АСТРОФИЗИКА

ТОМ 54 НОЯБРЬ, 2011 ВЫПУСК 4

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ. I

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 22 июня 2011

В работе, состоящей из двух частей, предлагается новый метод для определения различных величин, описывающих поле излучения в неоднородной плоскопараллельной атмосфере. Суть метода заключается в сведении граничных задач, возникающих при обычной постановке некоторых астрофизических задач, связанных с решением уравнений переноса излучения, к задачам с начальными условиями. По сравнению с прежними попытками в данном направлении, предлагаемый метод отличается своей универсальностью и простотой. Первая часть работы посвящена одномерной среде. Рассмотрены как скалярные задачи, так и векторно-матричный случай, соответствующий задаче о диффузии излучения в спектральной линии с перераспределением по частотам.

Ключевые слова: *перенос излучения:одномерная среда: дифференциальные уравнения с начальными условиями*

1. *Введение*. Уже в первых работах по созданию теории звездных атмосфер была установлена необходимость учета эффектов многократного рассеяния излучения в частотах спектральных линий. Это усложняет соответствующую теорию ввиду того, что состояние того или иного объема излучающей атмосферы в этом случае определяется не только его локальными термодинамическими свойствами, но и полем излучения во всей атмосфере. Математически оно приводит к решению интегральных и интегродифференциальных уравнений, с заданными, как правило, условиями на границах среды. Сложность таких задач заставляла разработать соответствующие аналитические методы с целью облегчить в той или иной степени получение численного решения. В каждом отдельном случае в зависимости от исходных предположений относительно свойств среды, элементарного акта рассеяния и т.д. развивались свои специфические методы. К числу одного из первых методов такого рода можно отнести принцип инвариантности Амбарцумяна [1,2], который в случае однородной атмосферы позволил обойти вышеуказанную трудность и определить интенсивность выходящего излучения без предварительного знания поля излучения во всей атмосфере.

Вместе с тем, возникало естественное стремление найти альтернативную постановку классических задач теории переноса с тем, чтобы свести их к задачам с начальными условиями (так называемые задачи Коши). С появлением быстродействующих электронных машин исследования в данном направлении приобрели особую важность в связи с тем, что решение такого типа задач лучше приспособлено к возможностям машин. Из первых работ в данной области упомянем здесь работы Беллмана [3] и Соболева [4-6], в которых был развит метод, основанный на широком использовании "поверхностной" резольвентной функции $\Phi(\tau)$. Идея этого подхода восходит к работе [7].

Важную роль в развитии теории переноса сыграла работа Амбарцумяна [8] (см. также [2]), в которой был установлен закон сложения для коэффициентов отражения и пропускания рассеивающих и поглощающих однородных сред. В том частном случае, когда оптическая толщина одного из слоев стремится к нулю, он позволяет выявить зависимость глобальных оптических свойств атмосферы от ее толщины. Тем самым каждую отдельно взятую задачу можно рассмотреть как представителя семейства задач для сред с различными оптическими толщинами. Такой подход, получивший название "инвариантного погружения", позволяет по-новому ставить известные задачи с тем, чтобы свести их к задачам с начальными условиями. Из обширной литературы в данном направлении мы отметим здесь работы [9,10], а также монографии [11,12].

Важно отметить, что возможность сведения однородных задач переноса излучения к задачам с начальными условиями в упомянутых выше работах [3-6], [9-12], так или иначе предполагает знание некоторых "поверхностных" характеристик атмосферы, таких как, например, φ - функция Амбарцумяна. Сказанное в равной мере относится и к методу факторизации Λ - оператора, предложенному в [13,14]. Трудности продолжали возникать при определении поля излучения внутри атмосферы, что заставляло разработать методы, относящиеся к конкретному роду задач (одномерная, трехмерная приближения, конечная, полубесконечная однородная, неоднородная среды) при тех или иных предположениях о специфике процесса диффузии (изотропное, анизотропное, монохроматическое, полностью или частично некогерентное рассеяние, поляризованное излучение и т.д.). В каждом из этих направлений имеется огромная литература, из которой ограничимся упоминанием лишь некоторых работ, посвященных переносу излучения в неоднородной атмосфере [15-17].

В данной работе предлагается метод, который включает в себя простую, но в то же время *универсальную*, вычислительную схему, позволяющую определить поле излучения и разные характеристики процесса рассеяния как решения соответствующих задач с начальными условиями. Идея, лежащая в основе метода, развивалась автором в работах [18-22], посвященных задачам теории переноса в неоднородных средах, и заключается в том, что для решения той или иной линейной задачи переноса излучения предварительно определяются глобальные оптические характеристики атмосферы, - коэффициенты отражения и пропускания, а также некоторые другие связанные с ними величины для семейства атмосфер с различными оптическими толщинами. Это позволяет определить поле излучения внутри среды без решения каких-либо новых уравнений. В некоторых случаях процесс вычислений возможно свести к обычному матричному умножению. Независимо от исходных предположений вычисления легко осуществимы на современных ЭВМ и, что особенно важно, обладают свойством численной устойчивости.

