

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОЧЛЕНОВ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ С ВЕСОМ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - Армянский Университет¹

Институт Математики НАН Армении

E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com*; *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Доказывается, что если $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $1 < \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$, $\mathfrak{R} := \{\nu \in \mathbb{R}_+^n, (\lambda, \nu) \leq 1\}$, $\mathfrak{M} := \{\nu \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \nu_j + \lambda_n \nu_n \leq 1\}$ и многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ является $\mathfrak{R}$ -гиперболическим относительно вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\eta_n \neq 0$, то он $\mathfrak{M}$ -гиперболичесок относительно η .

MSC2010 number: 12E10; 12D05; 26D05; 35A23.

Ключевые слова: многогранник Ньютона; (слабо) гиперболический многочлен (оператор); вес гиперболичности.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ – множество всех n -мерных мультииндексов, т.е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ ($j = 1, \dots, n$), $\mathbb{R}^n(\mathbb{E}^n)$ – n -мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ (соответственно точек $(x = (x_1, \dots, x_n))$). $\mathbb{R}_+^n := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n)\}$, $\mathbb{R}_0^n := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1 \dots \xi_n \neq 0\}$.

Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\nu \in \mathbb{R}_+^n$ и $t \in \mathbb{R}$ обозначим $(\xi, \eta) = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n$, $t\xi = (t\xi_1, \dots, t\xi_n)$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial \xi_j$ ($j = 1, \dots, n$), $|\xi^\nu| = |\xi_1|^{\nu_1} \dots |\xi_n|^{\nu_n}$, $G(\nu) := \{0 \neq \mu \in \mathbb{R}_0^n, \mu \neq \nu, \mu_j = \nu_j \text{ либо } \mu_j = 0, (1 \leq j \leq n)\}$.

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ многочлен с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по канечному набору мультииндексов $(P) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

¹Работа выполнена в рамках Программы Развития РАУ по НИР

Обозначим $m := \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|$ и представим многочлен P в виде суммы однородных многочленов

$$(1.1) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^m P_j(\xi) = \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

Определение 1.1. (см. [1] или [2] определение 12.3.3) Пусть $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Многочлен P называется гиперболическим по Гордингу относительно вектора η , если $P_m(\eta) \neq 0$ и существует число $\tau_0 > 0$, такое, что $P(\xi + i\tau \eta) \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re} \tau| \geq \tau_0$.

Определение 1.2. (см. [3] или [4]) функцию g , определенную на $\mathbb{R}^n$, назовем весом гиперболичности, если 1) $\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} g(\xi) > 0$, 2) существуют числа $a \in [0, 1]$ и $c > 0$ такие, что $g(\xi + \eta) \leq c[g(\xi) + |\eta|^a]$ $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что для веса гиперболичности g , $\lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi)/|\xi| = 0$.

Определение 1.3. (см. [3] или [4]) Пусть функция g является весом гиперболичности и $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^n$. Скажем, что многочлен P является g -гиперболическим относительно вектора η , если $P_m(\eta) \neq 0$ и существует число $c > 0$ такое, что $P(\xi + i\tau \eta) \neq 0$ для любой пары $(\xi, \tau) : \xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re} \tau| \geq cg(\xi)$.

Пусть $\mathcal{A} := \{\nu^j \in \mathbb{R}_+^n; j = 1, 2, \dots, M\}$ (конечный) набор точек. Наименьшую выпуклую оболочку набора $\mathcal{A}$ (которая является многогранником) назовем многогранником Ньютона (далее М.Н.) множества $\mathcal{A}$ (см., например, [5] - [7]) и обозначим через $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$. Многогранник $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ называется вполне правильным, если 1) $\mathfrak{N}$ имеет вершину в начале координат $\mathbb{R}_+^n$, 2) отличную от начала координат вершину на каждой оси координат $\mathbb{R}_+^n$, и 3) все координаты внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней (далее $\mathfrak{N}$ -нормаль) положительны. Для в.п. многогранника $\mathfrak{N}$ введем обозначения

$\mathfrak{N}^0$ — множество его вершин,

$$\mathfrak{N}_j^0 = \{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathfrak{N}^0, \nu_j \neq 0\} \quad j = 1, \dots, n,$$

$\Lambda(\mathfrak{N})$ — множество $\mathfrak{N}$ -нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней, нормированных так, что $\sup_{\nu \in \mathfrak{N}} (\lambda, \nu) = 1$,

$$\rho(\mathfrak{N}) := \max_{\nu \in \mathfrak{N}} |\nu| = \max_{\nu \in \mathfrak{N}^0} |\nu|,$$

$$d_j(\mathfrak{N}) := \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{N})} (1/\lambda_j) \quad (j = 1, \dots, n); \quad d(\mathfrak{N}) := \max_{1 \leq j \leq n} d_j(\mathfrak{N}),$$

$\partial \mathfrak{N}$ — множество точек $\nu \in \mathfrak{N}$ для которых существует вектор $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{N})$ такой, что $(\lambda, \nu) = 1$,

$$\kappa_{\mathfrak{R}}(\nu) := \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} (1/(\lambda, \nu)),$$

$\mathfrak{R}^*$ — многогранник Ньютона набора точек $\{(0, \dots, 0, d_j(\mathfrak{R}), 0, \dots, 0) \ (j = 1, \dots, n)\}$.

Легко убедиться, что для любого вполне правильного многогранника $\mathfrak{R}$ 1) многогранник $\mathfrak{R}^*$ является вполне правильным и $\text{card } \Lambda(\mathfrak{R}) = 1$, 2) $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}^*$, 3) $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^*$, тогда и только тогда, когда $\text{card } \Lambda(\mathfrak{R}) = 1$ и 4) $\rho(\mathfrak{R}^*) = d(\mathfrak{R}^*) = d(\mathfrak{R})$.

Из определения числа $\kappa_{\mathfrak{R}}(\nu)$, множества $G(\nu)$ и многогранника $\mathfrak{R}^*$ непосредственно следует

Предложение 1.1. Пусть $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ в.п. многогранник. Тогда

- 1) $\mu/\kappa_{\mathfrak{R}}(\nu) \in \mathfrak{R}$ для любых $\nu \in \partial\mathfrak{R}$ и $\mu \in G(\nu)$
- 2) $\{\nu \in \mathbb{R}_+^n, (\lambda, \nu) \leq 1\} \subset \mathfrak{R}^*$ для любого $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})$.

Через $\mathcal{B}_n$ обозначим множество n -мерных вполне правильных многогранников $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ для которых $d(\mathfrak{R}) < 1$, а для вполне правильного многогранника $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$ положим $h_{\mathfrak{R}}(\xi) := \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi^\nu|$. $h_{\mathfrak{R}}$ —гиперболический многочлен назовем $\mathfrak{R}$ —гиперболическим. При $s > 1$ и $\mathfrak{R} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : |\nu| \leq 1/s\}$ $\mathfrak{R}$ —гиперболический многочлен называется s —гиперболическим (см [8] - [9] и [10]).

Известно 1) (см [2], Следствие 12.5.7), что если многочлен P гиперболичесен по Гордингу относительно вектора η , то для произвольных $f \in C^\infty(H)$ и $\varphi_j \in C^\infty(\partial H)$ $j = 0, \dots, m-1$ решение следующей задачи Коши

$$P(D)u = f; \quad \langle D, \eta \rangle^k u|_{\partial H} = \varphi_j \quad j = 0, \dots, m-1$$

принадлежит $C^\infty(H)$, где $H := \{x \in \mathbb{R}^n, (x, \eta) \geq 0\}$,

2) (см [3] или [4]) Пусть $\mathcal{M} \in \mathcal{B}_{n-1}$ многогранник такой, что $\mathcal{M} \in \{\nu' \in \mathbb{R}^{n-1}, (0, \nu') \in \mathfrak{R}\}$, $G^{\mathcal{M}}$ —мультианизотропное пространство Жевре, $\tilde{\mathcal{M}}$ —многогранник Ньютона набора $\{(0, \nu'), \nu' \in \mathcal{M}^0\} \cup \{(d(\mathcal{M}), 0')\}$, $\mathring{G}^{\mathcal{M}} := G^{\mathcal{M}} \cap C_0^\infty$. Если многочлен P является $\mathfrak{R}$ —гиперболическим относительно вектора $\eta = (1, 0, \dots, 0)$, то для произвольных $\varphi_j \in \mathring{G}^{\mathcal{M}}$ $j = 0, \dots, m-1$ следующая задача Коши

$$P(D)u = 0, x_1 > 0; \quad D_1^j u|_{x_1=0} = \varphi_j \quad j = 0, \dots, m-1$$

имеет единственное решение $u \in G^{\tilde{\mathcal{M}}}$.

