АСТРОФИЗИКА

ТОМ 54 НОЯБРЬ, 2011 ВЫПУСК 4

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ЗАМАГНИЧЕННОГО НЕСЖИМАЕМОГО БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА

Г.С.БИСНОВАТЫЙ-КОГАН[1], С.В.ПАВЛОВ[2]

Поступила 9 августа 2011

Исследованы колебания замагниченного несжимаемого цилиндра, с однородным магнитным полем вдоль его оси, и возникающие при этом электромагнитные поля. Получено существование двух типов собственных колебаний в линейном приближении, представляющих собой торсионную и альфвеновскую волну. Показано, что в случае бесконечного цилиндра при торсионных колебаниях электромагнитная волна не генерируется вовсе. При альфвеновских колебаниях вокруг цилиндра образуется электромагнитное поле, локальная плотность потока которого падает экспоненциально с радиусом удаления от оси цилиндра, и равна нулю при усреднении по времени. Дана физическая интерпретация результатов.

Ключевые слова: *цилиндрические выбросы:колебания:электромагнитное поле*

1. *Введение*. Полярное струйное течение, или джет - часто наблюдаемое явление, когда из компактного объекта вдоль его оси вращения выбрасываются потоки вещества. Наиболее масштабные полярные течения можно видеть в активных ядрах галактик. Другие объекты, в которых часто наблюдаются полярные течения, это: катаклизмические переменные звезды, рентгеновские двойные системы и звезды типа Т Тельца. Протяженность джетов может быть от парсек до сотен килопарсек, длина самого удаленного джета, истекающего из квазара GB1508+5714, с красным смещением $z=4.3$, составляет около 20 кпк [1]. Происхождение астрофизических джетов не вполне понятно, предложены различные механизмы, связанные, в основном, с наличием крупномасштабного магнитного поля в аккреционных дисках. Теория джетов должна ответить на вопрос о происхождении релятивистских частиц в выбросах из активных ядер галактик, где наблюдается синхротронное излучение. Релятивистские частицы, ускоренные центральной машиной, быстро теряют свою энергию, так что возникает вопрос об ускорении частиц внутри джета [2,3].

Ввиду того, что джеты обычно сильно коллимированы, и длина джета в десятки раз превосходит ширину, удобно представлять джет в виде простой модели бесконечно длинного кругового цилиндра [4]. Магнитное поле в джетах определяет направление распространения, а осевой ток и азимутальное магнитное поле коллимируют джет на больших расстояниях от его формирования [5]. У джетов, наблюдаемых с высоким угловым разрешением, видна структура с яркими пятнами, разделенными темными областями [6-8]. Высокая степень поляризации радио и оптического излучения, в некоторых объектах превосходящая 50%, указывает на нетепловую природу излучения. Наиболее вероятным механизмом образования фотонов является синхротронное излучение релятивистсих электронов в упорядоченных магнитных полях. Оценки времени жизни этих электронов, основанные на наблюдаемых светимостях и спектрах, дают значения много меньше кинематических времен $t_k = d/c$, где d - расстояние от места излучения до центрального источника. Возникает необходимость непрерывного ускорения электронов в джете для объяснения наблюдений. Различные механизмы ускорения электронов во внегалактических джетах рассмотрены в работах [9,10].

В данной работе рассматриваются колебания бесконечно длинного замагниченного цилиндра из несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью. Как отмечалось выше, такой цилиндр есть простая модель космического джета. Колебания в джете могут возникнуть в результате нестационарного механизма его генерации [11-13]. В линейном приближении получено решение для динамики и электромагнитного поля возникающего внутри и вне цилиндра. Рассмотрены две моды колебаний: магнито-торсионная и альфвеновская. Показано, что для магнито-торсионной моды электромагнитное поле вне цилиндра отсутствует, а для альфвеновской моды электромагнитное поле экспоненциально уменьшается с расстояния от цилиндра. Подобное поведение является результатом рассмотрения идеальной модели бесконечно длинного цилиндра, в которой происходит интерференция волн, приводящая к отсутствию потока энергии на бесконечность. В реальной модели длинного цилиндра конечной длины поток энергии и затухание колебаний будут иметь место, однако эти потери будут существенно подавлены при длине цилиндра намного превышающей его радиус и длину волны колебаний вдоль его оси. Этот результат соответствует наблюдениям джетов, которые показывают сохранение сильной коллимации на длинах, намного превышающих диаметр джета.

2. *Основные уравнения.* В цилиндрической системе координат операторы ротора и дивергенции записываются в виде [14]

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\bar{A}\Big|_r = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(A_\varphi r)\right], \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\bar{A}\Big|_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \tag{3}$$

$$\left.\operatorname{rot}\vec{A}\right|_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_\varphi r) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]. \tag{4}$$

Рассматривается бесконечный (по оси z) цилиндр с бесконечной проводимостью. Запишем уравнения магнитной гидродинамики в цилиндрической системе координат с учетом аксиальной симметрии $\partial/\partial\varphi = 0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \upsilon_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r\upsilon_r)}{\partial r} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right] = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \upsilon_r}{\partial t} + \upsilon_r \frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_r}{\partial z} - \frac{\upsilon_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\rho c}\left(j_\varphi B_z - j_z B_\varphi\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial \upsilon_\varphi}{\partial t} + \upsilon_r \frac{\partial \upsilon_\varphi}{\partial r} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_\varphi}{\partial z} + \frac{\upsilon_r \upsilon_\varphi}{r} = \frac{1}{\rho c}\left(j_z B_r - j_r B_z\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} + \upsilon_r \frac{\partial \upsilon_z}{\partial r} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho c}\left(j_r B_\varphi - j_\varphi B_r\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\upsilon_z B_r - \upsilon_r B_z\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\upsilon_\varphi B_z - \upsilon_z B_\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\upsilon_r B_\varphi - \upsilon_\varphi B_r\right), \tag{10}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\upsilon_z B_r - \upsilon_r B_z\right)\right], \tag{11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \tag{12}$$

$$j_r = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \tag{13}$$

$$j_\varphi = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right), \tag{14}$$

$$j_z = \frac{c}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi). \tag{15}$$

Здесь уравнение (5) - уравнение непрерывности, (6)-(8)- уравнения движения Эйлера с магнитными полями, (9)-(11) - уравнения вмороженности магнитного поля, (12) - уравнение бездивергентности магнитного поля, (13)-(15)- уравнения генерации поля электрическими токами. Не учитывалась вязкость и омическое сопротивление (проводимость равна бесконечности).