Для иллюстрации основной идеи работы в разделе 2 рассматривается простейший скалярный случай, касающийся переноса монохроматического излучения в одномерной неоднородной атмосфере. Показывается, каким образом могут быть определены поле излучения внутри среды и некоторые дручие часто встречающиеся в приложениях величины, описываюшие процесс диффузии. Следующий раздел посвящен переносу излучения с перераспределением по частотам, поддающемуся векторно-матричному описанию. Результаты, полученные в предыдущем разделе, естественным образом обобщаются на этот более сложный случай. Преимущества метода и некоторые связанные с этим вопросы обсуждаются в заключительном разделе.

2. *Одномерная неоднородная среда. Скалярный случай.* Рассмотрим сначала простейшую задачу о диффузном отражении и пропускании для одномерной неоднородной атмосферы. Пусть на такую среду, обладающую оптической толщиной τ_0, со стороны ее границы τ_0 падает квант, который, подвергаясь, в общем случае, многократному рассеянию, либо поглощается, термализуясь в ней, либо выходит из нее через одну из ее границ (рис.1). Под неоднородной атмосферой будем понимать такую атмосферу, в которой с глубиной меняется вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния λ, которую, для краткости, будем называть коэффициентом рассеяния. Вначале займемся определением вероятностей отражения и пропускания (всюду в работе, если не оговаривается, будем пользоваться вероятностной терминологией). Как было нами показано в [18,19], неоднородная атмосфера обладает свойством полярности так, что ее оптические свойства описываются двумя коэффициентами отражения и одним коэффициентом пропускания, которым

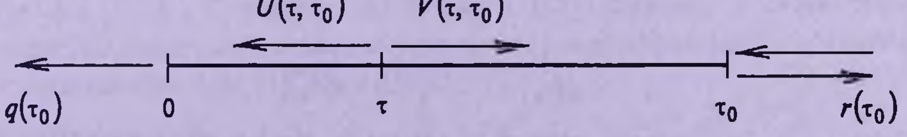

Рис.1. Схематическое изображение переноса излучения в одномерной атмосфере.

мы будем приписывать соответствующий вероятностный смысл. Для коэффициентов отражения от границ τ_0 и 0 введем соответственно обозначения $r(\tau_0)$ и $\bar{r}(\tau_0)$, а для коэффициента прохождения - $q(\tau_0)$.

Законы сложения для коэффициентов отражения и пропускания в случае однородных сред были получены Амбарцумяном в [8]. В работах [18,19] эти законы нами были обобщены на случай неоднородных сред. В них было показано, что если среда освещается со стороны границы τ_0, то обычная процедура, связанная с переходом к пределу, когда толщина одной из сред стремится к нулю, приводит к следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{dr}{d\tau_0} = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} - [2-\lambda(\tau_0)]r(\tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}r^2(\tau_0), \quad (1)$$

$$\frac{dq}{d\tau_0} = -\left[1 - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}(1 + r(\tau_0))\right]q(\tau_0) \quad (2)$$

с начальными условиями $r(0)=0$, $q(0)=1$. Важной особенностью приведенных уравнений является отсутствие в них величины $\bar{r}(\tau_0)$. Следует обратить внимание и на тот факт, что функция отражения $r(\tau_0)$ удовлетворяет отдельному уравнению. Это уравнение типа Риккати и решается одним из стандартных способов. Отметим, что уже в простейшем случае численного решения уравнения (1) методом Эйлера достигается достаточно высокая точность. При этом важно, что указанный алгоритм здесь обладает свойством численной устойчивости. Действительно, для производной правой части (1) имеет место

$$\lambda(\tau_0)[1 + r(\tau_0)] - 2 \le 0, \quad (3)$$

откуда можно заключить, что частичное нарушение устойчивости возможно лишь в случае, когда $\lambda(\tau_0)$ асимптотически стремится к единице, вследствие чего и $r(\tau_0) \to 1$. Более высокой точности можно достичь применением метода Рунге-Кутта четвертого порядка в различных модификациях (например, Гиля (Gill)) [12]. Очевидно, что по ходу решения данной задачи с начальными условиями для какого-либо фиксированного значения τ_0 мы определяем отражательные и пропускательные способности семейства атмосфер с промежуточными значениями оптических толщин.

После определения $r(\tau_0)$ коэффициент пропускания $q(\tau_0)$ находится явным образом по формуле

$$q(\tau_0) = \exp\left[-\int_0^{\tau_0} \varpi(\tau)d\tau\right], \quad (4)$$

где

$$\varpi(\tau_0) = 1 - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}[1 + r(\tau_0)]. \quad (5)$$

При $\tau_0 \to \infty$, как это следует из (1) и (2), $r(\tau_0)$ и $q(\tau_0)$ асимптотически приближаются, соответственно, к $\left(2 - \lambda_\infty - 2\sqrt{1-\lambda_\infty}\right)/\lambda_\infty$ и нулю, где λ_∞ -

предельное значение коэффициента рассеяния.