Аналогичные результаты для s —гиперболических операторов получены в [8].

Известно, (см., например, [8], [4], [9]), что поведение корня $t = t(\xi)$ гиперболического многочлена $P(\xi + t\eta)$ при возрастании $|\xi|$, непосредственно влияет на корректности постановки задачи Коши в пространствах Жевре. При этом, оказывается, что чем меньше скорость возрастания $t(\xi)$ при возрастании $|\xi|$, тем в

более широких пространствах Жевре задача Коши для соответствующих операторов $P(D)$ поставлена корректно. Подобное явление происходит и при изучении вопроса о существовании фундаментальных решений в функциональных пространствах, порожденных соответствующими пространствами Жевре, т.е. чем меньше скорость возрастания $t(\xi)$ при возрастании $|\xi|$, тем в более гладких по Жевре пространствах для операторов $P(D)$ имеется фундаментальное решение.

В настоящей работе, предполагая определенное априорное поведение корня $t = t(\xi)$ гиперболического многочлена $P(\xi + t\eta)$ при возрастании $|\xi|$, доказывается, что в некоторых случаях эта функция может иметь меньшую скорость возрастания.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОГРАННИКОВ НЬЮТОНА

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$. Тогда для произвольных $\nu \in \partial\mathfrak{R}$ и $\mu \in G(\nu)$ существует вектор $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})$ такой, что

$$\frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1} (\lambda, \nu - \mu) \geq 1, \text{ т.е. } \frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1} (\nu - \mu) \notin \mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}.$$

Доказательство. Из определения множества $\partial\mathfrak{R}$, и в силу условия леммы следует, что существует вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathfrak{R})$ для которого $(\lambda^0, \nu) = 1$. Так как

$$\frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1} = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{1 - (\lambda, \mu)},$$

$$\text{то } \frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1} (\lambda^0, \nu - \mu) = \left[\max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{1 - (\lambda, \mu)} \right] (\lambda^0, \nu - \mu) \geq \frac{(\lambda^0, \nu - \mu)}{1 - (\lambda^0, \mu)} \geq 1. \quad \square$$

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$. Тогда $\frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1} (\nu - \mu) \in \mathfrak{R}^*$ для произвольных $\nu \in \partial\mathfrak{R}$ и $\mu \in G(\nu)$.

Доказательство. В силу пункта 2) Предложения 1.1 достаточно показать, что существует вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathfrak{R})$ такой, что $\frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1} (\lambda^0, \nu - \mu) \leq 1$. Так как $\frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1} = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{1 - (\lambda, \mu)}$, то существует вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathfrak{R})$ для которого $\frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1} = \frac{1}{1 - (\lambda^0, \mu)}$. Отсюда, в силу определения множества $\Lambda(\mathfrak{R})$ имеем

$$\frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1} (\lambda^0, \nu - \mu) = \frac{(\lambda^0, \nu - \mu)}{1 - (\lambda^0, \mu)} \leq 1.$$

□

Лемма 2.3. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$, $1 \leq j \leq n$ и $l(j) := (0, \dots, l_j, 0, \dots, 0)$ вершина $\mathfrak{R}$ лежащая на оси ξ_j . Если $(\lambda, l(1)) = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})$, то $\mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1)\} = \emptyset$.

Доказательство. Пусть, например, $j = 1$. Предположим обратное, что при условиях леммы $\mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1)\} \neq \emptyset$ и $\mu \in \mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1)\}$. Пусть, рады определенности (быть может после перенумерации индексов $j : 2 \leq j \leq n$), $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0)$, $2 \leq r \leq n$, где $\mu_1 \dots \mu_r \neq 0$.

Для натурального числа $k : k \leq n$ и точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ обозначим $\xi^{(k)} := (\xi_1, \dots, \xi_k)$ и пусть $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}_+^r$ М.Н. набора $\{\nu^{(r)} \in R_+^r; \nu = (\nu^{(r)}, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{R}^0\}$. Так как многогранник $\mathfrak{R}$ является вполне правильным, то $\mathfrak{M} = \{\nu^{(r)} \in R_+^r; (\lambda^{(r)}, \nu^{(r)}) \leq 1 \ \forall \lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})\}$.

Так как $\mu^{(r)}$ вершина многогранника $\mathfrak{M}$, то существуют r штук линейно независимых векторов $\{\lambda^{(r)}(j)\}$ ($\lambda(j) \in \Lambda(\mathfrak{R})$ $j = 1, \dots, r$) такие, что $(\lambda^{(r)}(j), \mu^{(r)}) = 1$ ($j = 1, \dots, r$). С другой стороны, в силу условия леммы

$$(\lambda^{(r)}(j), l^{(r)}(1)) = (\lambda(j), l(1)) = 1 \quad (j = 1, \dots, r).$$

Так как множество векторов $\{\lambda^{(r)}(j)\}$ линейно независимы, то отсюда получаем, что $\mu^{(r)} = l^{(r)}(1)$, следовательно (в силу определения $l(1)$ и μ) $\mu = l(1)$, что противоречит условиям $\mu_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, r$, $r \geq 2$) и доказывает лемму. $\square$

Замечание 2.1. Легко убедиться, что для любого вполне правильного многогранника $\mathfrak{R}$ $l(j) = (0, \dots, 0, \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_j}, 0, \dots, 0)$ вершина многогранника $\mathfrak{R}$ лежащая на оси ξ_j ($j = 1, \dots, n$).

Лемма 2.4. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$, $1 \leq j \leq n$ и $l(j) := (0, \dots, l_j, 0, \dots, 0)$ вершина $\mathfrak{R}$ лежащая на оси ξ_j . Тогда $\mathfrak{R}_j^0 \setminus \{l(j)\} \neq \emptyset$ в том и только в том случае, когда $d_j(\mathfrak{R}) > l_j$, или, что то же самое,

$$(2.1) \quad \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_j} < \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_j}.$$

Доказательство. Ради удобства записи, доказательство проведем, например, для $j = 1$.

Достаточность. Пусть, наоборот, $\mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1)\} \neq \emptyset$, но $\min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_1} = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_1}$. Так как $(\lambda^0, l(1)) = 1$ для некоторого $\lambda^0 \in \Lambda(\mathfrak{R})$ и $l(1) = (l_1, 0, \dots, 0)$, то $(\lambda, l(1)) = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})$. Отсюда, в силу Леммы 2.3 получаем, что $\mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1)\} = \emptyset$. Получили противоречие, которое доказывает достаточность.

Необходимость. Пусть выполняется (2.1). Покажем, что $\mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1)\} \neq \emptyset$. Выберем векторы λ^0 и λ^1 из $\Lambda(\mathfrak{R})$ так, чтобы $\lambda_1^0 = \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \lambda_1$ и $\lambda_1^1 = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \lambda_1$. Тогда $(\lambda^0, l(1)) = \lambda_1^0 l_1 < \lambda_1^1 l(1) = (\lambda^1, l(1))$.

Так как λ^0 нормаль к некоторой $(n-1)$ -мерной некоординатной грани $\mathfrak{R}$, то существует вершина $e \in \mathfrak{R}^0$ такая, что $e_1 \neq 0$ и $(\lambda^0, e) = 1$. Так как $(\lambda^0, l(1)) < 1$, то отсюда следует, что $e \neq l(1)$, т.е. $e \notin \mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1)\}$. $\square$

Предложение 2.1. Пусть для $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$ (после возможной перенумерации индексов) существуют номер $r \geq 2$ и вершина $e = (e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{R}^0$, для которых $e_1 \dots e_r \neq 0$. Тогда $d_j(\mathfrak{R}) > l_j$, $j = 1, \dots, r$, где $l(j) := (0, \dots, l_j, 0, \dots, 0)$ вершина $\mathfrak{R}$ лежащая на оси ξ_j , $j = 1, \dots, r$.