3. *Аксиально-симметричные колебания несжимаемого замагниченного цилиндра бесконечной длины*. Рассмотрим малые колебания цилиндра радиуса R, из несжимаемой жидкости, $\rho = \mathrm{const}$, с постоянным магнитным полем B_{z0} вдоль оси z. Линеаризуем систему уравнений (5)-(15), и рассмотрим гармонические возмущения с зависимостью от времени и z-координаты в виде $\sim \exp(ikz - i\omega t)$. В равновесном цилиндре

все скорости, а также радиальная и азимутальная компоненты магнитного поля равны нулю, поэтому имеются только их малые возмущения υ_r, υ_φ, υ_z, B_r, B_φ. Магнитное поле по оси и давление берутся в виде $B_{z0}+B_z$ и P_0+P. Тогда из уравнений (5)-(15) имеем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\upsilon_r)}{\partial r}+ik\upsilon_z=0\,, \tag{16}$$

$$-i\omega\upsilon_r=-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}+\frac{1}{\rho c}j_\varphi B_{z0}\,,\quad -i\omega\upsilon_\varphi=-\frac{B_{z0}}{\rho c}j_r\,,\quad -i\omega\upsilon_z=-ik\frac{P}{\rho}\,, \tag{17}$$

$$-i\omega B_r=ikB_{z0}\upsilon_r\,,\quad -i\omega B_\varphi=ikB_{z0}\upsilon_\varphi\,,\quad -i\omega B_z=-\frac{B_{z0}}{r}\frac{d}{dr}(r\upsilon_r)\,, \tag{18}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+ikB_z=0\,, \tag{19}$$

$$j_r=-\frac{c}{4\pi}ikB_\varphi\,,\quad j_\varphi=\frac{c}{4\pi}\left(ikB_r-\frac{dB_z}{dr}\right),\quad j_z=\frac{c}{4\pi r}\frac{d}{dr}(rB_\varphi). \tag{20}$$

Из (17), (18), (20) имеем связи между амплитудами и дисперсионное уравнение в виде

$$\upsilon_r=-\frac{\omega}{k}b_r\,,\ \upsilon_\varphi=-\frac{\omega}{k}b_\varphi\,,\ \upsilon_z=\frac{k}{\omega}\frac{P}{\rho},\ b_r=\frac{B_r}{B_{z0}},\ b_\varphi=\frac{B_\varphi}{B_{z0}},\ \frac{\omega^2}{k^2}=\frac{B_{z0}^2}{4\pi\rho}=\upsilon_a^2\,, \tag{21}$$

где υ_a - альфвеновская скорость. Используя (21) и (20) в (17), получаем после интегрирования

$$\frac{P}{\rho}=-\upsilon_a^2 b_z\,,\quad b_z=\frac{B_z}{B_{z0}}. \tag{22}$$

С учетом (21) и (22), уравнения (16) и (18) тождественно совпадают с (19). Как следует из вышеизложенного, собственные линейные колебания несжимаемого цилиндра с однородным по оси z магнитным полем бывают двух типов, в зависимости от задания двух функций $\upsilon_r(r)$ и $\upsilon_\varphi(r)$. Произвольно выбирается волновой вектор k, определяющий длину волны возмущения h по оси z, $h=2\pi/k$.

3.1. *Магнито-торсионные колебания*. При $\upsilon_r(r)=0$ мы имеем магнито-торсионные колебания с

$$\upsilon_r=\upsilon_z=b_r=b_z=j_\varphi=P=0\,, \tag{23}$$

и ненулевыми υ_φ, b_φ, j_z, j_r, которые полагаем действительными. С учетом (21) имеем соотношения

$$\upsilon_\varphi=\upsilon_\varphi(r)\exp(ikz-i\omega t),\quad b_\varphi=-\frac{k}{\omega}\upsilon_\varphi=-\frac{k}{\omega}\upsilon_\varphi(r)\exp(ikz-i\omega t). \tag{24}$$

Стоячая волна получается сложением действительных частей решений для двух бегущих волн с волновыми векторами k и $-k$. Принимая литейную зависимость от радиуса, получаем решение

$$\upsilon_\varphi=\upsilon_{\varphi R}\frac{r}{R}\cos kz\cos\omega t\,,\quad b_\varphi=-\upsilon_{\varphi R}\frac{r}{R}\frac{k}{\omega}\sin kz\sin\omega t\,. \tag{25}$$

Из условия вмороженности найдем значения компонент вектора напряженности электрического поля внутри цилиндра,

$$\bar{E} = -\frac{1}{c}\left[\bar{v}\times\bar{B}\right], \quad E_r = -\frac{1}{c}\left[v_\varphi B_z - v_z B_\varphi\right] = -B_{z0}\frac{v_{\varphi R}}{c}\frac{r}{R}\cos kz\cos\omega t,$$
$$E_\varphi = -\frac{1}{c}\left[v_z B_r - v_r B_z\right] = 0, \quad E_z = -\frac{1}{c}\left[v_r B_\varphi - v_\varphi B_r\right] = 0. \tag{26}$$

Это решение представляет собой стоячую волну магнито-торсионного колебания с волновым вектором k и частотой $\omega = v_a k$.

3.2. *Альфвеновские волны.* При $v_\varphi(r) = 0$ мы имеем второй тип колебаний, соответствующий альфвеновской волне вдоль оси цилиндра, либо стоячей альфвеновской волне с фиксированным положением бугров и перетяжек, трансформирующихся друг в друга. При этом

$$v_\varphi = b_\varphi = j_r = j_z = 0, \tag{27}$$

а ненулевыми являются величины v_r, v_z, b_r, b_z, j_φ, P, которые полагаем действительными. Ненулевые компоненты колебаний выражаются через $v_r(r)$ в виде

$$v_z = \frac{i}{kr}\frac{d(r v_r)}{dr}, \quad b_r = -\frac{k}{\omega}v_r, \quad b_z = -\frac{i}{\omega r}\frac{d(r v_r)}{dr},$$
$$b_r = b_R\frac{r}{R}\exp(ikz - i\omega t), \quad b_R = -v_R\frac{k}{\omega}. \tag{28}$$

Для стоячей альфвеновской волны с линейной зависимостью скорости от радиуса, получаем, аналогично магнито-торсионной волне, решение в виде

$$v_r = v_R\frac{r}{R}\sin kz\sin\omega t, \quad b_R = -v_R\frac{r}{R}\frac{k}{\omega}\cos kz\cos\omega t,$$
$$v_z = \frac{2v_R}{kR}\cos kz\sin\omega t, \quad b_z = \frac{2v_R}{\omega R}\sin kz\cos\omega t. \tag{29}$$

Из условия вмороженности найдем значения компонент вектора напряженности электрического поля,

$$E_r = -\frac{1}{c}\left[v_\varphi B_z - v_z B_\varphi\right] = 0, \; E_\varphi = -\frac{1}{c}\left[v_z B_r - v_r B_z\right] = B_{z0}\frac{v_R}{c}\frac{r}{R}\sin kz\sin\omega t,$$
$$E_z = -\frac{1}{c}\left[v_r B_\varphi - v_\varphi B_r\right] = 0. \tag{30}$$

Это решение представляет собой стоячую альфвеновскую волну с волновым вектором k и частотой $\omega = v_a k$.