2.1. *Функции* $P(\tau_0)$ *и* $S(\tau_0)$. Из (2) легко получить уравнение для функции $P(\tau_0)=q^{-1}(\tau_0)$ (см. [18,19])

$$\frac{dP}{d\tau_0}=\left[1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right]P(\tau_0)-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}S(\tau_0), \tag{6}$$

где введено обозначение $S(\tau_0)=r(\tau_0)/q(\tau_0)=r(\tau_0)P(\tau_0)$. Для этой функции из уравнения (1) имеем

$$\frac{dS}{d\tau_0}=\frac{\lambda(\tau_0)}{2}P(\tau_0)-\left[1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right]S(\tau_0). \tag{7}$$

Систему линейных уравнений (6)-(7) с начальными условиями $P(0)=1$, $S(0)=0$ можно записать в векторно-матричных обозначениях как

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\tau_0}=\mathbf{A}(\tau_0)\mathbf{Y}(\tau_0), \tag{8}$$

где введены обозначения

$$\mathbf{Y}(\tau_0)=\begin{pmatrix}P(\tau_0)\\ S(\tau_0)\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}(\tau_0)=\begin{pmatrix}a(\tau_0) & -b(\tau_0)\\ b(\tau_0) & -a(\tau_0)\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$a(\tau_0)=1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2},\quad b(\tau_0)=\frac{\lambda(\tau_0)}{2}. \tag{10}$$

Матрица $\mathbf{A}$ обладает специфическим свойством, заключающимся в том, что

$$\mathbf{A}^2(\tau_0)=(1-\lambda(\tau_0))\mathbf{I}, \tag{11}$$

где $\mathbf{I}$ - единичная матрица. Отсюда

$$\mathbf{A}^{-1}(\tau_0)=[1-\lambda(\tau_0)]^{-1}\mathbf{A}(\tau_0). \tag{12}$$

Другим свойством матрицы $\mathbf{A}$ является отличие от нуля связанного с нею коммутатора

$$\mathbf{A}(\tau_1)\mathbf{A}(\tau_2)-\mathbf{A}(\tau_2)\mathbf{A}(\tau_1)=[\lambda(\tau_1)-\lambda(\tau_2)]\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Это означает, что если искать решение уравнения (8) в виде матричной экспоненты, то соответствующий ряд Магнуса [23] окажется бесконечным. Проще обстоит дело в случае однородной атмосферы, для которой имеем

$$\mathbf{Y}(\tau_0)=\exp(\mathbf{A}\tau_0)\mathbf{Y}(0). \tag{14}$$

откуда ввиду (10)

$$\mathbf{Y}(\tau_0)=[\mathbf{I}\,\mathrm{ch}(k\tau_0)+\mathbf{A}\,\mathrm{sh}(k\tau_0)]\mathbf{Y}(0), \tag{15}$$

где $k=\sqrt{1-\lambda}$. С учетом (10) формула (15) приводит к результатам, согласующимся с известными выражениями для коэффициентов отражения и пропускания (см. [18,24])

$$P(\tau_0)=\mathrm{ch}(k\tau_0)+\frac{1+k^2}{2k}\mathrm{sh}(k\tau_0), \tag{16}$$

$$S(\tau_0) = \frac{1-k^2}{2k}\operatorname{sh}(k\tau_0). \tag{17}$$

В заключение данного раздела напомним, что функции $P(\tau_0)$ и $S(\tau_0)$, как было показано в [18] удовлетворяют отдельным линейным уравнениям

$$\frac{d^2P}{d\tau_0^2} - \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{dP}{d\tau} - \left(1 - \lambda - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)P(\tau_0) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{d^2S}{d\tau_0^2} - \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{dS}{d\tau} - \left(1 - \lambda + \frac{\lambda'}{\lambda}\right)S(\tau_0) = 0, \tag{19}$$

соответственно при начальных условиях $P(0) = 1$, $P'(0) = 1 - \lambda(0)/2$, $S(0) = 0$, $S'(0) = \lambda(0)/2$. Там же приводятся примеры явных решений этих уравнений, выражающихся через элементарные функции (см. также [22]).

2.2. *Уравнения переноса излучения.* Критика, иногда высказываемая относительно применимости методов сложения слоев и инвариантного погружения, касается того, что дескать последние не эффективны при определении режима излучения внутри среды. (см. также [12]). В этом и следующем разделах мы покажем, что на самом деле применение указанных методов позволяет легко определить не только указанный режим, но и ряд других величин, описывающих процесс многократного рассеяния внутри среды.