Доказательство. Предположим обратное, что, например, $d_1(\mathfrak{R}) = l_1$. В силу Леммы 2.4 имеем $\mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1)\} = \emptyset$. Так как $e \neq l(1)$, то это противоречит условию $e \in \mathfrak{R}^0$ и доказывает предложение. $\square$

Лемма 2.5. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$, $1 \leq j \leq n$ и $l(j) := (0, \dots, l_j, 0, \dots, 0)$ вершина $\mathfrak{R}$ лежащая на оси ξ_j . Если $\mathfrak{R}_j^0 \setminus \{l(j)\} \neq \emptyset$ то существует вершина $e \in \mathfrak{R}_j^0 \setminus \{l(j)\}$ такая, что $e_j \frac{t_j}{(t_j-1)} = d_j(\mathfrak{R}) (= \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_j})$, где $t_j = t_j(e) = \kappa_{\mathfrak{R}}(e_1, \dots, e_{j-1}, 0, e_{j+1}, \dots, e_n)$
 $= \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{(\lambda, e) - (\lambda_j, e_j)}$.

Доказательство. Из условия $\mathfrak{R}_j^0 \setminus \{l(j)\} \neq \emptyset$ настоящей леммы, из Леммы 2.4 и Замечания 2.1 имеем $d_j(\mathfrak{R}) = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_j} > \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_j} = l_j$.

Выберем вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathfrak{R})$ так, чтобы $\frac{1}{\lambda_j^0} = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_j}$. Тогда $d_j(\mathfrak{R}) = \frac{1}{\lambda_j^0}$ и $\frac{1}{\lambda_j^0} > \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_j}$. Так как $l_j < d_j(\mathfrak{R})$, то $(\lambda^0, l(j)) < 1$. С другой стороны, так как λ^0 нормаль к некоторой $(n-1)$ -мерной некоординатной грани $\mathfrak{R}$, то существует вершина $e \in \mathfrak{R}_j^0$ для которой $(\lambda^0, e) = 1$. Следовательно $e \neq l(j)$. Покажем, что

$$(2.2) \quad d_j(\mathfrak{R}) = e_j \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{1 - (\lambda, e) + \lambda_j e_j}.$$

В самом деле, так как $d_j(\mathfrak{R}) = \frac{1}{\lambda_j^0}$, то в силу определения $\Lambda(\mathfrak{R})$ имеем

$$d_j(\mathfrak{R}) = \frac{e_j}{e_j \lambda_j^0} \leq e_j \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{1 - (\lambda, e) + \lambda_j e_j} \leq e_j \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{\lambda_j e_j} = \frac{e_j}{\lambda_j^0 e_j} = d_j(\mathfrak{R}),$$

откуда получаем равенство (2.2).

Так как $\frac{t_j}{(t_j-1)} = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{1 - (\lambda, e) + \lambda_j e_j}$, то из равенства (2.2) непосредственно получаем утверждение леммы. $\square$

Следующее предложение непосредственно получается с применением неравенства Геллера (см. также [6] или [7])

Предложение 2.2. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$ в.п. многогранник, $\mu \in \mathfrak{R}$, и функция $h_{\mathfrak{R}}(\xi) := \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi^\nu|$ определяется как выше. Тогда $|\xi^\mu| \leq c h_{\mathfrak{R}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ с некоторой постоянной $c > 0$.

Теорема 2.1. Для произвольного $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$ существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) \leq c_1 [h_{\mathfrak{R}}(\xi) + h_{\mathfrak{R}^*}(\eta)] \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Так как $\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu) > 1$ для любых $\mu \in G(\nu)$ и $\nu \in \mathfrak{R}^0$, то в силу неравенства Гёльдера имеем с некоторой постоянной $c_2 > 0$ для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |(\xi + \eta)^\nu| &= \prod_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^{\nu_j} \leq c_2 \prod_{j=1}^n (|\xi_j|^{\nu_j} + |\eta_j|^{\nu_j}) \\ &\leq c_2 [|\xi|^\nu + |\eta|^\nu] + \sum_{\mu \in G(\nu)} |\xi^\mu| |\eta^{\nu-\mu}| \leq c_2 [(|\xi|^\nu + |\eta|^\nu) \\ &\quad + \sum_{\mu \in G(\nu)} \left[\frac{|\xi^\mu|^{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)} + \frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu) - 1}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)} |\eta^{\nu-\mu}|^{\frac{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)}{\kappa_{\mathfrak{R}}(\mu)-1}} \right]]. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу пункта 1) Предложения 1.1, Леммы 2.2 и Предложения 2.2, с некоторой постоянной $c_3 > 0$ имеем для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$|(\xi + \eta)^\nu| \leq c_3 [h_{\mathfrak{R}}(\xi) + h_{\mathfrak{R}}(\eta) + h_{\mathfrak{R}^*}(\eta)].$$

Так как $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}^*$ то отсюда с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем

$$|(\xi + \eta)^\nu| \leq c_4 [h_{\mathfrak{R}}(\xi) + h_{\mathfrak{R}^*}(\eta)] \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Откуда, в силу определения функции $h_{\mathfrak{R}}$ и конечности множества $\mathfrak{R}^0$, получаем утверждение Теоремы 2.1. $\square$

Теорема 2.2. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$, а вполне правильный многогранник $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^n$ такой, что $\mathfrak{R}^* \not\subset \mathcal{M}$. Тогда

$$\sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}^n} \frac{h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta)}{h_{\mathfrak{R}}(\xi) + h_{\mathcal{M}}(\eta)} = \infty.$$

Доказательство. Исходя из определения многогранника $\mathfrak{R}^*$ и условия $\mathfrak{R}^* \not\subset \mathcal{M}$ теоремы, легко убедиться, что существует индекс $j : 1 \leq j \leq n$ (пусть для определенности $j = 1$) такой, что $l_1(\mathcal{M}) < d_1(\mathfrak{R}^*)$, где $l(1, \mathcal{M}) := (l_1(\mathcal{M}), 0, \dots, 0)$, $d(1, \mathfrak{R}^*) := (d_1(\mathfrak{R}^*), 0, \dots, 0) = (d_1(\mathfrak{R}), 0, \dots, 0)$ вершины лежащие на оси ξ_1 соответственно многогранников $\mathcal{M}$ и $\mathfrak{R}^*$. Так как $d_1(\mathfrak{R}) \geq l_1(\mathfrak{R})$, то возможны следующие два случая: 1) $d_1(\mathfrak{R}) > l_1(\mathfrak{R})$ и 2) $d_1(\mathfrak{R}) = l_1(\mathfrak{R})$.

В случае 1) в силу лемм 2.5 и 2.4 существует вершина $e \in \mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1, \mathfrak{R})\}$ такая, что $e_1 \frac{t_1(e)}{t_1(e)-1} = d_1(\mathfrak{R})$, где $t_1(e) = \kappa_{\mathfrak{R}}(0, e_2, \dots, e_n) = \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \frac{1}{(\lambda, e) - \lambda_1 e_1}$.

Выберем вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathfrak{R})$ так, чтобы $t_1(e) = \frac{1}{(\lambda^0, e) - \lambda_1^0 e_1}$. Тогда в силу Леммы 2.5 (см. доказательство этой леммы) $(\lambda^0, e) = 1$ и $\lambda_1^0 d_1(\mathfrak{R}) = 1$.

Рассмотрим следующие возможные подслучаи случая 1): 1.1) $l_1(1, \mathcal{M}) \geq l_1(\mathfrak{R})$ и 1.2) $l_1(1, \mathcal{M}) < l_1(\mathfrak{R})$.

Так как $\mathfrak{R}$ вполне правильный многогранник, то из условия $e \in \mathfrak{R}_1^0 \setminus \{l(1, \mathfrak{R})\}$ имеем, что $e_1 < l_1(\mathfrak{R})$. Следовательно в подслучае 1.1) $e_1 < l_1(\mathcal{M})$ и

$$\frac{1}{l_1(\mathcal{M})} < \frac{\sum_{j=2}^n \lambda_j^0 e_j}{l_1(\mathcal{M}) - e_1} = \frac{((\lambda^0, e)) - \lambda_1^0 e_1}{l_1(\mathcal{M}) - e_1} = \frac{1 - \lambda_1^0 e_1}{l_1(\mathcal{M}) - e_1}.$$

Пусть $a \in (1/l_1(\mathcal{M}), (1 - \lambda_1^0 e_1)/(l_1(\mathcal{M}) - e_1))$, $\xi^s := (0, s^{\lambda_2^0}, \dots, s^{\lambda_n^0})$, $\eta^s := (s^a, 0, \dots, 0)$ ($s = 1, 2, \dots$). Тогда имеем с некоторой постоянной $c_5 > 0$ при всех $s = 1, 2, \dots$

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi^s + \eta^s) \geq |(\xi^s + \eta^s)^e| = |\eta_1^s|^{e_1} |\xi_2^s|^{e_2} \dots |\xi_n^s|^{e_n} = s^{a e_1 + \sum_{j=2}^n \lambda_j^0 e_j} = s^{a e_1 + 1 - \lambda_1^0 e_1},$$

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) = \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |(\xi^s)^\nu| = \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0, \nu_1 \neq 0} s^{(\lambda^0, \nu)} \leq c_5 s, \quad h_{\mathcal{M}}(\eta^s) = |\eta_1^s|^{l_1(\mathcal{M})} = s^{a l_1(\mathcal{M})}.$$

Так как, по определению числа a , $a e_1 + 1 - \lambda_1^0 e_1 > a l_1(\mathcal{M}) > 1$, то отсюда получаем утверждение теоремы в подслучае 1.1).