4. ***Общие решения уравнений Максвелла в вакууме в случае осевой симметрии.*** Найдем решение уравнений Масквелла в вакууме

$$\operatorname{div}\bar{B} = 0, \quad \operatorname{div}\bar{E} = 0, \quad \operatorname{rot}\bar{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}. \tag{31}$$

Для цилиндрической системы координат, обладающей аксиальной симметрией $\partial/\partial\varphi = 0$, получаем систему уравнений:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0\,,\quad -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}\,, \tag{32}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial r}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}\,,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}\,, \tag{33}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\,,\quad \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial B_r}{\partial t}\,, \tag{34}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}\,,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}\,. \tag{35}$$

Полагая, $\vec{E}$, $\vec{B}\sim\exp(ikz-i\omega t)$, получим:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r}+ikB_z=0\,,\quad -ikB_\varphi=-\frac{i\omega}{c}E_r\,, \tag{36}$$

$$ikB_r-\frac{dB_z}{dr}=-\frac{i\omega}{c}E_\varphi\,,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial(B_\varphi r)}{\partial r}=-\frac{i\omega}{c}E_z\,, \tag{37}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r}+ikE_z=0\,,\quad -ikE_\varphi=\frac{i\omega}{c}B_r\,, \tag{38}$$

$$ikE_r-\frac{dE_z}{dr}=\frac{i\omega}{c}B_\varphi\,,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial(E_\varphi r)}{\partial r}=\frac{i\omega}{c}B_z\,. \tag{39}$$

Из (36),(38) следует

$$E_\varphi=-\frac{\omega}{ck}B_r\,,\quad B_\varphi=\frac{\omega}{ck}E_r\,,\quad B_z=\frac{i}{k}\left(\frac{B_r}{r}+\frac{dB_r}{dr}\right),\quad E_z=\frac{i}{k}\left(\frac{E_r}{r}+\frac{dE_r}{dr}\right). \tag{40}$$

Подставляя полученные выражения в (37), (39), получаем два идентичных уравнения

$$ikE_r-\frac{i}{k}\frac{d}{dr}\left(\frac{E_r}{r}+\frac{dE_r}{dr}\right)=\frac{i}{k}\frac{\omega^2}{c^2}E_r\,,\quad ikB_r-\frac{i}{k}\frac{d}{dr}\left(\frac{B_r}{r}+\frac{dB_r}{dr}\right)=\frac{i}{k}\frac{\omega^2}{c^2}B_r\,. \tag{41}$$

Для функции $W_r=E_r$, B_r (радиальные компоненты магнитного и электрического полей) получаем уравнение

$$r^2\frac{d^2W_r}{dr^2}+r\frac{dW_r}{dr}+\left\{r^2\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right]-1\right\}W_r=0\,. \tag{42}$$

Возможны 3 случая: a) $\omega>kc$, b) $\omega=kc$ и c) $\omega<kc$. В предыдущем разделе было получено, что частота торсионных и альфвеновских колебаний цилиндра $\omega=k\upsilon_a<kc$, так как $\upsilon_a<c$, поэтому рассмотрим случай c). Делая замену переменной $x=r\sqrt{k^2-(\omega/c)^2}$, которая оставляет аргумент действительным, получаем для W модифицированное уравнение Бесселя

$$x^2\frac{d^2W_r}{dx^2}+x\frac{dW_r}{dx}-\left(x^2+1\right)W_r=0\,. \tag{43}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$W_r(x)=C_3I_1(x)+C_4K_1(x), \tag{44}$$

где C_3, C_4 - комплексные константы, $I_n(x)$ - функция Бесселя (действительная), соответствуюшая мнимому аргументу, а $K_n(x)$ - функция Макдональда [15]. При $x >> 1$ имеем

$$I_1(x) \approx \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\exp(-x). \tag{45}$$

Первое слагаемое в выражении для W_r экспоненциально растет, поэтому следует выбрать $C_3 = 0$. Общее решение для физических величин получаем из реальной части комплексного решения. Действительные и мнимые значения констант C_4 для E_r и B_r обозначим как $C_E^{r,i}$ и $C_B^{r,i}$, соответственно. С учетом

$$\exp(ikz - i\omega t) = \cos(kz - \omega t) + i\sin(kz - \omega t), \tag{46}$$

$$C_4 = C_4^r + iC_4^i, \tag{47}$$

получаем тогда для действительных частей

$$\begin{aligned} E_r &= K_1(x)\left[C_E^r\cos(kz - \omega t) - C_E^i\sin(kz - \omega t)\right], \\ B_r &= K_1(x)\left[C_B^r\cos(kz - \omega t) - C_B^i\sin(kz - \omega t)\right], \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} B_\varphi &= \frac{\omega}{kc}E_r = \frac{\omega}{kc}K_1(x)\left[C_E^r\cos(kz - \omega t) - C_E^i\sin(kz - \omega t)\right], \\ E_\varphi &= -\frac{\omega}{kc}B_r = -\frac{\omega}{kc}K_1(x)\left[C_B^r\cos(kz - \omega t) - C_B^i\sin(kz - \omega t)\right]. \end{aligned} \tag{49}$$

Из (40) имеем

$$E_z = \frac{\sqrt{k^2 - (\omega/c)^2}}{k}K_0(x)\left[C_E^i\cos(kz - \omega t) + C_E^r\sin(kz - \omega t)\right], \tag{50}$$

$$B_z = \frac{\sqrt{k^2 - (\omega/c)^2}}{k}K_0(x)\left[C_B^i\cos(kz - \omega t) + C_B^r\sin(kz - \omega t)\right]. \tag{51}$$

Здесь использовалось соотношение [15]

$$\frac{dK_1(x)}{dx} + \frac{K_1(x)}{x} = -K_0(x).$$

Стоячая волна получается суперпозицией двух бегущих волн из (48)-(51) с разными знаками волнового вектора k. В результате имеем для стоячих по оси z волн

$$\begin{aligned} E_r &= K_1(x)\cos kz\left(C_E^r\cos\omega t + C_E^i\sin\omega t\right), \\ B_r &= K_1(x)\cos kz\left(C_B^r\cos\omega t + C_B^i\sin\omega t\right), \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} B_\varphi &= \frac{\omega}{kc}K_1(x)\sin kz\left(C_E^r\sin\omega t - C_E^i\cos\omega t\right), \\ E_\varphi &= -\frac{\omega}{kc}K_1(x)\sin kz\left(C_B^r\sin\omega t - C_B^i\cos\omega t\right). \end{aligned} \tag{53}$$

$$E_z = \frac{\sqrt{k^2 - (\omega/c)^2}}{k}K_0(x)\sin kz\left(C_E^i\sin\omega t + C_E^r\cos\omega t\right), \tag{54}$$

$$B_z = \frac{\sqrt{k^2-(\omega/c)^2}}{k} K_0(x)\sin kz\left(C_B^i \sin\omega t + C_B^r \cos\omega t\right). \qquad (55)$$

5. *Сшивка решений на границе цилиндра.* На границе цилиндра (граница раздела двух сред), при $r=r_0$, решения удовлетворяют граничным условиям для уравнений Максвелла:

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma, \quad B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i, \quad E_{2\tau} = E_{1\tau} = 0. \qquad (56)$$

Здесь индексы "1" и "2" относятся к внешности (вакуум) и внутренности цилиндра (вещество), соответственно; σ - поверхностная плотность заряда, i - плотность поверхностного тока.

