УДК 539.12

РАСЧЕТЫ ПОПРАВОК КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Γ . Γ . АСАТРЯ H^{1*} , Γ .М. АСАТРЯ H^2

¹Ереванский государственный университет, Ереван, Армения ²Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван, Армения

*e-mail: hrachasatryan48@gmail.com

(Поступила в редакцию 12 апреля 2021 г.)

Наша статья посвящена вычислению двух трехпетлевых диаграмм, которые вносят вклад в распад $b \rightarrow s\gamma$ на уровне α_s^2 . Мы используем дифференциальные уравнения для мастер интегралов (МИ), чтобы вычислить эти диаграммы для произвольной массы с-кварка. Использование программы Canonica позволяет получить дифференциальные уравнения в каноническом базисе. С помощью этого, можно решить дифференциальные уравнения и получить выражения для МИ в терминах функций GPL. Мы надеемся, что тот же метод можно использовать для других трехпетлевых диаграмм, которые вносят вклад в распад $b \rightarrow s\gamma$ в порядке α_s^2 .

1. Введение

Редкие распады В-мезонов находятся в центре внимания физиков, поскольку они обеспечивают потенциальные тесты стандартной модели для высоких энергий (см. например, работы [1, 2, 3, 4, 5]). В работах [1,2] впервые были получены результаты порядка α_s^2 для распада $b \to s\gamma$, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако, часть вклада порядка α_s^2 для распада $b \to s\gamma$ была получена путем интерполяции с использованием результатов асимптотики $m_c \to \infty$ и $m_c = 0$ [1,2], где m_c – масса очарованного кварка.

Ввиду ожидаемого повышения точности экспериментальных измерений, более точный расчет порядка α_s^2 необходим, чтобы уменьшить теоретические погрешности и дать нам возможность провести строгое сравнение с будущими экспериментальными данными.

Мы попробуем провести расчеты для реальных значений массы с-кварка для двух диаграмм, используя метод дифференциальных уравнений. Это очень малая часть гораздо более крупного проекта, основная цель которого – уменьшить неопределенности, возникающие из диаграмм с петлями с-кварка [1,2].

Использование программы Canonica позволяет получить дифференциальные уравнения в каноническом базисе. С помощью этого, можно решить дифференциальные уравнения и получить выражения для МИ в терминах функций GPL. Мы надеемся, что тот же метод можно использовать для других трехпетлевых диаграмм, которые вносят вклад в распад $b \rightarrow s\gamma$ в порядке α_s^2 .

2. Мастер интегралы

Диаграммы, которые будут рассмотрены, приведены на Рис. 1. На этих диаграммах O_2 и O_7 являются частью эффективного гамильтониана, приведенного в формуле (1.1) в работе [3]. Они равны:

$$O_{2} = (\overline{c}_{L\alpha}\gamma^{\mu}b_{L\alpha})(\overline{s}_{L\beta}\gamma_{\mu}c_{L\beta}),$$

$$O_{7} = \frac{e}{16\pi^{2}}\overline{s}_{\alpha}\sigma^{\mu\nu}(m_{b}(\mu)R + m_{s}(\mu)L)b_{\alpha}F_{\mu\nu},$$
(1)

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженности электромагнитного поля, $L = (1 - \gamma_5)/2$ и $R = (1 + \gamma_5)/2$. Эти диаграммы непосредственно дают вклад в ширину распада $b \rightarrow s\gamma$.



Рис.1. Здесь *p*_b — импульс b-кварка, а *q* — импульс фотона. Пунктирные линии соответствуют глюонам, синусоиды — фотонам.

Для расчета этих диаграмм была использована программа Tracer [6]. Полученный результат может быть представлен в виде линейных комбинаций скалярных произведений (а также произведений этих скалярных произведений) наших импульсов: p_b и q – это внешние импульсы, а r_1, r_2 и l_0 – импульсы петли (включая скалярное произведение импульсов на самих себя). В результате получаются 12 скалярных произведений. Используемые нами программы сокращения (поговорим об этом в следующей секции) требуют, чтобы скалярные произведения были выражены в виде линейных комбинаций так называемых «пропагаторов». В качестве этих «пропагаторов» можно использовать 8 настоящих пропагаторов, которые показаны на Рис.1:

$$D_{1} = l_{0}^{2} - m_{c}^{2}, \quad D_{2} = (l_{0} + q)^{2} - m_{c}^{2},$$

$$D_{3} = (l_{0} - r_{1})^{2} - m_{c}^{2}, \quad D_{4} = r_{1}^{2},$$

$$D_{5} = r_{2}^{2}, \quad D_{6} = (r_{1} - r_{2})^{2},$$

$$D_{7} = (p_{b} - r_{1} - q)^{2}, \quad D_{8} = (p_{b} - r_{1} - q + r_{2})^{2},$$
(2)