Уравнения переноса запишем в терминах величин $U(\tau, \tau_0)$ и $V(\tau, \tau_0)$, представляющих собой вероятности пролета квантов на оптичекой глубине τ соответственно в направлениях убывающих и возрастающих значений оптической глубины (см. рис.1).

$$\frac{dU}{d\tau} = \left[1 - \frac{\lambda(\tau)}{2}\right]U(\tau, \tau_0) - \frac{\lambda(\tau)}{2}V(\tau, \tau_0), \tag{20}$$

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\lambda(\tau)}{2}U(\tau, \tau_0) - \left[1 - \frac{\lambda(\tau)}{2}\right]V(\tau, \tau_0), \tag{21}$$

Данные уравнения удовлетворяют граничным условиям $U(\tau_0, \tau_0) = 1$, $V(0, \tau_0) = 0$. Именно к такого рода граничным задачам обычно сводятся решение уравнений переноса в классических астрофизических задачах. Сравнивая систему уравнений (20), (21) с системой (6), (7), легко заключить, что величины U и V как функции от оптической глубины удовлетворяют таким же уравнениям, как функции P и S - от оптической толщины. Однако в первом случае приходится иметь дело с задачей с граничными условиями в то время, как во втором случае имеем задачу с начальными условиями. Если ввести в рассмотрение вектор с компонентами U и V, то систему уравнений (20), (21) также можно записать в векторно-матричной форме (8).

На основе несложных физических рассуждений нетрудно заключить, что

$$q(\tau_0)=q(\tau)U(\tau,\tau_0),\quad V(\tau,\tau_0)=r(\tau)U(\tau,\tau_0). \tag{22}$$

Указанные соотношения математически вытекают из сравнения условий на границе 0, $U(0,\tau_0)=q(\tau_0)$, $V(0,\tau_0)=0$, с теми же условиями для функций P и S. Строго говоря, эти соотношения не нуждаются в доказательстве, поскольку на их основе выводятся законы сложения для коэффициентов отражения и пропускания [8].

С учетом (4) получаем

$$U(\tau,\tau_0)=\exp\left[-\int_\tau^{\tau_0}\varpi(\tau')\,d\tau'\right], \tag{23}$$

и для V

$$V(\tau,\tau_0)=r(\tau)\exp\left[-\int_\tau^{\tau_0}\varpi(\tau')\,d\tau'\right]. \tag{24}$$

Таким образом, для определения режима излучения внутри среды достаточно предварительно определить отражательные способности семейства атмосфер путем решения уравнения (1). Следдует обратить внимание на тот факт, что, как это видно из приведенных здесь формул, переменные τ и τ_0 в выражениях для U и V разделяются:

$$U(\tau,\tau_0)=q(\tau_0)P(\tau),\quad V(\tau,\tau_0)=q(\tau_0)S(\tau). \tag{25}$$

Очевидно, что величины U и V как функции от τ удовлетворяют отдельным линейным уравнениям, аналогичным (18) и (19), однако с условиями, заданными на границах среды. В случае однородной атмосферы с учетом (16) и (17) имеем

$$U(\tau,\tau_0)=\frac{2k\,\mathrm{ch}(k\tau)+(1+k^2)\mathrm{sh}(k\tau)}{2k\,\mathrm{ch}(k\tau_0)+(1+k^2)\,\mathrm{sh}(k\tau_0)}, \tag{26}$$

$$V(\tau,\tau_0)=\frac{(1-k^2)\mathrm{sh}(k\tau)}{2k\,\mathrm{ch}(k\tau_0)+(1+k^2)\,\mathrm{sh}(k\tau_0)}. \tag{27}$$

Заметим также, что величина $T=U+V$, как функция от τ, удовлетворяет уравнению

$$T''(\tau,\tau_0)-[1-\lambda(\tau)]T(\tau,\tau_0)=0, \tag{28}$$

при начальных условиях $T(0,\tau_0)=q(\tau_0)$, $T'(0,\tau_0)=1$. Очевидно, что функция T также обладает вероятностным смыслом: с учетом принципа обратимости оптических явлений она представляет собой вероятность того, что квант, пролетающий на глубине τ, в каком-либо направлении, покинет среду через границу τ_0. Уравнению, аналогичному (28), удовлетворяет величина $\tilde{T}=P+S$ как функция от τ_0, однако при начальных условиях $\tilde{T}(0)=\tilde{T}'(0)=1$

$$\tilde{T}''(\tau_0)-[1-\lambda(\tau_0)]\tilde{T}(\tau_0)=0. \tag{29}$$

Уравнения (28) и (29) благодаря своей простоте могут оказаться полезными при поиске аналитических выражений соответствующих искомых функций.

2.3. *Определение некоторых других величин*. Знание величин r и q позволяют явным образом найти решения целого ряда задач, часто встречаемых в астрофизических приложениях. Остановимся на некоторых из них.