5.1. *Магнито-торсионные колебания.* В данной моде, внутри цилиндра, согласно (23), (26) равны нулю нормальная компонента магнитного поля B_r, и тангенциальные компоненты электрического поля E_z, E_φ. Тогда из (52)-(54) следует равенство нулю электрического и магнитного полей в вакууме вокруг бесконечного цилиндра при магнито-торсионных колебаниях

$$C_E^r = C_E^i = C_B^r = C_B^i = 0. \qquad (57)$$

Скачки нормальной компоненты электрического поля E_r и тангенциальной компоненты магнитного поля B_φ определяют переменную поверхностную плотность электрического заряда σ и поверхностную плотность тока i, согласно (25), (26), в виде

$$\sigma = -\frac{B_{z0}\, \upsilon_{\varphi R}}{4\pi c}\cos kz \cos\omega t, \qquad i_z = -\frac{B_{z0} k\, \upsilon_{\varphi R}\, c}{4\pi\omega}\sin kz \sin\omega t. \qquad (58)$$

Магнито-торсионные возмущения не сопровождаются возмущениями компоненты поверхностного тока i_φ. Невозмущенное значение $i_{\varphi 0}$ зависит от предположения о вакуумном значении магнитного поля вдоль оси цилиндра B_{z0}^{out}, так что

$$i_{\varphi 0} = \frac{c}{4\pi}\left(B_{z0} - B_{z0}^{out}\right). \qquad (59)$$

5.2. *Альфвеновские волны.* В данной моде, согласно (27), (33), равны нулю нормальная компонента электрического поля E_r, и тангенциальные компоненты электрического поля E_z, и магнитного B_φ. Тогда из непрерывности нормальной компоненты магнитного поля B_r, и тангенциальной компоненты электрического поля E_φ на границе цилиндра находим эти компоненты полей вне цилиндра, используя (29), (30), (52), (53), в виде

$$B_r^{out} = -B_{z0}\frac{k\,\upsilon_R}{\omega}\frac{K_1(x)}{K_1(x_R)}\cos kz\cos\omega t, \quad E_\varphi^{out} = B_{z0}\frac{\upsilon_R}{c}\frac{K_1(x)}{K_1(x_R)}\sin kz\sin\omega t, \qquad (60)$$

где $x = r\sqrt{k^2-(\omega/c)^2}$, $x_R = R\sqrt{k^2-(\omega/c)^2}$. Из этой сшивки, а также из непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля E_z, следует, что только одна константа в (48) является ненулевой

$$C_B^r = -B_{z0}\frac{k\upsilon_R}{\omega}\frac{1}{K_1 x_R}, \quad C_B^i = C_E^r = C_E^i = 0. \tag{61}$$

С учетом (61) получаем из (48), (55), (50) внешние значения полей B_φ, B_z, E_r, E_z

$$B_z^{out} = -B_{z0}\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{kc}\right)^2}\,\frac{k\upsilon_R}{\omega}\frac{K_0(x)}{K_1(x_R)}\sin kz\cos\omega t, \quad B_\varphi^{out} = E_r^{out} = E_z^{out} = 0. \tag{62}$$

Из (56) найдем плотности поверхностного заряда и возмущенного поверхностного тока, используя (23), (24), (62)

$$\sigma = 0, \ i_z = 0, \ i_\varphi = \frac{c}{4\pi}B_{z0}\frac{\upsilon_R}{\omega R}\left[x_R\frac{K_0(x_R)}{K_1(x_R)} + 2\right]\sin kz\cos\omega t. \tag{63}$$

6. *Электромагнитное излучение при колебаниях замагниченного цилиндра с магнитным полем вдоль его оси.* Найдем плотность потока электромагнитного излучения цилиндра $\bar{S}$, определяемого вектором Умова-Пойнтинга:

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\bar{E}\times\bar{B}\right]. \tag{64}$$

При магнитоторсионных колебаниях внешнее электромагнитное поле отсутствует, согласно (57), поэтому при этих колебаниях цилиндр ничего не излучает. При альфвеновских колебаниях, используя решения для внешних полей (60) и (62). получаем значения для плотности потока электромагнитного излучения в виде

$$\begin{gathered} S_r = \frac{c}{4\pi}E_\varphi^{out}B_z^{out} = B_{z0}^2\frac{k\upsilon_R^2}{8\pi\omega}\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{kc}\right)^2}\,\frac{K_0(x)K_1(x)}{K_1^2(x_R)}\sin^2 kz\sin 2\omega t, \\ S_z = -\frac{c}{4\pi}E_\varphi^{out}B_r^{out} = B_{z0}^2\frac{k\upsilon_R^2}{16\pi\omega}\frac{K_1^2(x)}{K_1^2(x_R)}\sin 2kz\sin 2\omega t, \quad S_\varphi = 0. \end{gathered} \tag{65}$$

Полученное выше решение соответствует полностью линейно поляризованной электромагнитной волне. Решение для волны с другой линейной поляризацией находится аналогичным способом. При этом в выражении (63) для радиального потока энергии появляется $\cos^2 kz$ вместо $\sin^2 kz$.

7. *Неосесимметричные колебания.*

7.1. *Основные уравнения.* В отсутствие аксиальной симметрии уравнения магнитной гидродинамики в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \upsilon_r\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{\upsilon_\varphi}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \upsilon_z\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\upsilon_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_\varphi}{\partial\phi} + \frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right] = 0, \tag{66}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{\rho c}\left(j_\varphi B_z-j_z B_\varphi\right), \tag{67}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{v_r v_\varphi}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \varphi}+\frac{1}{\rho c}\left(j_z B_r-j_r B_z\right), \tag{68}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{\rho c}\left(j_r B_\varphi-j_\varphi B_r\right), \tag{69}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(v_r B_\varphi-v_\varphi B_r\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(v_z B_r-v_r B_z\right), \tag{70}$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(v_\varphi B_z-v_z B_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(v_r B_\varphi-v_\varphi B_r\right), \tag{71}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(v_z B_r-v_r B_z\right)\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(v_\varphi B_z-v_z B_\varphi\right), \tag{72}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0, \tag{73}$$

$$j_r=\frac{c}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right], \tag{74}$$

$$j_\varphi=\frac{c}{4\pi}\left[\frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial r}\right], \tag{75}$$

$$j_z=\frac{c}{4\pi r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)-\frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\right], \tag{76}$$

Здесь уравнение (66) - уравнение непрерывности, (67)-(69) - уравнения движения Эйлера с магнитными полями, (70)-(72) - уравнения вмороженности магнитного поля, (73) - уравнение бездивергентности магнитного поля, (74)-(76) - уравнения генерации поля электрическими токами. Не учитывалась вязкость и омическое сопротивление (проводимость равна бесконечности).