и дополнительно определить еще 4 искусственных пропагатора:

$$D_{9} = (r_{1} + q)^{2}, \quad D_{10} = (r_{2} + q)^{2},$$

$$D_{11} = (p_{b} - q + l_{0})^{2}, \quad D_{12} = (l_{0} + r_{2})^{2}.$$
(3)

В уравнениях (2) и (3) масса s-кварка m_s считается равной 0. Отсюда получается, что $p_b \cdot q = m_b^2 / 2$, где m_b — масса b-кварка.

После выражения скалярных произведений в виде линейных комбинаций этих пропагаторов и объединения скалярных интегралов с одинаковыми степенями пропагаторов, получается, что сумма диаграмм в Рис. 1 может быть выражена как линейная комбинация 636 скалярных интегралов. Это число (636) необходимо (и возможно) дополнительно сократить. Таких программ сокращений много, о некоторых из них мы поговорим ниже.

Первый алгоритм был предложен Laporta [7]. Этот алгоритм использует теорему Гаусса для получения уравнений интегрирования по частям (ИПЧ) для скалярных интегралов. Большинство алгоритмов сокращения за последние 20 лет являются реализацией этого алгоритма, например AIR [8], FIRE [9] и LiteRed [10]. В этой статье используется программа Kira [11], которая лучше подходит для более сложных наборов интегралов, как в нашем случае. В таких случаях Kira получает результаты намного быстрее, чем другие программы, потому что он может использовать несколько процессоров.

Использование программы Kira позволяет свести 636 скалярных интегралов к 8 мастер интегралам: все 636 скалярных интегралов могут быть выражены как линейные комбинации этих 8 мастер интегралов. Если определить **р** как вектор отрицательных степеней пропагаторов в мастер интегралах (p_1 — вектор отрицательных степеней 12 пропагаторов для первого мастер интеграла, p_2 — вектор отрицательных степеней 12 пропагаторов для второго мастер интеграла и т.д.) получаются следующие выражения:

$$p_{1} = [1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0], \quad p_{2} = [0,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0],$$

$$p_{3} = [0,1,1,0,1,0,0,2,0,0,0,0], \quad p_{4} = [0,1,2,0,1,0,0,1,0,0,0,0],$$

$$p_{5} = [0,1,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0], \quad p_{6} = [0,1,1,0,1,1,2,0,0,0,0,0],$$

$$p_{7} = [1,1,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0], \quad p_{8} = [1,1,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0].$$
(4)

Можно показать, что производные (по $z = m_c^2 / m_b^2$) мастер интегралов также могут быть представлены в виде линейных комбинаций мастер интегралов. Используя Kira, находим дифференциальные уравнения для 8 мастер интегралов. В следующих разделах эти дифференциальные уравнения используются для определения мастер интегралов.

3. Канонический базис

Как упоминалось в предыдущем разделе, имеется система из восьми дифференциальных уравнений для наших мастер интегралов. Теперь перейдем к решению этих дифференциальных уравнений. В работе [12] предлагается метод, значительно упрощающий задачу решения дифференциальных уравнений: преобразование их к каноническому базису. Предположим, что у нас есть следующая система дифференциальных уравнений:

$$d\mathbf{f} = a(\varepsilon, x)\mathbf{f},\tag{5}$$

где $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, ..., f_8\}$ — вектор мастер интегралов (список соответствует (4)), а a — это 8×8 матрица, которая зависит от параметра размерной регуляризации ε и переменных дифференциального уравнения (в данном случае есть только одна переменная x, связанная с z, которую мы определим ниже). В работе [12] показано, что для подходящих систем дифференциальных уравнений можно выбрать базис, для которого (в случае одной переменной):

$$d\mathbf{g} = \varepsilon A(x)\mathbf{g},\tag{6}$$

где A — матрица размером 8×8. Эта форма называется канонической формой, а базис мастер интегралов, для которого достигнуто это выражение $g = \{g_1, g_2, ..., g_8\}$ называется каноническим базисом. В каноническом базисе уравнения значительно упрощаются, так как можно решить систему дифференциальных уравнений, начиная с наименьшей степени ε , а затем для каждой последующей степени ε использовать решения предыдущих степеней.