В подслучае 1.2) положим $\xi^s = 0$, $\eta^s = (s, 0, \dots, 0)$ $s = 1, 2, \dots$. Тогда $h_{\mathfrak{R}}(\xi^s + \eta^s) = h_{\mathfrak{R}}(\eta^s) = 1 + s^{l_1(\mathfrak{R})}$, $h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) = 1$, $h_{\mathcal{M}}(\eta^s) = 1 + s^{l_1(\mathcal{M})}$ $s = 1, 2, \dots$. Отсюда следует утверждение теоремы и в подслучае 1.2).

Утверждение теоремы в случае 2) доказывается аналогично подслучаю 1.2). Надо только иметь в виду, что, так как в этом случае $l_1(\mathcal{M}) < d_1(\mathfrak{R}) (= l_1(\mathcal{M}))$, то $l_1(\mathcal{M}) < l_1(\mathfrak{R})$. $\square$

Из Теоремы 2.2 непосредственно следует

Следствие 2.1. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$, $l_1 < d_1(\mathfrak{R})$, где $l(1) = (l_1, 0, \dots, 0)$ вершина $\mathfrak{R}$ лежащая на оси ξ_1 . Если $\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{h_{\mathfrak{R}}(\xi + (t, 0, \dots, 0))}{h_{\mathfrak{R}}(\xi) + t^l} < \infty$ для некоторого $l > 0$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, то $l \geq d_1(\mathfrak{R})$.

Теорема 2.3. Пусть $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ вполне правильный многогранник. Функция $h_{\mathfrak{R}}$ является весом гиперболичности тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$ вполне правильный многогранник. Так как $0 \in \mathfrak{R}^0$, то $h_{\mathfrak{R}}(\xi) \geq 1 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Из условия $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$ следует существование постоянной $c_6 > 0$ такой, что $h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) \leq c_6 [h_{\mathfrak{R}}(\xi) + h_{\mathfrak{R}^*}(\eta)] \ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Так как $\rho(\mathfrak{R}^*) = d(\mathfrak{R})$, то отсюда и из Предложения 2.2 получаем, что с некоторой постоянной $c_6' > 0$ справедлива оценка $h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) \leq c_6' [h_{\mathfrak{R}}(\xi) + |\eta|^{d(\mathfrak{R})}] \ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Так как $d(\mathfrak{R}) < 1$ в силу определения $\mathcal{B}_n$, то отсюда непосредственно следует, что функция $h_{\mathfrak{R}}$ является весом гиперболичности.

Необходимость. Пусть функция $h_{\mathfrak{R}}$ является весом гиперболичности, т.е. с некоторыми постоянными $a \in [0, 1)$ и $c_7 > 0$

$$(2.3) \quad h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) \leq c_7 [h_{\mathfrak{R}}(\xi) + |\eta|^a] \ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Покажем, что из оценки (2.3) следует, что $d(\mathfrak{R}) < 1$, т.е. $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$. Предположим обратное, что $d(\mathfrak{R}) \geq 1$. Пусть $\delta > d(\mathfrak{R})$, $\mathcal{M} := \frac{1}{\delta} \mathfrak{R} = \{\mu : \delta \mu \in \mathfrak{R}\}$. Очевидно $d(\mathcal{M}) = d(\mathfrak{R})/\delta < 1$. Следовательно $\mathcal{M} \in \mathcal{B}_n$ и с некоторой постоянной $c_8 > 0$

$$(2.4) \quad c_8^{-1} h_{\mathcal{M}}^{\delta}(\xi) \leq h_{\mathfrak{R}}(\xi) \leq c_8 h_{\mathcal{M}}^{\delta}(\xi) \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи

1) для некоторого индекса $j : 1 \leq j \leq n$ (пусть, ради определенности для $j = 1$) $l_1(\mathcal{M}) < d_1(\mathcal{M})$

2) $l_j(\mathcal{M}) = d_j(\mathcal{M})$ при всех $j : 1 \leq j \leq n$, где $l(j, \mathcal{M}) := (0, \dots, 0, l_j, 0, \dots, 0)$ вершина $\mathcal{M}$, лежащая на оси ξ_j ($j = 1, \dots, n$).

Пусть в случае 1) $l \in (l_1(\mathcal{M}), d_1(\mathcal{M}))$ некоторое число. Согласно Следствия 2.1 для любого $s = 1, 2, \dots$ существует точка $\xi^s \in \mathbb{R}^n$ и число t_s такие, что

$$(2.5) \quad h_{\mathcal{M}}(\xi^s + (t_s, 0, \dots, 0)) \geq s [h_{\mathcal{M}}(\xi^s) + |t_s|^l] \ (s = 1, 2, \dots).$$

Из оценки (2.4), на основании Теоремы 2.1 имеем, что $t_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Тогда из той же оценки (2.4) и левой части оценки (2.3) получаем $c_8^{-1} [s (h_{\mathcal{M}}(\xi^s) + |t_s|^l)]^{\delta} \leq h_{\mathfrak{R}}(\xi^s + (t_s, 0, \dots, 0)) \ s = 1, 2, \dots$. Отсюда, в силу оценки (2.3), с некоторой постоянной $c_9 > 0$ имеем для всех $s = 1, 2, \dots$ $s^{\delta} [h_{\mathcal{M}}^{\delta}(\xi^s) + |t_s|^{l\delta}] \leq c_9 [h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) + |t_s|^a]$. Откуда, в свою очередь, в силу правой части неравенства (2.4), получаем, что

$$(2.6) \quad c_8^{-1} [s^{\delta} h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) + |t_s|^{l\delta}] \leq c_9 [h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) + |t_s|^a] \ s = 1, 2, \dots$$

Из этой оценки следует, что для достаточно больших s $s^\delta |t_s|^{l\delta} \leq c_9 |t_s|^a$ и так как $t_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то отсюда получаем, что $l\delta < a$. Отсюда, в силу произвольности числа $l \in (l_1(\mathcal{M}), d_1(\mathcal{M}))$, получаем, что $\delta d_1(\mathcal{M}) \leq a$, следовательно $d_1(\mathfrak{R}) \leq a$. Так как $a \in [0, 1)$, то этим необходимая часть теоремы в случае 1) доказана.

Рассмотрим случай 2). В этом случае в силу Леммы 2.4 получаем, что множество $\Lambda(\mathfrak{R})$ состоит из одного элемента $\Lambda(\mathfrak{R}) = \{(\frac{1}{d_1(\mathfrak{R})}, \dots, \frac{1}{d_n(\mathfrak{R})})\}$ и поэтому $h_{\mathfrak{R}}(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{d_j(\mathfrak{R})}$. Тогда, применяя оценку (2.3) при $\xi = 0, \eta \in \mathbb{R}^n$, получим

$$1 + \sum_{j=1}^n |\eta_j|^{d_j(\mathfrak{R})} = h_{\mathfrak{R}}(0 + \eta) \leq c_7 [h_{\mathfrak{R}}(0) + |\eta|^a] = c_7 (1 + |\eta|^a) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда непосредственно получаем, что $d(\mathfrak{R}) = \max_{1 \leq j \leq n} d_j(\mathfrak{R}) \leq a$. Так как $a \in [0, 1)$, то это означает, что $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$. Этим часть теоремы, относящейся к необходимости в случае 2) также доказана. Теорема 2.3 доказана. $\square$

Замечание 2.2. Очевидно что, если $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ вполне правильный многогранник, для которого выполняется оценка (2.3), то $a > 0$.