7.2. *Линеаризованные уравнения.* Линеаризованная система уравнений с зависимостью от (t,φ,z) в виде $\sim \exp ikz+im\varphi-i\omega t$ имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d(r v_r)}{dr}+\frac{im v_\varphi}{r}+ik\, v_z=0, \tag{77}$$

$$i\omega v_r=\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}-\frac{1}{\rho c}j_\varphi B_{z0}, \quad i\omega v_\varphi=\frac{imP}{\rho r}+\frac{B_{z0}}{\rho c}j_r, \quad i\omega v_z=ik\frac{P}{\rho}, \tag{78}$$

$$i\omega B_r=-ikB_{z0}v_r, \; i\omega B_\varphi=-ikB_{z0}v_\varphi, \; i\omega B_z=\frac{B_{z0}}{r}\left[\frac{d}{dr}(r v_r)+im v_\varphi\right], \tag{79}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{imB_\varphi}{r}+ikB_z=0, \tag{80}$$

$$j_r=\frac{c}{4\pi}\left[\frac{imB_z}{r}-ikB_\varphi\right], \; j_\varphi=\frac{c}{4\pi}\left(ikB_r-\frac{dB_z}{dr}\right), \; j_z=\frac{c}{4\pi r}\left[\frac{d}{dr}(rB_\varphi)-imB_r\right]. \tag{81}$$

Из (78), (79), (81) имеем связи между амплитудами и дисперсионное уравнение в виде

$$v_r = -\frac{\omega}{k} b_r \,,\, v_\varphi = -\frac{\omega}{k} b_\varphi \,,\, v_z = \frac{k}{\omega}\frac{P}{\rho} \,,\, b_r = \frac{B_r}{B_{z0}} \,,\, b_\varphi = \frac{B_\varphi}{B_{z0}} \,,\, \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_{z0}}{4\pi\rho} = v_a^2 \,, \quad (82)$$

где v_a - альфвеновская скорость. Используя (82) и (81) в (78), получаем после интегрирования

$$\frac{P}{\rho} = -v_a^2 b_z \,,\; b_z = \frac{B_z}{B_{z0}} . \quad (83)$$

Уравнение (80) следует из (77) и (79) с учетом (82) и (83). Как следует из вышеизложенного, собственные линейные колебания несжимаемого цилиндра с однородным по оси z магнитным полем бывают двух типов, в зависимости от задания двух функций $v_r(r)$ и $v_\varphi(r)$. Произвольно выбирается волновой вектор k, определяющий длину волны возмущения h по оси z, $h = 2\pi/k$, и азимутальный волновой вектор m, определяющий число узлов на круге.

7.3. *Магнито-торсионные колебания*. Магнито-торсионные колебания соответствуют $v_r(r) = b_r(r) = 0$ при ненулевых остальных компонент поля и скорости. Задавая произвольно $v_\varphi(r)$, получим

$$v_z = -\frac{m}{kr} v_\varphi \,,\; b_z = \frac{m}{\omega r} v_\varphi \,,\; b_\varphi = -\frac{k}{\omega} v_\varphi \,,\; \frac{P}{\rho} = -v_a^2 \frac{m}{\omega r} v_\varphi . \quad (84)$$

Задавая произвольно $b_\varphi(r)$, получим

$$v_z = \frac{m}{kr}\frac{\omega}{k} b_\varphi \,,\; b_z = -\frac{m}{kr} b_\varphi \,,\; v_\varphi = -\frac{\omega}{k} b_\varphi \,,\; \frac{P}{\rho} = v_a^2 \frac{m}{kr} b_\varphi . \quad (85)$$

Зададим произвольно

$$v_\varphi = v_\varphi(r)\exp(ikz + im\varphi - i\omega t), \quad (86)$$

остальные ненулевые компоненты получаются из (84). Выделяя действительную часть колебаний, и рассматривая возмущение в виде твердотельного вращения, получим

$$\begin{gathered} v_\varphi = v_{\varphi R} \frac{r}{R}\cos(kz + m\varphi - \omega t), \quad b_\varphi = -v_{\varphi R}\frac{kr}{\omega R}\cos(kz + m\varphi - \omega t), \\ v_z = -v_{\varphi R}\frac{m}{kR}\cos(kz + m\varphi - \omega t), \quad b_z = v_{\varphi R}\frac{m}{k v_a R}\cos(kz + m\varphi - \omega t). \end{gathered} \quad (87)$$

Из условия вмороженности найдем значения компонент вектора напряженности электрического поля внутри цилиндра,

$$\begin{gathered} \bar{E} = -\frac{1}{c}\left[\bar{v} \times \bar{B}\right],\; E_r = -\frac{1}{c}\left[v_\varphi B_z - v_z B_\varphi\right] = -B_{z0}\frac{v_{\varphi R}}{c}\frac{r}{R}\cos(kz + m\varphi - \omega t), \\ E_\varphi = -\frac{1}{c}\left[v_z B_r - v_r B_z\right] = 0 \,,\quad E_z = -\frac{1}{c}\left[v_r B_\varphi - v_\varphi B_r\right] = 0 . \end{gathered} \quad (88)$$

7.4. *Альфвеновские волны*. При $v_\varphi(r) = 0$ мы имеем второй тип колебаний, соответствующий альвеновским волнам вдоль оси цилиндра и его окружности. При этом

$$v_\varphi = b_\varphi = 0\,, \tag{89}$$

а ненулевыми являются величины $v_r, v_z, b_r, b_z, j_r, j_\varphi, j_z, P$. Ненулевые компоненты колебаний выражаются через $v_r(r)$ в виде

$$v_z = \frac{i}{kr}\frac{d(r v_r)}{dr}\,, \quad b_r = -\frac{k}{\omega}v_r\,, \quad b_z = -\frac{i}{\omega r}\frac{d(r v_r)}{dr}\,. \tag{90}$$

