

## ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВЫХОДЯЩЕГО РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ: МОДЕЛЬНЫЕ ПРОФИЛИ

В.М.ЛОСКУТОВ

Поступила 8 апреля 2011

Принята к печати 25 мая 2011

Изучена предельная поляризация резонансной линии в стандартной задаче о переносе поляризованного излучения в рассеивающей полубесконечной атмосфере при полном перераспределении по частоте. Рассмотрены два семейства профилей коэффициента поглощения в линии, являющихся обобщениями лоренцовского и доплеровского. Показано, что для обоих семейств указанная величина приближается к пределу Соболева-Чандрасекара, когда доля поглощения в частотном интервале (выраженном в соответствующих ширинах) от  $-1$  до  $1$  относительно полного поглощения в линии стремится к единице.

Ключевые слова: *перенос излучения; поляризация; спектральные линии*

1. *Введение.* Влияние свойств профиля коэффициента поглощения на степень поляризации в резонансных линиях представляет большой интерес для интерпретации второго спектра Солнца. Следует иметь в виду, что при анализе результатов наблюдений требуется детальное рассмотрение многих факторов, которые влияют на процесс формирования линий. Зачастую пытаются учесть многие из этих факторов и построением большой сетки моделей выявить влияние тех или других из них. Можно пойти несколько иначе и выяснить, как те или иные предположения сказываются на наблюдаемых свойствах линий в рамках простых моделей. Мы изучим, как меняются поляризационные свойства линии, формирующейся в рассеивающей атмосфере для разных, чисто модельных, профилей коэффициента поглощения. В частности, рассмотрим вопрос о переходе к прямоугольному профилю.

Аналитическая теория образования поляризованных линий в полубесконечных атмосферах за счет многократного резонансного рассеяния при полном перераспределении по частотам внутри линии (ППЧ) была разработана в статьях [1,2]. Эта теория применима для произвольного коэффициента поглощения. В этих статьях был подробно рассмотрен случай доплеровского профиля. В дальнейшем теория была применена к лоренцовскому [3] и фойгтовскому [4] профилям.

В настоящей статье мы вычислили поляризационные характеристики излучения, выходящего из полубесконечной атмосферы с равномерным распределением источников, дающих неполяризованное излучение, для

нескольких модельных профилей, не относящихся к какому-либо конкретному физическому механизму уширения линий, но отражающих возможные вариации профиля. Проведено сравнение с результатами вычислений для стандартных профилей: доплеровского [2], лоренцовского [3] и фойгтовского [4]. Основное внимание уделялось поведению предельной степени поляризации на краю диска, поскольку именно она достигает наибольших значений в рассматриваемой модели.

2. *Основные формулы.* Мы следуем общей аналитической теории, построенной в [1,2], где можно найти подробности. Здесь приводятся только основные формулы.

При предположении о ППЧ матричная функция перераспределения  $R(x, \mu; x', \mu')$ , описывающая преобразование параметров Стокса  $I, Q$  (из-за симметрии задачи можно рассматривать только две величины) в элементарном акте рассеяния и отнесенная к системе координат, связанной с нормалью к атмосфере, представлена в виде

$$R(x, \mu; x', \mu') = \phi(x)\phi(x')P(\mu, \mu'). \quad (1)$$

Здесь  $x$  - безразмерная частота, отсчитанная от центра линии и измеренная в подходящих характерных ширинах, а  $\mu$  - косинус зенитного угла (для рассеянного излучения - без штрихов, для падающего - со штрихами). Функция  $\phi(x)$  - профиль коэффициента поглощения. Он нормирован следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1. \quad (2)$$

Матрица  $P$  - не зависящая от азимута компонента фазовой матрицы. Она может быть факторизована

$$P(\mu, \mu') = A(\mu)A(\mu'), \quad (3)$$

где

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{W}{8}}(1-3\mu^2) \\ 0 & \sqrt{\frac{W}{8}}3(1-\mu^2) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Величина  $W$  - коэффициент деполаризации, определяемый квантовыми числами нижнего и верхнего уровней, при переходах между которыми возникает линия ( $0 < W < 1$ ). При  $W = 1$  мы имеем дипольное рассеяние, когда поляризационные эффекты максимальны.