а. Допустим, что неоднородная атмосфера содержит источники энергии мощности $B(\tau)$ и требуется определить как интенсивности выходящего из среды излучения, так и режим излучения внутри нее. Если через $I_1(\tau_0)$ и $I_2(\tau_0)$ обозначить интенсивности излучения, выходящего из такой среды соответственно через границы τ_0 и 0, то на основе простых рассуждений можно написать

$$I_1(\tau_0)=\frac{1}{2}q(\tau_0)\int_0^{\tau_0}[1+r(\tau)]B(\tau)d\tau/q(\tau), \tag{30}$$

$$I_2(\tau_0)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}[\lambda(\tau)I_1(\tau)+B(\tau)]q(\tau)d\tau. \tag{31}$$

Знание последних оказывается достаточным для определения интенсивностей излучения $I^+(\tau,\tau_0)$, $I^-(\tau,\tau_0)$, направленных соответственно в сторону убывающих и возрастающих глубин:

$$I^+(\tau,\tau_0)=[I_2(\tau_0)-I_2(\tau)]/q(\tau), \tag{32}$$

$$I^-(\tau,\tau_0)=r(\tau)I^+(\tau,\tau_0)+I_1(\tau). \tag{33}$$

б. Как известно, важной характеристикой процесса диффузии излучения в поглощающей и рассеивающей атмосфере является среднее число рассеяний, которым подвергается квант прежде, чем покинет среду. Обозначим через $N_r(\tau_0)$ среднее число рассеяний кванта, отраженного от среды в результате диффузии в ней. Аналогичную величину для кванта, пропущенного средой обозначим через $N_q(\tau_0)$. В работе [18] было показано, что указанные величины полностью выражаются через определенные выше коэффициенты отражения и пропускания семейства атмосфер:

$$N_r(\tau_0)=\frac{1}{2}\frac{q^2(\tau_0)}{r(\tau_0)}\int_0^{\tau_0}\lambda(\tau)\left[1+r^2(\tau)\right]\frac{d\tau}{q^2(\tau)}, \tag{34}$$

$$N_q(\tau_0)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\lambda(\tau)\{1+r(\tau)[1+N_r(\tau)]\}d\tau. \tag{35}$$

в. Для полноты приведем здесь также формулу для коэффициента отражения рассматриваемой среды, если последняя освещается со стороны границы 0 на рис.1. Как было показано нами в [18,19],

$$\bar{r}(\tau_0)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\lambda(\tau)q^2(\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\lambda(\tau)\exp\left(-2\int_0^{\tau}\varpi(\tau')d\tau'\right)d\tau. \tag{36}$$

Можно указать на простой способ определения $\bar{r}(\tau_0)$, основанный на решении уравнения (29), в котором $\lambda(\tau_0)$ заменен на $\lambda(\tau_0-\tau)$. При решении τ рассматривается как параметр, который в полученном решении заменяется τ_0. В результате находим величину $P(\tau_0)+\bar{S}(\tau_0)=P(\tau_0)[1+\bar{r}(\tau_0)]$, а вместе с нею и $\bar{r}(\tau_0)$, если учесть свойство полярности неоднородной атмосферы [18,19]. Устремляя τ_0 к бесконечности, находим коэффициент отражения от полубесконечной неоднородной атмосферы. Некоторые полученные таким путем аналитические результаты приводятся в [22].

В заключение данного раздела отметим основной его вывод, заключающийся в том, что для решения скалярных задач теории переноса в одномерной атмосфере достаточно знание ее отражательной способности, поскольку все остальные представляющие интерес величины находятся явным образом.

3. *Одномерная неоднородная среда. Матричный случай.* Перейдем к рассмотрению задачи переноса излучения при более общей ее постановке, когда принимается в расчет некогерентность процесса рассеяния. Обозначим через $\gamma(x,x')$ осредненную по направлениям функцию перераспределения излучения по частотам и через $\alpha(x)$ - профиль коэффициента поглощения, где x, как обычно, представляет собой безразмерную частоту, определяемую смещением от центра линии в доплеровских ширинах. Как и в предыдущем разделе, под неоднородностью атмосферы будет подразумеваться, что от оптической глубины зависит коэффициент рассеяния. Однако необходимо учесть, что нижеприводимые рассуждения с небольшими видоизменениями можно отнести и к задачам при более общей постановке, когда принимается в расчет зависимость от глубины других характеристик элементарного акта рассеяния, таких как $\alpha(x)$ и $\gamma(x,x')$.

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим сначала задачу о нахождении функций отражения и прохождения для атмосферы оптической толщины τ_0. Пусть на ее границу τ_0 падает квант частоты x (рис.1). Вероятности того, что в результате многократного рассеяния от нее отразится или выйдет из нее квант частоты x' обозначим соответственно через $r(x,x',\tau_0)$ и $q(x,x',\tau_0)$.

Обычная процедура инвариантного погружения приводит к следующим уравнениям (см. также [4])

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau_0} &= -[\alpha(x)+\alpha(x')]r(x',x,\tau_0)+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\gamma(x,x')+\\ &+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}r(x',x'',\tau_0)\gamma(x'',x)dx''+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(x',x'')r(x'',x,\tau_0)dx''+\\ &+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}r(x',x'',\tau_0)dx''\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(x'',x''')r(x''',x,\tau_0)dx''',\end{aligned}\tag{37}$$

$$\frac{dq}{d\tau_0} = -\alpha(x)q(x', x, \tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q(x', x'', \tau_0)\gamma(x'', x)dx'' +$$
$$+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q(x', x'', \tau_0)dx'' \int_{-\infty}^{\infty}\gamma(x'', x''')r(x''', x, \tau_0)dx''' \tag{38}$$

с начальными условиями $r(x', x, 0) = 0$, $q(x', x, 0) = \delta(x - x')$, где δ есть δ-функция Дирака.