Задаем возмущение в виде

$$b_z = b\exp(ikz + im\varphi - i\omega t).$$

Выделяя действительную часть колебаний, и полагая линейную зависимость радиальной скорости от радиуса, получим

$$\begin{gathered} b_z = 2\frac{v_R}{\omega R}\cos(kz + m\varphi - \omega t),\ v_z = -2\frac{v_R}{kR}\cos(kz + m\varphi - \omega t), \\ b_r = v_R\frac{kr}{\omega R}\sin(kz + m\varphi - \omega t),\ v_r = -v_R\frac{r}{R}\sin(kz + m\varphi - \omega t),\ b = \frac{2v_R}{\omega R}. \end{gathered} \tag{91}$$

Из условия вмороженности найдем значения компонент вектора напряженности электрического поля,

$$\begin{gathered} E_r = -\frac{1}{c}\left[v_\varphi B_z - v_z B_\varphi\right] = 0\,, \quad E_z = -\frac{1}{c}\left[v_r B_\varphi - v_\varphi B_r\right] = 0\,, \\ E_\varphi = -\frac{1}{c}\left[v_z B_r - v_r B_z\right] = -B_{z0}\frac{v_R}{c}\frac{r}{R}\sin(kz + m\varphi - \omega t). \end{gathered} \tag{92}$$

8. *Общие решения уравнений Максвелла в вакууме в цилиндрических координатах*. Найдем решение уравнений Максвелла (31) в вакууме. В цилиндрической системе координат система уравнений имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{r\partial\varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial B_z}{r\partial\varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}\,, \tag{93}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{r\partial\varphi} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}\,, \tag{94}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial E_\varphi}{r\partial\varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial E_z}{r\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_r}{\partial t}\,, \tag{95}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{r\partial\varphi} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}. \tag{96}$$

Полагая, $\vec{E}$, $\vec{B} \sim \exp(ikz + im\varphi - i\omega t)$, получим:

$$\frac{1}{r}\frac{d(rB_r)}{dr} + \frac{im}{r}B_\varphi + ikB_z = 0\,, \quad \frac{im}{r}B_z - ikB_\varphi = -\frac{i\omega}{c}E_r\,, \tag{97}$$

$$ikB_r - \frac{dB_z}{dr} = -\frac{i\omega}{c}E_\varphi\,, \quad \frac{1}{r}\frac{d(B_\varphi r)}{dr} - \frac{im}{r}B_r = -\frac{i\omega}{c}E_z\,, \tag{98}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(rE_r)}{dr} + \frac{im}{r}E_\varphi + ikE_z = 0\,, \quad \frac{im}{r}E_z - ikE_\varphi = \frac{i\omega}{c}B_r\,, \tag{99}$$

$$ikE_r - \frac{dE_z}{dr} = \frac{i\omega}{c} B_\varphi \,, \quad \frac{1}{r}\frac{d(E_\varphi r)}{dr} - \frac{im}{r} E_r = \frac{i\omega}{c} B_z \,. \tag{100}$$

Среди четырех уравнений (97), (98), и, соответственно, (99), (100), независимыми являются только три. Из (97) и первого уравнения (98) получаем

$$E_\varphi = \frac{m}{kr} E_z - \frac{\omega}{ck} B_r \,, \quad E_\varphi = \frac{i}{m}\frac{d(rE_r)}{dr} - \frac{kr}{m} E_z \,, \quad B_\varphi = \frac{kc}{\omega} E_r + \frac{ic}{\omega}\frac{dE_z}{dr} \,. \tag{101}$$

Соответственно, из (99), и первого уравнения (100) получаем

$$B_\varphi = \frac{m}{kr} B_z + \frac{\omega}{ck} E_r \,, \quad B_\varphi = \frac{i}{m}\frac{d(rB_r)}{dr} - \frac{kr}{m} B_z \,, \quad E_\varphi = -\frac{kc}{\omega} B_r - \frac{ic}{\omega}\frac{dB_z}{dr} \,. \tag{102}$$

Исключая B_φ, E_φ из уравнений (101), (102), получаем 4 уравнения для B_r, B_z, E_r, E_z в виде

$$i\frac{d(rB_r)}{dr} - \frac{m\omega}{kc} E_r = krB_z\left(1 + \frac{m^2}{k^2 r^2}\right), \tag{103}$$

$$i\frac{d(rE_r)}{dr} + \frac{m\omega}{kc} B_r = krE_z\left(1 + \frac{m^2}{k^2 r^2}\right), \tag{104}$$

$$B_r = \frac{1}{\frac{kc}{\omega} - \frac{\omega}{kc}}\left[-\frac{ic}{\omega}\frac{dB_z}{dr} - \frac{m}{kr} E_z\right], \quad E_r = \frac{1}{\frac{kc}{\omega} - \frac{\omega}{kc}}\left[-\frac{ic}{\omega}\frac{dE_z}{dr} + \frac{m}{kr} B_z\right]. \tag{105}$$

Подставляя (105) в (103), (104), получаем тождественные уравнения для компонент B_z, $E_z = W_z$ в виде

$$r^2 \frac{d^2 W_z}{dr^2} + r\frac{dW_z}{dr} - \left\{r^2\left[k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right] + m^2\right\} W_z = 0 \,. \tag{106}$$

Делая замену переменной $x = r\sqrt{k^2 - (\omega/c)^2}$, которая оставляет аргумент действительным, получаем для W модифицированное уравнение Бесселя

$$x^2 \frac{d^2 W_z}{dx^2} + x\frac{dW_z}{dx} - \left(x^2 + m^2\right) W_z = 0 \,. \tag{107}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$W_z(x) = C_3 I_m(x) + C_4 K_m(x), \tag{108}$$

где C_3, C_4 - комплексные константы, $I_m(x)$ - функция Бесселя (действительная), соответствующая мнимому аргументу, а $K_m(x)$ - функция Макдональда [15]. При $x >> 1$ имеем

$$I_m(x) \approx \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_m(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x). \tag{109}$$

Первое слагаемое в выражении для W_r экспоненциально растет, поэтому следует выбрать $C_3 = 0$. Общее решение для физических величин получаем из реальной части комплексного решения. Действительные и мнимые значения констант C_4 для E_z и B_z обозначим как $C_E^{r,i}$ и $C_B^{r,i}$, соответственно. С учетом

$$\exp(ikz + im\varphi - i\omega t) = \cos(kz + m\varphi - \omega t) + i\sin(kz + m\varphi - \omega t), \tag{110}$$

$$C_4 = C_4^r + iC_4^i, \tag{111}$$

получаем тогда для действительных частей

$$\begin{aligned} E_z &= K_m(x)\left[C_E^r \cos(kz + m\varphi - \omega t) - C_E^i \sin(kz + m\varphi - \omega t)\right], \\ B_z &= K_m(x)\left[C_B^r \cos(kz + m\varphi - \omega t) - C_B^i \sin(kz + m\varphi - \omega t)\right]. \end{aligned} \tag{112}$$