Вектор Стокса для выходящего излучения  $\mathbf{i} = (I, Q)^T$  выражается через матрицу  $I(z)$  - обобщение  $H$ -функции Амбарцумяна-Чандрасекара

$$\mathbf{i}(\mu, x) = A(\mu)I(z)\mathbf{e}, \quad \mu > 0, \quad (5)$$

где  $z = \mu/\phi(x)$ , а вектор  $\mathbf{e}$  описывает поляризацию первичных источников.

Если их излучение неполяризовано, то  $\mathbf{e} = (1, 0)^T$ . Матрица  $\mathbf{I}(z)$  удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$\mathbf{I}(z) \left( \varepsilon^{1/2} + \frac{\lambda_I}{2} \int_0^\infty \mathbf{I}^T(z') \mathbf{G}(z') \frac{z' dz'}{z+z'} \right) = \mathbf{E}. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  - единичная матрица,

$$\varepsilon^{1/2} = \text{diag}(\varepsilon_I^{1/2}, \varepsilon_Q^{1/2}), \quad (7)$$

где  $\varepsilon_I = 1 - \lambda_I$ ,  $\varepsilon_Q = 1 - \lambda_Q$ , а  $\lambda_I$  - обычное альbedo однократного рассеяния и  $\lambda_Q = (7/10)\lambda_I W$ . Наконец, матрица  $\mathbf{G}(z)$  выражается через характеристическую матрицу  $\Psi(\mu) = \mathbf{A}^T(\mu)\mathbf{A}(\mu)$  следующим образом:

$$\mathbf{G}(z) = 2 \int_{x(z)}^\infty \phi^2(y) \Psi(z \phi(y)) dy, \quad (8)$$

а функция  $x(z)$  определяется равенствами

$$\begin{aligned} x(z) &= 0, & |z| \leq z_0, \\ \phi(x(z)) &= 1/|z|, & |z| > z_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где для краткости мы обозначили через  $z_0$  величину  $1/\phi(0)$ .

Как легко видеть, основными параметрами задачи являются  $\lambda_I$ ,  $W$  и функция  $\phi(x)$ . Последовательность действий при нахождении поляризации выходящего излучения состоит в вычислении матрицы  $\mathbf{G}$  по формулам (8), (9) и последующего решения уравнения (6). Знание матрицы  $\mathbf{I}(z)$  позволяет определить вектор Стокса выходящего излучения  $\mathbf{i}(\mu, x)$  для разных частот внутри линии и в разных направлениях относительно нормали к атмосфере, а именно (для рассматриваемого случая неполяризованных источников первичного излучения):

$$\begin{aligned} I(\mu, x) &= I_{11} \left( \frac{\mu}{\phi(x)} \right) + \sqrt{\frac{W}{8}} (1 - 3\mu^2) I_{21} \left( \frac{\mu}{\phi(x)} \right), \\ Q(\mu, x) &= \sqrt{\frac{W}{8}} 3(1 - \mu^2) I_{21} \left( \frac{\mu}{\phi(x)} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

3. *Основные формулы.* Рассмотрим два простых семейства профилей: "квазидоплеровское" - профили пропорциональны  $\exp(-x^{2s})$  и "квазиленцеровское" - профили пропорциональны  $1/(1+x^{2s})$ , где  $s$  - параметр. Они выбраны потому, что имеют некоторый физический смысл и позволяют выразить элементы матрицы  $\mathbf{G}(z)$  через элементарные функции или неполную гамма-функцию, для вычисления которых существуют высокоточные алгоритмы. При малых или больших значениях аргументов использовались разложения в степенные ряды. Это позволяет сосредоточиться только на решении интегрального уравнения (6). Интеграл от 0 до  $\infty$  разбивался на три интеграла: от 0 до  $z_0$ , от  $z_0$  до  $2z_0$  и от  $2z_0$  до  $\infty$ . Первый из этих интегралов сводился к интегралу от 0 до 1 и для него использовалась