На практике найти преобразование для приведения системы дифференциальных уравнений к каноническому базису — нетривиальная задача. Чтобы найти канонический базис для системы дифференциальных уравнений, используется пакет Mathematica Canonica [13]. Чтобы использовать Canonica, необходимо найти переменную x (связанною с z), для которой Canonica может найти преобразование приводящую дифференциальные уравнение в каноническую форму. В данном случае эта переменная x, которая связана с z при помощи преобразования $z = (1 - x^2)/4$. После использования этого преобразования и нахождения канонического базиса выполняется еще одно преобразование: $x \to 1/x$. Причина этого в том, что при выборе предела $z \to \infty$ (поговорим об этом в следующем разделе), соответствующий предел равен $x \to 0$. В этом случае выражения сильно упрощаются.

После преобразования $z \to (1-1/x^2)/4$ и перехода к каноническому базису с помощью Canonica дифференциальные уравнения принимают вид

$$d\mathbf{g} = \varepsilon \left(\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_{-1}}{x+1}\right) \mathbf{g} \equiv E \cdot \mathbf{g},\tag{7}$$

где A_0, A_1 и A_{-1} — постоянные 8×8 матрицы.

Конкретная форма матрицы Е такова:

$$\begin{split} E_{1} &= \left\{ -\frac{3\varepsilon}{x-1} - \frac{3\varepsilon}{1+x} + \frac{6\varepsilon}{x}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}, \\ E_{2} &= \left\{ 0, \frac{4\varepsilon}{x-1} + \frac{4\varepsilon}{1+x} + \frac{2\varepsilon}{x}, \frac{36\varepsilon}{1+x} - \frac{36\varepsilon}{x-1}, \frac{3\varepsilon}{x-1} - \frac{3\varepsilon}{1+x}, 0, 0, 0, 0 \right\}, \\ E_{3} &= \left\{ 0, \frac{\varepsilon}{2(x-1)} - \frac{\varepsilon}{2(1+x)}, -\frac{4\varepsilon}{x-1} - \frac{4\varepsilon}{1+x} + \frac{8\varepsilon}{x}, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}, \\ E_{4} &= \left\{ 0, 0, \frac{4\varepsilon}{x-1} + \frac{4\varepsilon}{1+x} - \frac{8\varepsilon}{x}, -\frac{3\varepsilon}{x-1} - \frac{3\varepsilon}{1+x} + \frac{6\varepsilon}{x}, 0, 0, 0, 0 \right\}, \\ E_{5} &= \left\{ \frac{16\varepsilon}{441x} - \frac{16\varepsilon}{147(1+x)}, 0, 0, 0, \frac{3\varepsilon}{x-1} + \frac{3\varepsilon}{1+x} + \frac{2\varepsilon}{x}, \frac{24\varepsilon}{1+x} - \frac{24\varepsilon}{x-1}, 0, 0 \right\}, \\ E_{6} &= \left\{ \frac{4\varepsilon}{441(1+x)} - \frac{4\varepsilon}{441x}, 0, 0, 0, \frac{\varepsilon}{2(x-1)} - \frac{\varepsilon}{2(1+x)}, -\frac{4\varepsilon}{x-1} - \frac{4\varepsilon}{1+x} + \frac{8\varepsilon}{x}, 0, 0 \right\}, \\ E_{7} &= \left\{ -\frac{8\varepsilon}{49(x-1)} - \frac{40\varepsilon}{49(1+x)} + \frac{16\varepsilon}{21x}, 0, 0, 0, \frac{36\varepsilon}{1+x} - \frac{12\varepsilon}{x}, \frac{144\varepsilon}{1+x} - \frac{144\varepsilon}{x}, -\frac{3\varepsilon}{x-1} - \frac{3\varepsilon}{1+x} + \frac{6\varepsilon}{x}, 0 \right\}, \\ E_{8} &= \left\{ \frac{16\varepsilon}{49x} - \frac{8\varepsilon}{49(x-1)} - \frac{8\varepsilon}{49(1+x)}, \frac{4\varepsilon}{x} - \frac{14\varepsilon}{1+x}, \frac{72\varepsilon}{x} - \frac{72\varepsilon}{1+x}, \frac{6\varepsilon}{1+x} - \frac{6\varepsilon}{x}, 0, 0, 0, \frac{6\varepsilon}{x} - \frac{3\varepsilon}{x-1} - \frac{3\varepsilon}{1+x} \right\}, \end{split}$$

где *E_i* — это *i*-я строка матрицы *E*.

