B(\tau)$ искомая интенсивность легко вычисляется одним из известных методов. После определения $I_1(\eta, \tau_0)$ интенсивность излучения, выходящего из границы $\tau = 0$, находится из

$$\frac{dI_2}{d\tau_0} = B(\tau_0)\psi(\eta, \tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2} \int_0^1 q(\eta, \eta', \tau_0) I_1(\eta', \tau_0) d\eta', \quad (31)$$

причем $I_2(\eta, 0) = 0$ и поскольку правую часть (31) можно считать известной, то вопрос сводится к вычислению обычного интеграла.

Перейдем теперь к задаче об определении поля излучения внутри атмосферы. С этой целью введем обозначение $I^+(\eta, \tau, \tau_0)$ для интенсивности излучения на оптической глубине τ в направлении границы τ_0 с углом, определяемым η и отсчитываемым по отношению к нормали к указанной границе. Аналогичную интенсивность в направлении границы $\tau = 0$ обозначим через $I^-(\eta, \tau, \tau_0)$, причем здесь η относится к углу, отсчитываемому от нормали к границе $\tau = 0$. Обычная процедура инвариантного погружения для определения этой величины дает

$$\frac{dI^-}{d\tau_0} = B(\tau_0)\Psi(\eta, \tau, \tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2} \int_0^1 U(\eta, \eta', \tau_0) I_1(\eta', \tau_0) d\eta'. \quad (32)$$

Уравнение (32) удовлетворяет начальному условию $I^-(\eta, \tau, \tau) = 0$. Снова можно заметить, что после решения задачи без источников и определения функции $I_1(\eta, \tau_0)$, правая часть (32) оказывается известной и потому на самом деле вопрос заключается в вычислении обычного интеграла. Следует также обратить внимание на тот факт, что уравнение (30) является частным случаем уравнения (32), когда $\tau = 0$. Знание $I^-(\eta, \tau, \tau_0)$ позволяет легко найти последнюю из интересующих нас величин, а именно - $I^+(\eta, \tau, \tau_0)$, ввиду того, что они связаны простым соотношением, имеющим очевидный физический смысл.

$$I^+(\eta, \tau, \tau_0) = \int_0^1 \rho(\eta, \eta', \tau) I^-(\eta', \tau, \tau_0) d\eta' + I_1(\eta, \tau). \quad (33)$$

Таким образом, можно заключить, что решение рассмотренной в предыдущем разделе задачи о диффузном отражении и пропускании является существенным подспорьем для решения задачи о переносе излучения в атмосфере, содержащей источники энергии. По сути дела, вопрос сводится к решению нового уравнения (30). Напомним в заключение, что использованный нами подход дает решение задачи для семейства атмосфер с разными оптическими толщинами.

5. *Заключительные замечания.* В данной работе мы показали, каким образом могут быть преодолены трудности, связанные с расчетом поля излучения в неоднородных атмосферах с плоскопараллельной геометрией. Предполагалось, что неоднородность среды обусловлена зависимостью коэффициента рассеяния от оптической глубины. Однако нетрудно понять, что данный подход может быть применен в задачах при более общей постановке, когда принимается в расчет зависимость от глубины любых других параметров, определяющих элементарный процесс рассеяния и поглощения (профиль коэффициента поглощения, индикатриса рассеяния или закон перераспределения излучения по частотам, параметры, выражающие роль поглощения в непрерывном спектре, поляризацию излучения и т.д.). В классической теории переноса излучения чаще всего учитывается изменение

с глубиной мощности первичных источников энергии, обусловленное изменением в среде значений характерных термодинамических величин. Вместе с тем те или иные из перечисленных выше параметров, в числе которых и вероятность переизлучения кванта при элементарном акте рассеяния, считаются обычно постоянными, в противоречии с реальной физической картиной. Так, например, наличие градиентов температуры и плотности в звездных атмосферах диктует необходимость учитывать весьма сложный характер изменения с глубиной некоторых из указанных величин [5].

Достоинство подхода, при котором предварительно определяются глобальные оптические характеристики поглощающей и рассеивающей атмосферы, проявляются особенно наглядно при рассмотрении скалярной задачи переноса излучения в одномерной среде. Как было показано в первой части работы, такая задача сводится к решению лишь одного легко разрешаемого обыкновенного дифференциального уравнения с начальными условиями для коэффициента отражения, после чего все остальные, представляющие интерес величины находятся явным образом. В более общем векторно-матричном случае или в трехмерной задаче вопрос сводится к решению уже двух интегродифференциальных уравнений, ((1),(7) и (16),(22)), соответственно для функции отражения и функции u с начальными условиями. Что касается остальных величин, то они определяются вычислением обычных интегралов.

Описанный в данной работе подход основывается на очевидных физических соображениях и потому нагляден и прост в применении. Этим он выгодно отличается, например, от подхода, основанного на физически немотивированном преобразовании Риккати, развитого в [6] (см. также [7]). В скалярном случае основное уравнение для коэффициента отражения обладает легко проверяемым свойством численной устойчивости. Сложнее обстоит дело в векторно-матричном случае, в особенности, когда рассматриваются трехмерные задачи [8]).

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна.
Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

SOLUTION OF LINEAR RADIATION TRANSFER PROBLEMS IN PLANE-PARALLEL ATMOSPHERE. II

A.G.NIKOGHOSSIAN

The paper describes an alternative possibility of reducing the linear problems of the radiation transfer in plane-parallel atmospheres to solving the initial-

value problems. It is shown that solution of two this type of differential equations is sufficient to find the internal and external fields of radiation. To this end, the method of invariance imbedding is applied. Both the one- and three-dimensional problems of diffuse reflection and transmission are considered for a family of media with different optical thicknesses. The approach is used also in solving the problem of radiation transfer in three-dimensional inhomogeneous atomspheres which contain the energy sources. The results of numerical calculations are presented.

Key words: radiation transfer:three-dimensional medium:initial-value differential equations

ЛИТЕРАТУРА

1. *А.Г.Никогосян*, *Астрофизика*, **54**, 617, 2011 (H1).
2. *A.G.Nikoghossian*, *Astron. Astrophys.*, **422**, 1059, 2004.
3. *С.Чандрасекар*, *Перенос лучистой энергии*, М., ИЛ, 1953.
4. *В.В.Соболев*, *Перенос излучения в атмосферах звезд и планет*, М., Гостехиздат, 1956.
5. *R.G.Athay*, *Radiation Transport in Spectral Lines*, D. Reidel, Dordrecht, 1972.
6. *G.B.Rybicki, P.D.Usher*, *Astrophys. J.*, **146**, 371, 1966.
7. *D.Mihalas*, *Stellar Atmospheres*, Freeman, San-Francisco, 1978.
8. *R.Bellman*, *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill Book Comp. NY, 1953.