В векторно-матричной форме записи они имеют вид

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\tau_0} = -[\mathbf{R}(\tau_0)\alpha + \alpha\mathbf{R}(\tau_0)] + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\{\Gamma + [\mathbf{R}(\tau_0)\Gamma + \Gamma\mathbf{R}(\tau_0)] + \mathbf{R}(\tau_0)\Gamma\mathbf{R}(\tau_0)\}, \tag{39}$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\tau_0} = -\mathbf{Q}(\tau_0)\left[\alpha - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}(\Gamma + \Gamma\mathbf{R}(\tau_0))\right], \tag{40}$$

где дискретный аналог функции перераспределения $\gamma(x, x')$ представлен матрицей Γ, а α является диагональной матрицей с элементами $\alpha_i = \alpha(x_i)$. Начальные условия записываются в виде $\mathbf{R}(0) = 0$, $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$.

Уравнение (40) может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\tau_0} = -\mathbf{Q}(\tau_0)[\mathbf{M}(\tau_0) - \mathbf{N}(\tau_0)\mathbf{R}(\tau_0)], \tag{41}$$

где введены следующие обозначения

$$\mathbf{M}(\tau_0) = \alpha - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Gamma, \quad \mathbf{N}(\tau_0) = \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Gamma. \tag{42}$$

Мы видим, что, как и в рассмотренном выше скалярном случае, знание функции отражения достаточно для определения коэффициента пропускания.

Если ввести теперь в рассмотрение обратную матрицу $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$, то с учетом того, что $\mathbf{P}' = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^{-1}$, из уравнения (41) получаем

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau_0} = [\mathbf{M}(\tau_0) - \mathbf{N}(\tau_0)\mathbf{R}(\tau_0)]\mathbf{P}(\tau_0) \tag{43}$$

или

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau_0} = \mathbf{M}(\tau_0)\mathbf{P}(\tau_0) - \mathbf{N}(\tau_0)\mathbf{S}(\tau_0), \tag{44}$$

где $\mathbf{S}(\tau_0) = \mathbf{R}(\tau_0)\mathbf{P}(\tau_0)$, и в качестве начального условия имеем $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$.

После ряда несложных выкладок из уравнения (39) находим

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau_0} = \mathbf{N}(\tau_0)\mathbf{P}(\tau_0) - \mathbf{M}(\tau_0)\mathbf{S}(\tau_0), \tag{45}$$

причем $\mathbf{S}(0) = 0$. Уравнения (43) и (45) образуют систему линейных уравнений, являющуюся обобщением рассмотренной выше для скалярного случая системы уравнений (6), (7). Если воспользоваться понятием "суперматрицы" (см., например, [25]), то данную систему можно записать в виде

$$\frac{d\tilde{\mathbf{Y}}}{d\tau_0} = \tilde{\mathbf{A}}(\tau_0)\tilde{\mathbf{Y}}(\tau_0), \tag{46}$$

где супервекторы и суперматрицы снабжены сверху тильдой и введены обозначения

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\tau_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(\tau_0) \\ \mathbf{S}(\tau_0) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}(\tau_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\tau_0) & -\mathbf{N}(\tau_0) \\ \mathbf{N}(\tau_0) & -\mathbf{M}(\tau_0) \end{pmatrix}. \tag{47}$$

В качестве начального условия имеем $\tilde{\mathbf{Y}}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{pmatrix}$. По аналогии с скалярным случаем, суперматрица $\tilde{\mathbf{A}}$ обладает специфическим свойством,

$$\tilde{\mathbf{A}}^2(\tau_0) = \left(\mathbf{M}^2(\tau_0) - \mathbf{N}^2(\tau_0)\right)\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{K}^2(\tau_0)\tilde{\mathbf{I}}, \tag{48}$$

где $\mathbf{K}^2(\tau_0) = \alpha^2 - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}(\alpha\Gamma + \Gamma\alpha)$.

Для иллюстрации более подробно остановимся на случае однородной атмосферы. Тогда решение уравнения (46) записывается в виде матричной экспоненты

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\tau_0) = \exp\left(\tilde{\mathbf{A}}\tau_0\right)\tilde{\mathbf{Y}}(0), \tag{49}$$

разложение которой в ряд по степеням оптической толщины с учетом (48) дает

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\tau_0) = \left[\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{K}^2}{2!}\tau_0^2 + \frac{\mathbf{K}^4}{4!}\tau_0^4 + \ldots\right)\tilde{\mathbf{I}} + \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{K}^2}{3!}\tau_0^2 + \frac{\mathbf{K}^4}{5!}\tau_0^4 + \ldots\right)\tilde{\mathbf{A}}\tau_0\right]\tilde{\mathbf{Y}}(0), \tag{50}$$

или

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\tau_0) = \left[\tilde{\mathbf{I}}\operatorname{ch}(\mathbf{K}\tau_0) + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{K}^{-1}\operatorname{sh}(\mathbf{K}\tau_0)\right]\tilde{\mathbf{Y}}(0). \tag{51}$$