Для упрощения решения дифференциальных уравнений используются так называемые секторы. Они определяются следующим образом: правая часть дифференциальных уравнений интегралов в *i*-м секторе равна линейной комбинации интегралов, присутствующих только в $1 \le j \le i$ секторах. Например, правая часть дифференциальных уравнений интегралов первого сектора равна линейной комбинации интегралов первого сектора. Правая часть дифференциальных уравнений второго сектора равна линейной комбинации интегралов в первом и втором секторах. В этом секторе можно использовать интегралы из первого сектора, которые уже были решены. Как видно из дифференциальных уравнений, первый мастер интеграл находится в собственном секторе, второй, третий и четвертый мастер интегралы образуют второй сектор, пятый и шестой мастер интегралы образуют третий сектор, седьмой мастер интеграл образует четвертый сектор и восьмой мастер интеграл образует пятый сектор.

4. Решение дифференциальных уравнений. Нахождение констант интегрирования

Переходим к решению дифференциальных уравнений в каноническом базисе. Прежде всего, надо выяснить, до какой степени ε нужен каждый мастер интеграл в регулярном базисе. Чтобы найти это, используется тот факт, что фактические физические величины (в нашем случае сумма диаграмм на рис.1) должны быть пропорциональны ε^0 . Зная на какую степень ε делятся мастер интегралы, можно найти наибольшую степень ε , которая нужна. Из этого факта следует, что максимальная степень ε для *i*-го мастер интеграла равна ε^{n_i} , где **n** = (1,1,0,1,0,-1,0,0). Далее переходим к каноническому базису. В дальнейшем мы представим **g** в следующем виде:

$$g_i = \sum_{j=-7}^{1} B_{j+8,i} \varepsilon^j \,. \tag{9}$$

Здесь наименьшая степень ε берется как ε^{-7} , так как наименьшая степень в регулярном базисе равна ε^{-3} , а наибольшая степень в матрице преобразования равна ε^4 . По той же причине наивысшая степень ε в каноническом базисе равна ε^1 , так как наименьшая степень ε в матрице преобразования равна ε^0 и наивысшая степень ε в регулярном базисе равна ε^1 .

При решении дифференциальных уравнений используется тот факт, что для наименьшей степени ε соответствующие коэффициенты постоянны: $B_{1,i} = c_i$. Это следует из конкретной формы дифференциальных уравнений (6). Таким образом, для следующей степени ε коэффициенты будут равны интегралу предыдущей степени относительно 1/x, 1/(x-1) и 1/(x+1). Это означает, что для следующей степени ε получается $B_{2,i} = c_{0i} + c_{1i}G[0,x] + c_{2i}G[1,x] + c_{3i}G[-1,x]$, где c_{0i} — произвольная константа, а c_{1i} , c_{2i} и c_{3i} — константы, которые определяются c_i и A_0 , A_1 и A_{-1} из (7). В общем случае, $B_{i,j}$ — это линейная комбинация обобщенных полилогарифмов с $k \leq j$ индексами. Здесь использовалось определение обобщенных полилогарифмов

$$G(z_1, z_2, ..., z_m; x) = \int_0^x \frac{dt_1}{t_1 - z_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{t_2 - z_2} ... \int_0^{t_{m-1}} \frac{dt_m}{t_m - z_m} .$$
 (10)

Используя этот метод, можно найти решение для любой степени є как линейную комбинацию обобщенных полилогарифмов. Это выражение зависит конечно и от констант интегрирования. Найти эти константы интегрирования нетривиальная задача. Чтобы найти их, используются следующие методы.

Прежде всего, как упоминалось выше, наименьшая степень ε в регулярном базисе равна ε^{-3} , поэтому можно положить коэффициенты всех степеней ε начиная с ε^{-7} до ε^{-4} равным нулю для всех мастер интегралов в регулярном базисе. Это дает ряд уравнений для констант интегрирования.

Следующий используемый метод — аналитическое интегрирование первого мастер интеграла из регулярного базиса. Этот интеграл находится в отдельном секторе и может быть аналитически вычислен с использованием стандартных методов интегрирования. Приравнивая результат этого вычисления к решению соответствующего дифференциального уравнения для каждой степени є, можно найти все константы интегрирования дифференциального уравнения первого сектора.