С учетом

$$\frac{dK_m(x)}{dx} = -K_{m+1}(x) + \frac{m}{x}K_m(x)$$

получаем из (105)

$$\begin{aligned} E_r = {} & \frac{k\omega/c}{k^2 - (\omega^2/c^2)}\left[\frac{c}{\omega}C_E^i\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\left(-K_{m+1} + \frac{m}{x}K_m\right) + \frac{m}{kr}C_B^r K_m\right]\cos(kz + m\varphi - \omega t) + \\ & + \frac{k\omega/c}{k^2 - (\omega^2/c^2)}\left[\frac{c}{\omega}C_E^r\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\left(-K_{m+1} + \frac{m}{x}K_m\right) - \frac{m}{kr}C_B^i K_m\right]\sin(kz + m\varphi - \omega t), \end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned} B_r = {} & \frac{k\omega/c}{k^2 - (\omega^2/c^2)}\left[\frac{c}{\omega}C_B^i\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\left(-K_{m+1} + \frac{m}{x}K_m\right) - \frac{m}{kr}C_E^r K_m\right]\cos(kz + m\varphi - \omega t) + \\ & + \frac{k\omega/c}{k^2 - (\omega^2/c^2)}\left[\frac{c}{\omega}C_B^r\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\left(-K_{m+1} + \frac{m}{x}K_m\right) + \frac{m}{kr}C_E^i K_m\right]\sin(kz + m\varphi - \omega t). \end{aligned} \tag{114}$$

Из первых соотношений в (101), (102), получаем

$$\begin{aligned} E_\varphi = {} & \frac{\omega^2/c^2}{k^2 - (\omega^2/c^2)}\left[-\frac{c}{\omega}C_B^i\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\left(-K_{m+1} + \frac{m}{x}K_m\right) + \frac{k^2c^2}{\omega^2}\frac{m}{kr}C_E^r K_m\right]\times \\ & \times\cos(kz + m\varphi - \omega t) + \frac{\omega^2/c^2}{k^2 - (\omega^2/c^2)}\times \\ & \times\left[-\frac{c}{\omega}C_B^r\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\left(-K_{m+1} + \frac{m}{x}K_m\right) - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\frac{m}{kr}C_E^i K_m\right]\sin(kz + m\varphi - \omega t), \end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned} B_\varphi = {} & \frac{\omega^2/c^2}{k^2 - (\omega^2/c^2)}\left[\frac{c}{\omega}C_E^i\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\left(-K_{m+1} + \frac{m}{x}K_m\right) + \frac{k^2c^2}{\omega^2}\frac{m}{kr}C_B^r K_m\right]\times \\ & \times\cos(kz + m\varphi - \omega t) + \frac{\omega^2/c^2}{k^2 - (\omega^2/c^2)}\times \\ & \times\left[\frac{c}{\omega}C_E^r\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\left(-K_{m+1} + \frac{m}{x}K_m\right) - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\frac{m}{kr}C_B^i K_m\right]\sin(kz + m\varphi - \omega t). \end{aligned} \tag{116}$$

9. *Электромагнитное излучение цилиндра при колебаниях.*

9.1. *Магнито-торсионные колебания.* В данной моде, внутри цилиндра, согласно (84), (88), равны нулю нормальная компонента магнитного поля B_r, и тангенциальные компоненты электрического поля E_z, E_φ. Тогда из (112)-(116) следует равенство нулю электрического и магнитного полей вокруг бесконечного цилиндра при магнито-торсионных колебаниях

$$C_E^r = C_E^i = C_B^r = C_B^i = 0\,. \tag{117}$$

Скачки нормальной компоненты электрического поля E_r и тангенциальной компоненты магнитного поля B_φ определяют переменную поверхностную плотность электрического заряда σ и поверхностную плотность тока i, согласно (87), (88), в виде

$$\sigma = -\frac{B_{z0}\,\upsilon_{\varphi R}}{4\pi c}\cos(kz + m\varphi - \omega t), \quad i_z = -\frac{B_{z0} k\,\upsilon_{\varphi R}\, c}{4\pi\omega}\cos(kz + m\varphi - \omega t),$$
$$i_\varphi = \frac{B_{z0} m\,\upsilon_{\varphi R}\, c}{4\pi\omega R}\cos(kz + m\varphi - \omega t). \tag{118}$$

Невозмущенное значение $i_{\varphi 0}$ зависит от предположения о вакуумном значении магнитного поля вдоль оси цилиндра B_{z0}^{out}, так что

$$i_{\varphi 0} = \frac{c}{4\pi}\left(B_{z0} - B_{z0}^{out}\right). \tag{119}$$

При неосесимметричных магнито-торсионных колебаниях внешнее электромагнитное поле отсутствует, согласно (117), поэтому при этих колебаниях цилиндр ничего не излучает, как и в осесимметричном случае.

9.2. *Альфвеновские волны.* В данной моде, согласно (89), (94), равны нулю нормальная компонента электрического поля E_r, и тангенциальные компоненты электрического поля E_z и магнитного B_φ. Тогда из непрерывности нормальной компоненты магнитного поля B_r, и тангенциальной компоненты электрического поля E_φ на границе цилиндра находим эти компоненты полей вне цилиндра, используя (90), (92), (114), (115), в виде

$$C_B^r = -B_{z0}\frac{x_R\,\upsilon_R}{\omega R}\left(K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R}K_{m,R}\right)^{-1}, \quad C_B^i = C_E^r = C_E^i = 0\,. \tag{120}$$

$$B_r^{out} = B_{z0}\frac{k\,\upsilon_R}{\omega}\,\frac{K_{m+1} - \frac{m}{x}K_m}{K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R}K_{m,R}}\sin(kz + m\varphi - \omega t),$$
$$E_\varphi^{out} = -B_{z0}\frac{\upsilon_R}{c}\,\frac{K_{m+1} - \frac{m}{x}K_m}{K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R}K_{m,R}}\sin(kz + m\varphi - \omega t), \tag{121}$$

где $x = r\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$, $x_R = R\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$. С учетом (120) получаем из (112)-(114) внешние значения полей B_z, B_φ, E_r, $E_z = 0$:

$$B_z^{out} = -B_{z0} x_R \frac{\upsilon_R}{\omega R} \frac{K_m}{K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R}} \cos(kz + m\varphi - \omega t). \qquad (122)$$

$$B_\varphi^{out} = -B_{z0} \frac{m}{x_R} \frac{k\upsilon_R}{\omega} \frac{R}{r} \frac{K_m}{K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R}} \cos(kz + m\varphi - \omega t). \qquad (123)$$

$$E_\varphi^{out} = -B_{z0} \frac{m}{x_R} \frac{\upsilon_R}{c} \frac{R}{r} \frac{K_m}{K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R}} \cos(kz + m\varphi - \omega t). \qquad (124)$$