Лемма 2.6. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$, а $l(n) := (0, \dots, 0, l_n)$ вершина $\mathfrak{R}$, лежащая на оси ξ_n . Если $l(n) \geq d(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ многогранник Ньютона набора $\{\nu' := (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}, (\nu', 0) \in \mathfrak{R}^0\}$, то с некоторой постоянной $c_{10} \in (0, 1)$ и для всех $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n), \eta_n \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} c_{10} h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta') &= c_{10} h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) \leq \min_{t \in \mathbb{R}} h_{\mathfrak{R}}(\xi - t \eta) \\ (2.7) \quad &\leq h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) = h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta', 0) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как $\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta = (\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta', 0)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$, то в силу определения многогранника $\mathcal{M}$ имеем $h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) = h_{\mathfrak{R}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta', 0) = h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta') \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, откуда непосредственно получаем правую часть оценки (2.7).

Докажем левую часть оценки (2.7). В силу Теоремы 2.1 с некоторой постоянной $c_{11} > 0$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta') &= h_{\mathcal{M}}(\xi' - t \eta' + (t \eta_n - \xi_n) \frac{\eta'}{\eta_n}) \\ &\leq c_{11} [h_{\mathcal{M}}(\xi' - t \eta') + h_{\mathcal{M}^*}((t \eta_n - \xi_n) \frac{\eta'}{\eta_n})]. \end{aligned}$$

Так как $\rho(\mathcal{M}^*) = d(\mathcal{M})$, то для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$ получаем

$$h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta') \leq c_{11} [h_{\mathcal{M}}(\xi' - t \eta') + |\xi_n - t \eta_n|^{\rho(\mathcal{M}^*)}] = c_{11} [h_{\mathcal{M}}(\xi' - t \eta') + |\xi_n - t \eta_n|^{d(\mathcal{M})}].$$

В силу условия леммы $l_n \geq d(\mathcal{M})$ и $\{(\nu', 0) : \nu' \in \mathcal{M}\} \subset \mathfrak{R}$, поэтому, на основании Предложения 2.2, с некоторой постоянной $c_{12} > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$ отсюда получаем

$$h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta') \leq c_{12} [h_{\mathcal{M}}(\xi' - t \eta') + |\xi_n - t \eta_n|^{l_n}] \leq c_{12} h_{\mathfrak{R}}(\xi - t \eta),$$

откуда, в силу произвольности числа $t \in \mathbb{R}$, получаем левую часть оценки (2.7). Лемма 2.6 доказана. $\square$

Замечание 2.3. Легко убедиться, что для любого $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$, и $\eta \in \mathbb{R}^n$ функция $h_{\mathfrak{R}, \eta} := \min_{t \in \mathbb{R}} h_{\mathfrak{R}}(\xi - t \eta)$ также является весом гиперболичности.

Следствие 2.2. Пусть $0 < l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n < 1$ а $\mathfrak{R}$ многогранник Ньютона набора $\{l(j) := (0, \dots, l_j, 0, \dots, 0)\}_{j=1}^n$. Тогда для любой точки $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\eta_n \neq 0$ с некоторой постоянной $c'_{12} \in (0, 1)$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$c'_{12} [1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta_j|^{l_j}] \leq h_{\mathfrak{R}, \eta}(\xi) \leq [1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta_j|^{l_j}].$$

Доказательство. немедленно следует из Леммы 2.6, так как при условиях следствия $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$. $\square$

Ниже мы будем пользоваться также следующим очевидным предложением

Предложение 2.3. Пусть $a \neq b$ и $\delta > 0$. Тогда с некоторой постоянной $c_{13} > 0$ и при всех $t, \vartheta \in \mathbb{R}$

$$c_{13}^{-1} (|t|^\delta + |\vartheta|^\delta) \leq |t - a \vartheta|^\delta + |t - b \vartheta|^\delta \leq c_{13} (|t|^\delta + |\vartheta|^\delta).$$

Лемма 2.7. Пусть при условиях Леммы 2.6 $\eta^j \in \mathbb{R}^n$, $\eta_n^j \neq 0$ ($j = 1, \dots, n$) линейно независимые векторы. Тогда с некоторой постоянной $c_{14} > 0$ и при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(2.8) \quad c_{14}^{-1} [1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\xi_j|^{l_j} + |\xi_n|^{l_{n-1}}] \leq \sum_{j=1}^n h_{\mathfrak{R}, \eta^j}(\xi) \leq c_{14} [1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\xi_j|^{l_j} + |\xi_n|^{l_{n-1}}].$$

Доказательство. Так как векторы $\{\eta^j\}_{j=1}^n$ линейно независимы, то для любого $k : 1 \leq k \leq n-1$ существуют индексы $j_1, j_2 : j_1 \neq j_2, 1 \leq j_1, j_2 \leq n$ такие,

что $\eta_k^{j_1}/\eta_n^{j_1} \neq \eta_k^{j_2}/\eta_n^{j_2}$, то в силу предложения 2.3 с некоторой постоянной $c_{14} > 0$ имеем

$$\begin{aligned} c_{14}^{-1} (|\xi_k|^{l_k} + |\xi_n|^{l_k}) &\leq |\xi_k - (\eta_k^{j_1}/\eta_n^{j_1}) \xi_n|^{l_k} + |\xi_k - (\eta_k^{j_2}/\eta_n^{j_2}) \xi_n|^{l_k} \\ &\leq c_{14} (|\xi_k|^{l_k} + |\xi_n|^{l_k}) \quad \forall \xi_k, \xi_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Так как $\max_{1 \leq j \leq n-1} l_j = l_{n-1}$, то отсюда непосредственно получается оценка (2.8), что доказывает лемму. $\square$

Лемма 2.8. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\eta_n \neq 0$, а $\tilde{\mathfrak{R}} \subset \mathbb{R}_+^n$ многогранник Ньютона набора $\{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, 0) \in \mathfrak{R}^0\} \cup \{(0', d(\mathcal{M}))\}$, где $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^{n-1}$ многогранник Ньютона набора $\{\nu' = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}, (\nu', 0) \in \mathfrak{R}^0\}$. Тогда с некоторыми положительными постоянными c_{15} и c_{16} выполняются неравенства

$$(2.9) \quad h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) \leq c_{15} h_{\tilde{\mathfrak{R}}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$(2.10) \quad h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) \leq c_{16} h_{\tilde{\mathfrak{R}}, \eta}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Так как $(\xi - (\eta/\eta_n) \xi_n) = (\xi' - (\eta'/\eta_n) \xi_n, 0)$, то в силу Теоремы 2.1 с некоторой постоянной $c'_{15} > 0$ имеем

$$\begin{aligned} h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) &= h_{\mathfrak{R}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta', 0) = h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta') \\ &\leq c_{15} [h_{\mathcal{M}}(\xi') + h_{\mathcal{M}^*}(\frac{\xi_n}{\eta_n} \eta')] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $\rho(\mathcal{M}^*) = d(\mathcal{M})$, то в силу определения многогранника $\tilde{\mathfrak{R}}$ и на основании Предложения 2.2, с некоторой постоянной $c''_{15} > 0$, отсюда получаем

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) \leq c_{16} h_{\mathcal{M}}(\xi') + |\xi_n|^{d(\mathcal{M})} \leq c_{16} h_{\tilde{\mathfrak{R}}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Этим оценка (2.9) доказана. Докажем оценку (2.10).