квадратура Гаусса. Второй интеграл путем подстановки

$$z = z_0(1 + e^{-t})$$

приводился к интегралу от 0 до  $\infty$ , который вычислялся при помощи квадратурной формулы Лагерра. Наконец, для третьего интеграла использовались два варианта: либо при помощи подстановки

$$z = z_0(1 + e^{pt})$$

и подходящим выбором величины  $p$  он приводился к интегралу от 0 до  $\infty$  с весовым множителем  $\exp(-t)$ , который вычислялся при помощи квадратуры Лагерра, либо заменой

$$z = z_0\left(1 + \frac{1}{t^p}\right)$$

он сводился к интегралу от 0 до 1, для вычисления которого использовалась квадратура Гаусса. В обоих вариантах учитывалось поведение элементов матрицы  $G(z)$  для  $z \gg z_0$ .

4. *Основные результаты.* Как отмечалось выше, для нас наибольший интерес представляет предельная степень поляризации  $p$  на краю диска при консервативном дипольном рассеянии, когда она достигает наибольших значений. Из формул (10) следует, что

$$p = \frac{Q}{I} = \frac{3 I_{21}(0)}{\sqrt{8} I_{11}(0) + I_{21}(0)}. \quad (11)$$

Первый результат содержится в табл.1, где приводится указанная величина для ряда значений параметра  $s$ .

Таблица 1

СТЕПЕНЬ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВЫХОДЯЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА  
КРАЮ ДИСКА ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНОГО ДИПОЛЬНОГО ( $W=1$ )  
РАССЕЯНИЯ (В ПРОЦЕНТАХ)

Квазидоплеровское		Квазилоренцовское	
$s$	$p$	$s$	$p$
1/3	7.781	2/3	2.889
2/3	8.872	4/5	4.185
1	9.443	1	5.421
2	10.252	2	7.921
3	10.617	3	8.865
4	10.829	4	9.392
5	10.970	5	9.736

В случае доплеровского профиля  $p=9.443\%$  [1], а лоренцовского -  $5.421\%$  [2] (для обоих параметр  $s=1$ ). При фойгтовском профиле значения  $p$  меняются между этими пределами при изменении фойгтовского параметра

от нуля до бесконечности [4]. Классический предел Соболева-Чандрасекара (монохроматическое рассеяние, прямоугольный профиль) равен 11.713%.

Как видно, изменение предельной поляризации  $p$  с параметром  $s$  довольно сильное. Для обоих семейств ее значения при определенных  $s$  могут быть близки друг к другу. Это обстоятельство следует учитывать при сравнении наблюдений и теории.

Согласно общей теории переноса излучения в спектральной линии при ППЧ (см. [5,6]), свойства поля излучения во многом определяются так называемым характеристическим показателем  $\gamma$ , описывающим поведение профиля коэффициента поглощения в крыльях линии. Для линий со степенным убыванием последнего этот показатель изменяется от 0 до  $1/2$ , для профилей, убывающих быстрее степенного (в частности, доплеровского), он равен  $1/2$ , а для прямоугольного - 1. Отсюда ясно, что этот показатель может быть использован только для квазилоренцовского семейства, для которого он связан с параметром  $s$  соотношением

$$\gamma = \frac{2s-1}{4s}, \quad s \geq 1/2. \quad (12)$$

На рис.1 представлено изменение предельной поляризации  $p$  с  $\gamma$  для этого семейства.