Отсюда для искомых величин $\mathbf{P}(\tau_0)$ и $\mathbf{S}(\tau_0)$ получаем

$$\mathbf{P}(\tau_0) = \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{K}^2}{2!}\tau_0^2 + \frac{\mathbf{K}^4}{4!}\tau_0^4 + \ldots\right) + \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{K}^2}{3!}\tau_0^2 + \frac{\mathbf{K}^4}{5!}\tau_0^4 + \ldots\right)\mathbf{M}\tau_0, \tag{52}$$

$$\mathbf{S}(\tau_0) = \frac{\lambda}{2}\tau_0\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{K}^2}{3!}\tau_0^2 + \frac{\mathbf{K}^4}{5!}\tau_0^4 + \ldots\right)\Gamma, \tag{53}$$

или в компактной форме

$$\mathbf{P}(\tau_0) = \operatorname{ch}(\mathbf{K}\tau_0) + \left(\alpha - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Gamma\right)\mathbf{K}^{-1}\operatorname{sh}(\mathbf{K}\tau_0), \quad \mathbf{S}(\tau_0) = \frac{\lambda}{2}\Gamma\mathbf{K}^{-1}\operatorname{sh}(\mathbf{K}\tau_0). \tag{54}$$

Из формул (52), (53), в частности, вытекает ряд известных результатов. Например, в простейшем случае когерентного рассеяния (т.е. при монохроматическом излучении), имеем $k(x) = \alpha(x)\sqrt{1-\lambda}$, и если вдобавок имеет место чистое рассеяние, то ряды в (50) обрываются и приходим к результатам, легко получаемым на основе классической теории

$$P(\tau_0) = 1 + \frac{\lambda}{2}\alpha(x)\tau_0, \quad S(\tau_0) = \frac{\lambda}{2}\alpha(x)\tau_0. \tag{55}$$

3.1. *Поле излучения внутри среды.* Рассмотрим задачу о нахождении поля излучения в среде, схематически изображенной на рис.1 при допущении, что на нее падает квант некоторой частоты x' (а не x, как выше при определении коэффициентов отражения и пропускания, что делается для упрощения записи), и что диффузия излучения сопровождается перераспределением по частотам. За величинами представляющими собой вероятности пролета кванта на глубине τ в том или ином направлении, будут сохранены введенные выше обозначения U и V. Однако, очевидно, что они теперь зависят не только от глубины и частоты кванта x, но и в качестве параметров от оптической толщины среды и частоты падающего на нее кванта.

При такой постановке уравнения переноса имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= \alpha(x)U(x,\tau;x',\tau_0) - \frac{\lambda(\tau)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(x'',x)\left[U(x'',\tau;x',\tau_0)+V(x'',\tau;x',\tau_0)\right]dx'', \\ \frac{dV}{d\tau} &= -\alpha(x)V(x,\tau;x',\tau_0) + \frac{\lambda(\tau)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(x'',x)\left[U(x'',\tau;x',\tau_0)+V(x'',\tau;x',\tau_0)\right]dx''. \end{aligned} \tag{56}$$

Классическая задача обычно ставится при условиях на двух границах 0 и τ_0 в виде $U(x,\tau_0;x',\tau_0)=\delta(x-x')$, $V(x,0;x',\tau_0)=0$. Мы же рассмотрим задачу, принимая в расчет условия на одной и той же границе $\tau=0$

$$U(x,0;x',\tau_0)=q(x,x',\tau_0), \quad V(x,0;x',\tau_0)=0. \tag{57}$$

В векторно-матричной форме уравнения (56) записываются как

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} &= \mathbf{M}(\tau)\mathbf{U}(\tau,\tau_0)-\mathbf{N}(\tau)\mathbf{V}(\tau,\tau_0), \\ \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} &= \mathbf{N}(\tau)\mathbf{U}(\tau,\tau_0)-\mathbf{M}(\tau)\mathbf{V}(\tau,\tau_0) \end{aligned} \tag{58}$$

с условиями $\mathbf{U}(0,\tau_0)=\mathbf{Q}(\tau_0)$, $\mathbf{V}(0,\tau_0)=0$. Сравнивая указанные условия с начальными условиями, которым удовлетворяет система уравнений (44), (45), с учетом симметричности матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$ находим

$$\mathbf{U}(\tau,\tau_0)=\mathbf{P}(\tau)\mathbf{Q}(\tau_0), \quad \mathbf{V}(\tau,\tau_0)=\mathbf{S}(\tau)\mathbf{Q}(\tau_0). \tag{59}$$

Данные соотношения являются матричным аналогом соотношений (25) и обладают простым физическим смыслом.