Так как $(0', d(\mathcal{M}))$ вершина многогранника $\tilde{\mathfrak{R}}$ лежащая на оси ξ_n и, очевидно, что $\tilde{\mathfrak{R}} \in \mathcal{B}_n$, то в силу Леммы 2.6 с некоторой постоянной $c_{17} > 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_{17}^{-1} h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta') \leq h_{\tilde{\mathfrak{R}}, \eta}(\xi) \leq c_{17} h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta').$$

Так как $h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) = h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta')$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, то отсюда непосредственно получаем оценку (2.10). Лемма 2.8 доказана. $\square$

Из Леммы 1 работы [6] следует следующее

Предложение 2.4. Пусть $\mathfrak{R}, \mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^n$ (выпуклые) многогранники. Тогда $\mathfrak{R} \subset \mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда $h_{\mathfrak{R}}(\xi) \leq h_{\mathcal{M}}(\xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 2.9. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathcal{B}_n$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta_n \neq 0$, а $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^{n-1}$ многогранник Ньютона набора $\{\nu' = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}, (\nu', 0) \in \mathfrak{R}^0\}$. Тогда

1) если для вполне правильного многогранника $\tilde{\mathfrak{R}} \subset \mathbb{R}_+^n$ выполняется неравенство (ниже $\mathcal{D} := \{j : 1 \leq j \leq n-1, \eta_j \neq 0\}$)

$$(2.11) \quad h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) \leq c'_{17} h_{\tilde{\mathfrak{R}}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

с некоторой постоянной $c'_{17} > 0$, то

$$\{\nu = (\nu', 0) \in \mathfrak{R}^0\} \cup \{(0', \max_{(\nu', 0) \in \mathfrak{R}^0} \sum_{j \in \mathcal{D}} \nu_j)\} \subset \tilde{\mathfrak{R}}.$$

2) Пусть $\delta \in \mathbb{R}$. Для того, чтобы с некоторой постоянной $c_{18} > 0$ выполнялось неравенство

$$(2.12) \quad h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) \leq c_{18} [h_{\mathcal{M}}(\xi') + |\xi_n|^\delta] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, необходимо и достаточно условие $\delta \geq \max_{j \in \mathcal{D}} d_j(\mathcal{M})$ при $\eta' \neq 0$.

Замечание 2.4. Отметим, что условие леммы означает, что минимальный вполне правильный многогранник $\tilde{\mathfrak{R}}$ для которого выполняется неравенство (2.11) является многогранник Ньютона набора $\{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, 0) \in \mathfrak{R}^0\} \cup \{(0', \max_{j \in \mathcal{D}} d_j(\mathcal{M}))\}$.

Доказательство леммы. Так как, в силу определения многогранника $\mathcal{M}$, $h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) = h_{\mathfrak{R}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta', 0) = h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta')$, то на основании оценки (2.11) имеем

$$(2.11') \quad h_{\mathcal{M}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) \leq c'_{17} h_{\tilde{\mathfrak{R}}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда, в силу Предложения 2.4 и определения функции $h_{\tilde{\mathfrak{R}}}$, получаем, что $\mathcal{M} \subset \{\nu' = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}, (\nu', 0) \in \tilde{\mathfrak{R}}\}$. Следовательно $\{\nu = (\nu', 0) \in \mathcal{M}^0\} \subset \{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, 0) \in \tilde{\mathfrak{R}}\} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$.

Так как $\{\nu = (\nu', 0) \in \mathcal{M}^0\} = \{\nu = (\nu', 0) \in \mathfrak{R}^0\}$, то отсюда получаем, что $\{\nu = (\nu', 0) \in \mathfrak{R}^0\} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$.

Теперь покажем, что $(0', \max_{\nu \in \mathcal{M}^0} \sum_{j \in \mathcal{D}} \nu_j) \in \tilde{\mathfrak{R}}$ при $\eta' \neq 0$. Пусть $\xi_j = 0$ при $j \in \mathcal{D}$, $\xi_j = 1$ при $j \notin \mathcal{D}$ и $\xi_n \in \mathbb{R}^1$. Тогда с некоторыми положительными

постоянными c'_{18} и c_{19} имеем для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{M}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) &= \sum_{\nu' \in \mathcal{M}^0} |\frac{\xi_n}{\eta_n} \eta'|^{\nu'} = \sum_{\nu' \in \mathcal{M}^0} \prod_{j \in \mathcal{D}} |\frac{\xi_n}{\eta_n} \eta_j|^{\nu'_j} \\ &\geq c'_{18} \sum_{\nu' \in \mathcal{M}^0} |\xi_n|^{\sum_{j \in \mathcal{D}} \nu'_j} \geq c_{19} [1 + |\xi_n|^{\max_{\nu' \in \mathcal{M}^0} \sum_{j \in \mathcal{D}} \nu'_j}]. \end{aligned}$$

Так как $\tilde{\mathfrak{R}}$ вполне правильный многогранник, то с некоторой постоянной $c_{20} > 0$ и $\xi_j = 0$ при $j \in \mathcal{D}$, $\xi_j = 1$ при $j \in \mathcal{D}$, $1 \leq j \leq n-1$, и любого $\xi_n \in \mathbb{R}^1$ имеем $h_{\tilde{\mathfrak{R}}}(\xi) \leq c_{20} (1 + |\xi_n|^{\tilde{l}(n)})$, где $\tilde{l}(n) := (0, \dots, 0, \tilde{l}_n)$ вершина $\tilde{\mathfrak{R}}$ лежащая на оси ξ_n .

Из последних двух оценок, в силу неравенства (2.11') получаем, что $\max_{\nu' \in \mathcal{M}^0} (\sum_{j \in \mathcal{D}} \nu'_j) \leq \tilde{l}_n$, следовательно $(0', \max_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \sum_{j \in \mathcal{D}} \nu_j) \in \tilde{\mathfrak{R}}$, что доказывает утверждение пункта 1) леммы.

Достаточность пункта 2). Пусть $\delta \in \mathbb{R}$ любое при $\eta' = 0$ и $\delta \geq \max_{j \in \mathcal{D}} d_j(\mathcal{M})$ при $\eta' \neq 0$. Если $\eta' = 0$, то выполнение оценки (2.12) для любого $\delta \in \mathbb{R}$ непосредственно следует из того, что при для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) = h_{\mathfrak{R}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta') = h_{\mathfrak{R}}(\xi', 0) = h_{\mathcal{M}}(\xi').$$

Пусть $\eta' \neq 0$. Тогда, в силу Теоремы 2.1 и определения многогранника $\mathcal{M}^*$, с некоторой постоянной $c_{21} > 0$ и при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta') &\leq c_{21} [h_{\mathcal{M}}(\xi') + [h_{\mathcal{M}^*}((\eta'/\eta_n) \xi_n)] = c_{21} [h_{\mathcal{M}}(\xi') \\ &+ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} |(\xi_n/\eta_n) \eta_j|^{d_j(\mathcal{M})}] = c_{21} [h_{\mathcal{M}}(\xi') + 1 + \sum_{j \in \mathcal{D}} |(\xi_n/\eta_n) \eta_j|^{d_j(\mathcal{M})}]. \end{aligned}$$

Так как $h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) = h_{\mathcal{M}}(\xi' - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta')$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, то отсюда получаем оценку (2.12) при $\delta \geq \max_{j \in \mathcal{D}} d_j(\mathcal{M})$.

Необходимость пункта 2). Предположим, для определенности, что $\mathcal{D} = \{j\}_{j=1}^r$ $1 \leq r \leq n-1$. Покажем, что при выполнении оценки (2.12) $\delta \geq \max_{j \in \mathcal{D}} d_j(\mathcal{M})$.

Сначала покажем, что $\delta \geq \max_{1 \leq j \leq r} l_j(\mathcal{M})$, где $l(j, \mathcal{M}) := (0, \dots, 0, l_j(\mathcal{M}), 0, \dots, 0)$ вершина $\mathcal{M}$, лежащая на оси ξ_j .

Из оценки (2.12) при $\xi' = 0$, $\xi_n \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{j=1}^r |(\xi_n/\eta_n) \eta_j|^{l_j(\mathcal{M})} &= h_{\mathcal{M}}((\xi_n/\eta_n) \eta') = h_{\mathcal{M}}(\xi' - (\xi_n/\eta_n) \eta') \\ &= h_{\mathfrak{R}}(\xi - \frac{\xi_n}{\eta_n} \eta) \leq c_{18} [h_{\mathcal{M}}(\xi') + |\xi_n|^\delta] = c_{18} [h_{\mathcal{M}}(0') + |\xi_n|^\delta] = c_{18} (1 + |\xi_n|^\delta), \end{aligned}$$

откуда непосредственно получаем, что $\delta \geq \max_{1 \leq j \leq r} l_j(\mathcal{M})$.