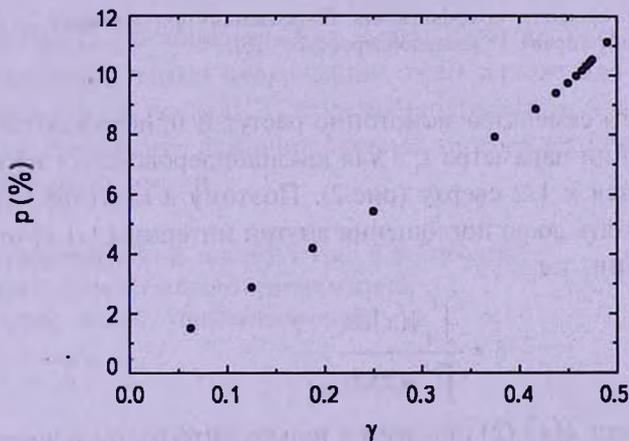


Рис.1. Изменение степени поляризации на краю диска для "квилоренцовского" семейства в зависимости от параметра  $\gamma$ .

Хотелось бы найти такую величину, которая, хотя бы и приближенно, могла бы быть использована для обоих семейств и связывала бы их с прямоугольным профилем. Как видно из табл.1, для наших целей нужно рассматривать профили с  $s$ , большими 1.

Рассмотрение поведения  $\phi(x)$  при  $x$ , меньших 2, показало, что для обоих семейств профили испытывают вблизи  $x=1$  быстрое убывание с ростом  $x$  и пересекаются между собой (см. рис.2).

Заметим, что при прямоугольном профиле  $\phi(x) = 1/2$  для  $-1 \leq x \leq 1$  и  $\phi(x) = 0$  вне этого интервала. Значения  $\phi(x)$  вблизи центра линии для

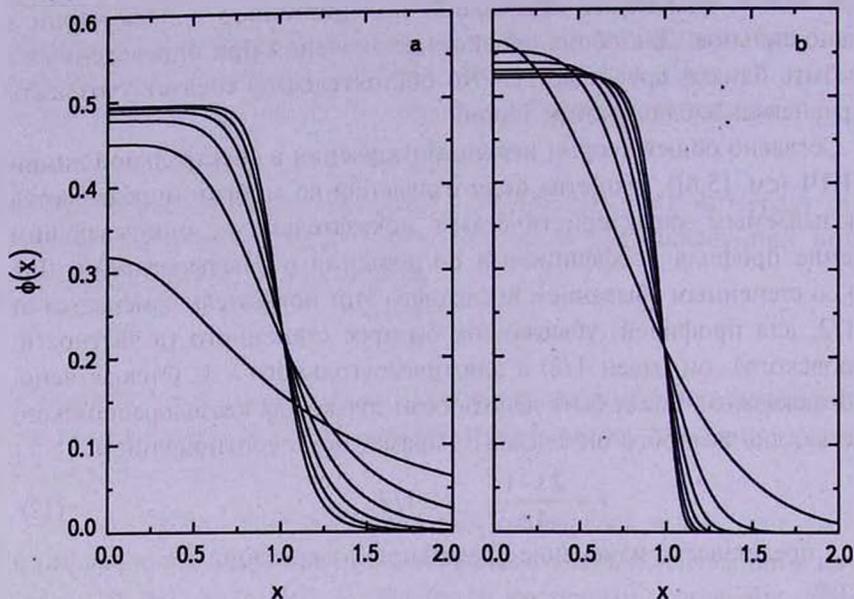


Рис.2. Поведение профиля коэффициента поглощения при больших  $s$ . Слева - "квазилоренцовское" (а), справа - "квазидоплеровское" (б).

квазилоренцовского семейства монотонно растут и приближаются к  $1/2$  снизу при увеличении параметра  $s$ , а для квазидоплеровского - наоборот, убывают и стремятся к  $1/2$  сверху (рис.2). Поэтому в качестве искомой величины можно взять долю поглощения внутри интервала  $[-1,1]$  от всего поглощения в линии, т.е.

$$\delta = \frac{\int_{-1}^1 \phi(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx}. \quad (13)$$

С учетом нормировки  $\phi(x)$  (2) она дается только интегралом в числителе. В случае квазидоплеровских профилей  $\delta$  просто выражается через гамма-функцию

$$\delta = 1 - \frac{\Gamma(1/2s, 1)}{\Gamma(1/2s)}, \quad (14)$$

где в числителе дроби стоит неполная гамма-функция, а в знаменателе - полная.