Из (56) найдем плотности поверхностного заряда и поверхностного тока, используя (90), (92), (122), (124)

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} E_r^{out} = \frac{B_{z0}}{4\pi} \frac{m}{x_R} \frac{\upsilon_R}{c} \frac{R}{r} \frac{K_m}{K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R}} \cos(kz + m\varphi - \omega t), \qquad (125)$$

$$i_z = -\frac{c}{4\pi} B_\varphi^{out} = \frac{c}{4\pi} B_{z0} \frac{m}{x_R} \frac{k\upsilon_R}{\omega} \frac{R}{r} \frac{K_m}{K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R}} \cos(kz + m\varphi - \omega t), \qquad (126)$$

$$i_\varphi = \frac{c}{4\pi} B_{z0} \frac{\upsilon_R}{\omega R} \left[2 + x_R \frac{K_{m,R}}{K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R}} \right] \cos(kz + m\varphi - \omega t). \qquad (127)$$

Используя решения для внешних полей (121)-(124), получаем значения для плотности потока электромагнитного излучения в виде

$$S_r = \frac{c}{4\pi} E_\varphi^{out} B_z^{out} = B_{z0}^2 \frac{\upsilon_R^2}{8\pi\omega R} x_R K_m \left(K_{m+1} - \frac{m}{x} K_m \right) \times$$
$$\times \left(K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R} \right)^{-2} \sin^2(kz + m\varphi - \omega t), \qquad (128)$$

$$S_\varphi = -\frac{c}{4\pi} E_r^{out} B_{z0}^{out} =$$
$$= -B_{z0}^2 \frac{m\upsilon_R^2}{4\pi\omega r} K_m^2 \left(K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R} \right)^{-2} \cos^2(kz + m\varphi - \omega t), \qquad (129)$$

$$S_z = \frac{c}{4\pi} \left(E_r^{out} B_\varphi^{out} - E_\varphi^{out} B_r^{out} \right) = B_{z0}^2 \frac{k\upsilon_R^2}{4\pi\omega} \left(K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R} \right)^{-2} \times \qquad (130)$$
$$\times \left[\frac{m^2}{x_R^2} \frac{R^2}{r^2} K_m^2 \cos^2(kz + m\varphi - \omega t) - \left(K_{m+1,R} - \frac{m}{x_R} K_{m,R} \right)^2 \sin^2(kz + m\varphi - \omega t) \right].$$

10. *Выводы*. Из полученных результатов следует, что при торсионных колебаниях замагниченного цилиндра бесконечной длины электромагнитное поле вокруг цилиндра не возникает, поток энергии отсутствует, и колебания не затухают. В случае альфвеновских колебаний вокруг цилиндра возникает электромагнитное поле, которое экспоненциально убывает с удалением от цилиндра в силу асимптотики функций

$$K_m(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

при $x \to \infty$. Локальная плотность радиального потока энергии падает экспоненциально с радиусом удаления от оси цилиндра, и везде равна нулю при усреднении по времени. Потоки энергии вдоль оси цилиндра и вдоль его окружности также экспоненциально убывают с радиусом, но не исчезают при усреднении по времени. Это связано с выбором волны определенной поляризации. Для волны с противоположными по знаку волновыми векторами k и m будет иметь место поток энергии в противоположном направлении, так что при колебаниях, содержащих все моды, средние по времени потоки энергии будут нулевыми во всех направлениях.

Подобное поведение является результатом рассмотрения идеальной модели бесконечно длинного цилиндра, в которой происходит интерференция волн, приводящая к отсутствию потока энергии на бесконечность. В реальной модели длинного цилиндра конечной длины поток энергии и затухание колебаний будут иметь место, однако, эти потери будут существенно подавлены при длине цилиндра намного превышающей его радиус и длину волны колебаний вдоль его оси. Этот результат соответствует наблюдениям джетов, которые показывают сохранение сильной коллимации на длинах, намного превышающих его диаметр.

Авторы благодарны за частичную поддержку РФФИ, грант 08-02-00491 и 11-02-00602; Программе РАН "Происхождение, образование и эволюция объектов во Вселенной" и Гранту Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-3458.2010.2.

[1] Институт космических исследований РАН, e-mail: gkogan@iki.rssi.ru
[2] Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия,

ELECTROMAGNETIC FIELD ARIZING DURING OSCILLATIONS OF A MAGNETIZED NON-COMPRESSIBLE INFINITELY LONG CYLINDER

G.S.BISNOVATYI-KOGAN[1], S.V.PAVLOV[2]

Oscillations of the magnetized non-compressible cylinder with a uniform magnetic field along its axis are investigated, together with an electromagnetic field produced by these oscillations. Two types of eigenfunctions are found for oscillations in linear approximation, representing torsional and alfvenic waves. It is obtained, that torsional oscillations don't generate electromagnetic field outside the infinite length cylinder. The electromagnetic field generated around this cylinder by alfvenic oscillations drops exponentially with radial distance from the axis of the cylinder. A time averaged electromagnetic flux from the cylinder is equal to zero. The physical interpretation of the results is given.

Key words: *jets:oscillations:electromagnetic field*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.Siemiginowska, R.K.Smith, T.L.Aldcroft et al.*, Astrophys. J., 598, L15-L18, 2003.
2. *M.C.Begelman, R.D.Blandford, M.J.Rees*, Reviews of Modern Physics, 56, 255, 1984.
3. *G.S.Bisnovatyi-Kogan*, in Stellar Jets and Bipolar Outflows, eds. L.Errico, A.A.Vittone, Kluwer. Proc. ApSS Lib., 186, 369, 1993.
4. *S.Chandrasekhar, E.Fermi*, Astrophys. J., 118, 116, 1953.
5. *Г.С.Бисноватый-Коган, Б.В.Комберг, А.М.Фридман*, Астрон. ж., 46, 465, 1969.
6. *W.A.Hiltner*, Astrophys. J., 130, 340, 1959.
7. *A.H.Bridle, J.A.Eilek*, Physics of Energy Transport in Extragalactic Radio Sources, Greenbank: NRAO, 1984.
8. *R.C.Thomson, C.D.Mackay, A.E.Wright*, Nature, 365, 133, 1993.
9. *G.S.Bisnovatyi-Kogan, R.V.E.Lovelace*, Astron. Astrophys., 296, L17, 1995.
10. *B.E.Stern, Y.Y.Tikhomirova*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. Letters, 398, L1, 2009.
11. *G.S.Bisnovatyi-Kogan*, Astrophysics and Space Science, 297, 9, 2005.
12. *G.S.Bisnovatyi-Kogan*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 376, 457, 2007.
13. *G.S.Bisnovatyi-Kogan*, Astrophysics and Space Science, 311, 287, 2007.
14. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред., М., Наука, 1982.
15. *И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев*, Справочник по математике. ГИТТЛ, М., 1953.