Теперь покажем, что $\delta \geq \max_{1 \leq j \leq r} d_j(\mathcal{M})$. Предположим обратное, что $\delta < \max_{1 \leq j \leq r} d_j(\mathcal{M})$. Тогда, по уже доказанной части получим, что

$$(2.13) \quad \max_{1 \leq j \leq r} l_j(\mathcal{M}) \leq \delta < \max_{1 \leq j \leq r} d_j(\mathcal{M}).$$

Пусть, для определенности, $d_1(\mathcal{M}) = \max_{1 \leq j \leq r} d_j(\mathcal{M})$. Так как из (2.13) следует, что $l_1(\mathcal{M}) < d_1(\mathcal{M})$, то проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, проводимым при доказательстве Теоремы 1.2, для $\lambda^{0,1} = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0)$, где $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0, \lambda_n^0) \in \Lambda(\mathbb{R})$, $\lambda_1^0 = \min_{\lambda \in \Lambda(\mathbb{R})} \lambda_1$ получим, что $\lambda_1^0 d_1(\mathcal{M}) = 1$, $\lambda_1^0 l_1(\mathcal{M}) < 1$, $\lambda_j^0 l_j(\mathcal{M}) \leq 1$ ($j = 2, \dots, r$), при этом существует вектор $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathcal{M}_1^0 \setminus \{l(1, \mathcal{M})\}$ такой, что $(\lambda^{0,1}, \mu') = 1$ и $\mu_1 t_1(\mu')/(t_1(\mu') - 1) = d_1(\mathcal{M})$ (определение числа $t_1(\mu)$ см. в Лемме 2.5).

Пусть $l \in (\delta, d_1(\mathcal{M}))$ любое фиксированное число. Отметим, что так как 1) $l - l_1(\mathcal{M}) > \mu_1$, 2) многогранник $\mathcal{M}$ является вполне правильным и 3) $\lambda_1^0 l < \lambda_1^0 d_1(\mathcal{M})$, то $1/l < (1 - \lambda_1^0 \mu_1)/(l - \mu_1)$. Положим $\xi_1^s = 0$, $\xi_j^s = (\text{sgn}(\eta_j/\eta_n)) s^{\lambda_j^0}$ ($j = 2, \dots, r$), $\xi_j^s = s^{\lambda_j^0}$ ($j = r+1, \dots, n-1$), и $\xi_n^s = s^a$ ($s = 1, 2, \dots$), где $a \in (1/l, (1 - \lambda_1^0 \mu_1)/(l - \mu_1))$.

В силу определения последовательности $\{\xi^s\}$ с некоторыми положительными постоянными c_{22}, c_{23} имеем

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{M}}((\xi')^s - (\frac{\xi_n}{\eta_n} \eta')) &\geq 1 + |((\xi')^s - (\frac{\xi_n}{\eta_n} \eta'))^\mu| \\ &= 1 + |\xi_n^s|^{\mu_1} \prod_{j=2}^r |\xi_j^s - (\frac{\xi_n}{\eta_n} \eta')|^{\mu_j} \prod_{j=r+1}^{n-1} |\xi_j^s|^{\mu_j} \\ &\geq c_{22} [1 + |\xi_n^s|^{\mu_1} \prod_{j=2}^r (|\xi_j^s|^{\mu_j} + |\xi_n^s|^{\mu_j}) \prod_{j=r+1}^{n-1} |\xi_j^s|^{\mu_j}] \\ &\geq c_{23} [1 + |\xi_n^s|^{\mu_1} \prod_{j=2}^{n-1} |\xi_j^s|^{\mu_j}] = c_{23} [1 + s^{a \mu_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j^0 \mu_j}] \\ &= c_{23} (1 + s^{a \mu_1 + 1 - \lambda_1^0 \mu_1}) \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (2.12) имеем с некоторой постоянной $c_{24} > 0$ и для всех $s = 1, 2, \dots$

$$1 + s^{a \mu_1 + 1 - \lambda_1^0 \mu_1} \leq c_{24} [h_{\mathcal{M}}((\xi')^s) + |\xi_n^s|^\delta].$$

Так как $((\lambda^0)', \nu') \leq 1$ для любого $\nu' \in \mathcal{M}$, то отсюда и из определения последовательности $\{\xi^s\}$, с некоторой постоянной $c_{25} > 0$ получаем

$$1 + s^{a \mu_1 + 1 - \lambda_1^0 \mu_1} \leq c_{25} (1 + s + s^{a \delta}) \quad s = 1, 2, \dots$$

Полученное неравенство противоречит тому, что из условий $l \in (\delta, d_1(\mathcal{M}))$, $a \in (1/l, (1 - \lambda_1^0 \mu_1)/(l - \mu_1))$ следует, что $a \mu_1 + 1 - \lambda_1^0 \mu_1 > a \delta > 1$. Таким образом необходимость пункта 2) леммы и, тем самым, Лемма 2.9 доказаны. $\square$

Ниже мы будем рассматривать случай $n = 3$. Дело в том, что в трехмерном случае многогранник $\tilde{\mathfrak{R}}$ имеет удобный для изучения структуру. Именно, известно, что в двумерном случае $\mathfrak{R}$ — гиперболический многочлен является s —гиперболическим, а в трехмерном случае, если $l^1 = (l_1, 0, 0)$, $l^2 = (0, l_2, 0)$, $l^3 = (0, 0, l_3)$, вершины многогранника $\tilde{\mathfrak{R}}$, при этом $l_1 = l_3$, то $\mathfrak{R}$ — гиперболический многочлен является s —гиперболическим при $s = 1/l_3$ (см. [14]).

Лемма 2.10. Пусть $\mathcal{M} \in \mathcal{B}_2$, $l_3 \in (0, 1)$, $\mathfrak{R}$ — многогранник Ньютона набора $\{(\nu, 0), \nu \in \mathcal{M}^0\} \cup \{(0, 0, l_3)\}$, $l(1) := (l_1, 0)$ и $l(2) := (0, l_2)$ ($l_1 \leq l_2$) вершины многогранника $\mathcal{M}$, лежащие на координатных осях ξ_1 и ξ_2 соответственно. Тогда

1) если $l_3 \leq l_2$, то для любой точки $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$; ($\eta_2 \neq 0$) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} c_{26}^{-1} [1 + |\xi_1 - (\eta_1/\eta_2) \xi_2|^{l_1} + |\xi_3 - (\eta_3/\eta_2) \xi_2|^{l_3}] &\leq h_{\mathfrak{R}, \eta}(\xi) \\ &\leq c_{26} [1 + |\xi_1 - (\eta_1/\eta_2) \xi_2|^{l_1} + |\xi_3 - (\eta_3/\eta_2) \xi_2|^{l_3}] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $c_{26} > 0$

2) если $\eta^j = (\eta_1^j, \eta_2^j, \eta_3^j)$, $\eta_2^j \neq 0$ ($j = 1, 2, 3$) линейно независимые векторы, то для всех $\xi \in \mathbb{R}^3$ справедливо неравенство

$$c_{27}^{-1} [1 + |\xi_1|^{l_1} + |\xi_2|^{l_3} + |\xi_3|^{l_3}] \leq \sum_{j=1}^3 h_{\mathfrak{R}, \eta^j}(\xi) \leq c_{27} [1 + |\xi_1|^{l_1} + |\xi_2|^{l_3} + |\xi_3|^{l_3}]$$

с некоторой постоянной $c_{27} > 0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathcal{M}} := \{\nu = (\nu_1, \nu_3) \in \mathbb{R}_+^2, (\nu_1, 0, \nu_3) \in \mathfrak{R}\}$. Очевидно $\tilde{\mathcal{M}}$ является многогранником Ньютона набора $\{(l_1, 0), (0, l_3)\}$. Так как $d(\tilde{\mathcal{M}}) = \max\{l_1, l_3\} = \rho(\tilde{\mathcal{M}})$, то в силу условия леммы $l_2 \geq d(\tilde{\mathcal{M}})$. Следовательно, в силу Леммы 2.6, с некоторой постоянной $c_{28} \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} c_{28} h_{\tilde{\mathcal{M}}}(\xi_1 - (\eta_1/\eta_2) \xi_2, \xi_3 - (\eta_3/\eta_2) \xi_2) &\leq h_{\mathfrak{R}, \eta}(\xi) \\ &\leq h_{\tilde{\mathcal{M}}}(\xi_1 - (\eta_1/\eta_2) \xi_2, \xi_3 - (\eta_3/\eta_2) \xi_2) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу определения многогранника $\tilde{\mathcal{M}}$, непосредственно получаем утверждение первого пункта леммы.

Доказательство второго пункта проводится аналогично доказательству Леммы 2.7 с применением первого пункта настоящей леммы. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 3.1. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $1 < \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$, $\mathfrak{R} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n, (\lambda, \nu) \leq 1\}$ и $\mathcal{M} := \{\nu \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \nu_j + \lambda_n \nu_n \leq 1\}$ и многочлен P $\mathfrak{R}$ -гиперболичен относительно вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\eta_n \neq 0$, то P также $\mathcal{M}$ -гиперболичен относительно η .