На рис.3 представлено изменение предельной степени поляризации для целых значений параметра  $s$  больших 1 (вплоть до 30), при которых близко к 1. Последнее значение отвечает прямоугольному профилю

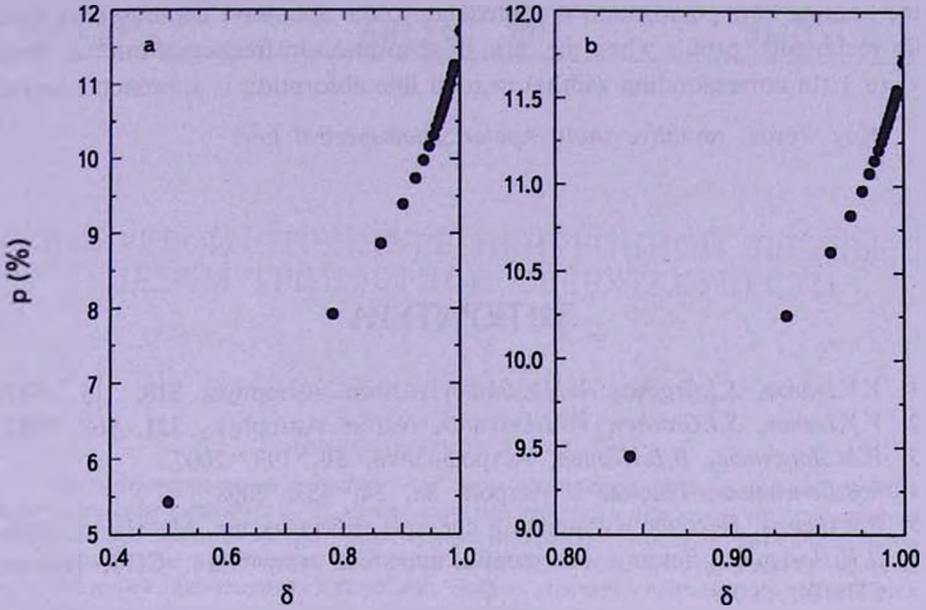


Рис.3. Изменение предельной степени поляризации в функции параметра  $\delta$  при больших  $s$ . Слева - "квазилоренцовское" (а), справа - "квазидоплеровское" (b).

коэффициента поглощения. Как видно из этого рисунка, при близких к 1, поведение степени поляризации очень похоже для обоих семейств и приближается к пределу Соболева-Чандрасекара для прямоугольного профиля. Небольшое различие остается и отражает поведение профилей в самом центре линии.

Астрономический институт им. В.В.Соболева  
 Санкт-Петербургского университета,  
 Россия, e-mail: vml@astro.spbu.ru

## POLARIZED LINE FORMATION BY RESONANCE SCATTERING: THE MODEL PROFILES

V.M.LOSKUTOV

The limiting limb polarization in a spectral line for the standard problem of polarized radiative transfer with complete frequency redistribution is calculated. Two families of profile of line absorption coefficient which generalize the Lorentz and Doppler profiles are considered. It is found that for both families

the limiting limb polarization is approaches to the Sobolev-Chandrasekhar limit for rectangular profile when the ratio of absorption in frequency interval from  $-1$  to  $1$  (in corresponding widths) to total line absorption is approaches unity.

**Key words:** *radiative transfer:polarization:spectral lines*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *V.V.Ivanov, S.I.Grachev, V.M.Loskutov*, *Astron. Astrophys.*, **318**, 315, 1997.
2. *V.V.Ivanov, S.I.Grachev, V.M.Loskutov*, *Astron. Astrophys.*, **321**, 968, 1997.
3. *В.М.Лоскутов, В.В.Иванов*, *Астрофизика*, **50**, 199, 2007.
4. *А.В.Дементьев*, *Письма в Астрон. ж.*, **34**, 633, 2008.
5. *В.В.Иванов*, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, М., Наука, 1969.
6. *Д.И.Нагирнер*, *Лекции по теории переноса излучения*, СПб, Изд-во СПбГУ, 2001.