Таким образом для нахождения поля излучения внутри атмосферы, освещаемого извне, нет необходимости решать какие-либо новые уравнения. Решение уравнений (37), (38), (43) (либо, что то же самое, уравнений (39), (40), (43)) для величин $\mathbf{R}(\tau_0)$, $\mathbf{Q}(\tau_0)$, $\mathbf{P}(\tau_0)$ позволяет определить не только глобальные оптические характеристики семейства атмосфер с различными оптическими топщинами, но и излучательный режим внутри них. Если среда является однородной, то величину $\mathbf{P}(\tau_0)$ можно искать в виде ряда по формуле (52). Интересно заметить, что величины $\mathbf{U}(\tau,\tau_0)$ и $\mathbf{V}(\tau,\tau_0)$, описывающие внутреннее поле излучения, в принципе могут быть найдены и без знания функции $P(\tau_0)$. Действительно, нетрудно показать, что $U(\tau, \tau_0)$ удовлетворяет уравнению, аналогичному (40)

$$\frac{d\,U}{d\,\tau_0} = -U(\tau, \tau_0)\left[\alpha - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}(\Gamma + \Gamma R(\tau_0))\right]. \tag{60}$$

Оно решается при начальном условии $U(\tau, \tau) = I$. В скалярном случае его решение дается формулой (23), приводя тем самым к нужному результату. Однако в векторно-матричном случае, в зависимости от конкретной задачи предпочтительным может явиться вышеописанный путь, предполагающий знание функции $P(\tau_0)$.

4. *Заключительные замечания*. В данной части работы классические задачи переноса излучения мы рассмотрели в одномерном приближении и показали, что вопрос об определении различных величин, описывающих процесс диффузии в среде, возможно свести к решению задач с начальными условиями. В основе метода лежит идея, заключающаяся в том, что сперва определяются отражательные и пропускательные способности семейства атмосфер с различными оптическими толщинами, после чего внутренний режим излучения находится непосредственно, без решения новых уравнений. Важное значение имеет то обстоятельство, что коэффициент отражения удовлетворяет отдельному уравнению (1) (или (39) в общем случае) независимо от того, является ли среда однородной или неоднородной. С вычислительной точки зрения достоинство указанных уравнений заключается в их численной устойчивости. Важным является также введение в рассмотрение функции *P*, которая в общем векторно-матричном случае позволяет избежать громоздкой процедуры многократного обращения матрицы коэффициента пропускания. В скалярном случае вопрос сводится к решению лишь одного уравнения для коэффициента отражения, а остальные представляющие интерес величины находятся явным образом.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

THE SOLUTION OF LINEAR PROBLEMS OF THE RADIATION TRANSFER IN A PLANE-PARALLEL ATMOSPHERE. I

A.G.NIKOGHOSSIAN

The paper composed of two parts proposes a new method to determine different quantities discribing the radiation field in a plane-parallel inhomogeneous atmosphere. The method aims at reducing the boundary-value problems, arising in the classical statement of some astrophysical problems assuming the solution of the radiative transfer equations, to the initial-value problems. Compared to the previous attempts in this direction the proposed method is universal and simple. The first part of the paper is devoted to one-dimensional medium. We consider both the scalar problems and the vector-matrix case that corresponds to the diffusion of radiation in a spectral line accompained with the frequency redistribution.

Key words: *radiative transfer:one-dimensional medium:initial-value differential equations*

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 38, 257, 1943.
2. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
3. *R.Bellman*, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 435, 1957.
4. *В.В.Соболев*, ДАН СССР, 116, 45, 1957.
5. *В.В.Соболев*, Изв. АН АрмССР, 11, 39, 1958.
6. *В.В.Соболев*, Астрон. ж., 31, 572, 1959.
7. *М.Г.Крейн*, ДАН СССР, 100, 413, 1955.
8. *В.А.Амбарцумян*, Изв. АН АрмССР, 1-2, 1944.
9. *R.Bellman*, *R.Kalaba*, *M.Wing*, J. Math. Phys., 1, 280, 1960.
10. *R.Bellman*, *R.Kalaba*, *M.Prestrud*, Amer. Elsevier, New York, 1963.
11. *Дж.Касти*, *Р.Калаба*, Методы погружения в прикладной математике, М., Мир, 1976.
12. *M.Scott*, Invariant Imbedding and its Applications to Ordinary Differential Equations. An Introduction, Addison-Wiley, Mass.,1973.
13. *Н.Б.Енгибарян*, ДАН СССР, 203, 4, 1972.
14. *N.B.Yengibarian*, *A.G.Nikoghossian*, J. Quantit. Spectrosc. Rad. Transfer, 13, 787, 1973.
15. *В.В.Соболев*, ДАН СССР, 111, 1000, 1956.
16. *В.В.Соболев*, Астрон. ж., 51, 50, 1974.
17. *E.G.Yanovitskij*, Light Scattering in Inhomogeneous Atmospheres, Springer, 1997.
18. *A.G.Nikoghossian*, Astron. Astrophys., 422, 1059, 2004.
19. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 47, 123, 2004.
20. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 47, 289, 2004.
21. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 47, 481, 2004.
22. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, 54, 149, 2011.
23. *W.Magnus*, Comm. Pure and Appl. Math. VII (4), 649, 1954.
24. *В.В.Соболев*, Перенос излучения в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
25. *Е.Вигнер*, Теория групп, М., Изд. ИЛ, 1961.