Доказательство. Из определения $\mathfrak{R}$ -гиперболичности P следует, что $P_m(\eta) \neq 0$ и существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что

$$(3.1) \quad P(\xi + i\eta) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{C}, |Re\tau| \geq c_1 h_{\mathfrak{R}}(\xi),$$

где $h_{\mathfrak{R}}(\xi) := 1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{1/\lambda_j}$.

В силу Теоремы 2.2 работы [14] соотношение (3.1) эквивалентно следующему: существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что

$$(3.2) \quad P(\xi + i\tau\eta) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{C}, |Re\tau| \geq c_2 h_{\mathfrak{R},\eta}(\xi),$$

где $h_{\mathfrak{R},\eta}(\xi) := \inf_{t \in \mathbb{R}} h_{\mathfrak{R}}(\xi - t\eta)$. Так как в силу Леммы 2.7 $h_{\mathfrak{R},\eta}(\xi) \leq c_3 h_{\mathcal{M}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ с некоторой постоянной $c_3 > 0$, то отсюда и из неравенства (3.2) имеем с некоторой постоянной $c_4 > 0$,

$$(3.3) \quad P(\xi + i\tau\eta) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{C}, |Re\tau| \geq c_4 h_{\mathcal{M}}(\xi).$$

Так как $P_m(\eta) \neq 0$, то из соотношения (1.3) получаем, что P $\mathcal{M}$ -гиперболичен относительно вектора η . Теорема 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.2. Пусть однородный многочлен P_m гиперболичен относительно вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\eta_n \neq 0$ и $Q \prec^{h_{\mathfrak{R},\eta}} P_m$, $\text{ord } Q < m$, где $\mathfrak{R}$ многогранник из Теоремы 3.1. Тогда существует окрестность $U(\eta)$ точки η такая, что многочлен $P_m + Q$ $\mathcal{M}$ -гиперболичен относительно любого вектора из $U(\eta)$.

Доказательство. Так как в силу Леммы 2.7, $h_{\mathfrak{R},\eta}(\xi) \leq c_3 h_{\mathcal{M}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, то в силу Леммы 3.1 работы [13] $Q \prec^{h_{\mathcal{M}}} P_m$. С другой стороны, так как многочлен P_m гиперболичен относительно любого вектора из некоторой окрестности $U(\eta)$ точки η (см. [2], Теорема 12.4.4), то отсюда в силу Теоремы 3.3 работы [13] получаем, что $P_m + Q$ $\mathcal{M}$ -гиперболичен относительно любого вектора из $U(\eta)$, что доказывает теорему. $\square$

Теорема 3.3. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathbb{B}_n$, $\mathcal{M} := \{\nu' = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}, (\nu', 0) \in \mathfrak{R}\}$ и $l_n \geq d(\mathcal{M})$, где $l(n) := (0, \dots, 0, l_n)$ вершина $\mathfrak{R}$, лежащая на оси ξ_n . Если многочлен P $\mathfrak{R}$ -гиперболичен относительно вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\eta_n \neq 0$, то P также $\tilde{\mathfrak{R}}$ -гиперболичен относительно того же вектора η , где $\tilde{\mathfrak{R}}$ -многогранник Ньютона набора $\{(\nu', 0) : \nu' \in \mathcal{M}\} \cup \{0, d(\mathbb{M})\}$.

Доказательство. Так как, при условиях теоремы, в силу Леммы 2.8 $h_{\mathfrak{R}, \eta}(\xi) \leq c_5 h_{\tilde{\mathfrak{R}}} \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ с некоторой постоянной $c_5 > 0$, то доказательство теоремы проводится буквальным повторением доказательства теоремы 3.1. $\square$

Теорема 3.4. Пусть $\mathfrak{R} \in \mathbb{B}_2$, $l_3 \in (0, 1)$, $\mathfrak{R}$ многогранник Ньютона набора $\{(\nu, 0) : \nu \in \mathcal{M}^0\} \cup \{(0, 0, l_3)\}$, $l(1) = (l_1, 0)$, $l(2) = (0, l_2)$ вершины многогранника $\mathcal{M}$, лежащие на осях ξ_1 и ξ_2 соответственно, $l_3 \leq l_2$. Если многочлен P $\mathfrak{R}$ -гиперболичен относительно вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $\eta_2 \neq 0$, то P также $\tilde{\mathfrak{R}} := \{\nu : \frac{\nu_1}{l_1} + \frac{\nu_2}{l_3} + \frac{\nu_3}{l_3} \leq 1\}$ -гиперболичен относительно того же вектора η .

Доказательство. Так как при условиях теоремы, в силу Леммы 2.10 $h_{\mathfrak{R}, \eta}(\xi) \leq c_6 h_{\tilde{\mathfrak{R}}} \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ с некоторой постоянной $c_6 > 0$, то доказательство теоремы проводится буквальным повторением доказательства теоремы 3.1. $\square$

Теорема 3.5. Пусть, при условиях Теоремы 3.4, однородный многочлен P_m гиперболичен относительно вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $\eta_2 \neq 0$ и $Q \prec^{h_{\mathfrak{R}, \eta}} P_m$, $\text{ord } Q < m$. Тогда существует окрестность $U(\eta)$ точки η такая, что многочлен $P_m + Q$ $h_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ -гиперболичен относительно любого вектора из $U(\eta)$.

Доказательство. проводится буквальным повторением доказательства теоремы 3.2, лишь с той разницей, что вместо Леммы 2.7, здесь надо пользоваться Леммой 2.10. $\square$

Abstract. It is proved that if $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $1 < \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$, $\mathfrak{R} := \{\nu \in \mathbb{R}_+^n, (\lambda, \nu) \leq 1\}$, $\mathcal{M} := \{\nu \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \nu_j + \lambda_{n-1} \nu_n \leq 1\}$ and the polynomial $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ is η -hyperbolic with respect to the vector $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\eta_n \neq 0$, then it is also $\mathcal{M}$ -hyperbolic and $\tilde{\mathfrak{R}}$ -hyperbolic with respect to η .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Gårding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math., **85**, 1 – 62 (1951).
- [2] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, **2**, Springer-Verlag (1983).

- [3] D. Calvo, A Morando, Multianisotropic Gevrey Classes and Ultradistributions, Univ. di Torino, quaderno, no. 41 (2002).
- [4] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, “О задаче Коши в мультианизотропных классах Жевре для гиперболических с весом уравнений”. Изв. НАН Армении, серия математика, **50**, no.3, 36 – 46 (2015).
- [5] A. G. Khovanskii, “Newton Polyhedra (algebra and geometry)”, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **153**, 1 – 15 (1992).
- [6] В. П. Михайлов, “О поведении на бесконечности одного класса многочленов”, Труды МИАН СССР, **19**, 59 – 81 (1967).
- [7] S. Gindikin, L. Volevich, The Method of Newtons Polyhedron on the Theory of PDF, Kluwer (1992).
- [8] E. Larsson, “Generalized hyperbolicity”, Arkhiv for Math., Band 7, no. 2, 11 – 32 (1966).
- [9] L. Rodino, Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces, Word Scientific, Singapore (1993).
- [10] D. Calvo, “Multianisotropic Gevrey classes and Cauchy problem”, Ph.D. Thesis in math. universita degli studi di Pisa (1993).
- [11] V. N. Margaryan, H. G. Ghazaryan, “On fundamental solutions of a class of weak hyperbolic operators”, Eurasian Math. Journal, **9**, no. 2, 54 – 67, (2018).
- [12] H. G. Ghazaryan and V. N. Margaryan, “Addition of lower order terms to weakly hyperbolic operators with preservation of there type of hyperbolicity”, Lobachevsky Journal of Math., **40**, no. 8, 1069 – 1078 (2019).
- [13] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, “Об одном классе слабо гиперболических операторов”, Изв. НАН Армении, серия математика, **53**, no. 6, 53 – 69 (2018).
- [14] H. G. Ghazaryan and V. N. Margaryan, “Hyperbolicity with weight of polynomials in terms of comparing thear power”, Eurasian Mathematical Journal, **11**, no.2, 40 – 51, (2020).

Поступила 06 февраля 2021

После доработки 06 февраля 2021

Принята к публикации 17 июня 2021