Второй мастер интеграл более сложен, чем первый (а остальные шесть еще сложнее), и не может быть вычислен стандартными методами интегрирования. Однако, в предельном случае $z \to \infty$ или $x \to 0$ это можно сделать для второго мастер интеграла. Поскольку $z = m_c^2 / m_b^2$, этот предел соответствует $m_b \ll m_c$. Даже в этом пределе невозможно найти остальные шесть мастер интегралов. Однако в этом случае можно использовать другой метод. Поскольку этот предел соответствует $m_b \ll m_c$, можно предположить, что указанные в (2) и (3) пропагаторы в этом случае пропорциональны степеням m_c^2 или z. В частности, числители пропорциональны z^6 , (это связано с тем, что у нас трехпетлевые диаграммы), а знаменатели пропорциональны z^{k_i} , где

$$k_i = \sum_{j=1}^{\circ} p_{i,j} \tag{11}$$

для *i*-го мастер интеграла. Отсюда находим (по причинам связанным с размерностью), что мастер интегралы должны быть пропорциональны z^{6-k_i} , или (в том же пределе $z \to \infty$) $x^{-2(6-k_i)}$ для *i*-го мастер интеграла. Таким образом, в этом пределе мастер интегралы пропорциональны $x^{-4}, x^{-4}, x^{-2}, x^{-2}, x^0, x^0, x^0$ соответственно. Приравнивая решения дифференциальных уравнений к полученному нами аналитическому выражению в предельном случае $z \to \infty$ для второго интеграла и положив коэффициенты разложений по переменной x остальных шести интегралов при всех степенях x с меньшими, чем упомянутые выше степенями, равными нулю для всех степеней ε , можно найти все оставшиеся константы интегрирования. При этом используются правила разложения GPL в ряд по переменной x, приведенные в работе [14].

После нахождения всех констант интегрирования и подстановки их в аналитические выражения для мастер интегралов канонического базиса мы теперь имеем выражения для МИ канонического базиса в виде линейных комбинаций обобщенных полилогарифмов. Вставляя эти выражения в матрицу преобразования между каноническим и регулярным базисом, находим интегралы в регулярном базисе. Определив все 8 мастер интегралов в регулярном базисе, и вставляя их обратно в выражения, найденные с помощью Kira для 636 скалярных интегралов (указанные выше), вычисляется сумма двух диаграмм как функция *x* (или *z*).

5. Сравнение наших результатов с SecDec

Для того, чтобы проверить правильность наших расчетов, используется программа SecDec [15]. Эта программа может численно вычислить мастер интегралы. Чтобы найти мастер интегралы для $z = 0.1 - i \times 10^{-8}$ (мнимая часть бесконечно мала), используется программа GiNaC [16], которая позволяет численно вычислить GPL. Сравнивая наши результаты и результаты SecDec для этого значения z, можно заметить, что наши результаты очень точны: разница между нашим результатом и SecDec пренебрежимо мала для всех 8 интегралов. Ниже приведены численные значения нашего результата и SecDec для восьмого мастер интеграла при ε^0 , так как относительная разница в этом случае наибольшая:

$$f_8^0 = -6.91221 \times 10^{-7} + 6.26921 \times 10^{-6} i,$$

$$f_8^0_{SecDec} = -6.91242 \times 10^{-7} + 6.26922 \times 10^{-6} i.$$
(12)

Как видно, относительная разница незначительна. Для вещественной части это 3.038102×10^{-5} а для мнимой части 1.59509×10^{-6} . Относительные разницы всех остальных интегралов меньше этой.

6. Оценка диаграмм для разных значений z

Здесь приводятся численные оценки суммы двух диаграмм для трех значений z: $z = 1/100 - i \cdot 10^{-8}$ («маленькое» значение), $z = 1/10 - i \cdot 10^{-8}$ («реальное» значение) и $z = 10 - i \cdot 10^{-8}$ («большое» значение). После нахождения значений GPL для этих z и подстановки их в окончательную формулу, получаются нижеуказанные результаты для ε^0 . Для краткости мы опустили постоянный множитель во всех наших результатах.

$$K_0 = \frac{|\lambda_t|^2 m_b^5 C_2 C_7 \alpha_e \alpha_s^2 G_f^2}{1024\pi^2},$$
(13)

где G_f константа Ферми слабого взаимодействия, λ_t связана с матрицей Кабиббо-Кобаяси-Маскава, а C_2 и C_7 коэффициенты Вильсона [3]. Как и следовало ожидать, результаты пропорциональны α_e и α_s^2 .

Если обозначить результат как S_0 :

$$S_{0}\left(\frac{1}{10}-i\cdot10^{-8}\right) = 105.268087 + 24.942983i,$$

$$S_{0}\left(10-i\cdot10^{-8}\right) = 165.495535,$$

$$S_{0}\left(\frac{1}{100}-i\cdot10^{-8}\right) = 200.393748 + 190.135156i.$$
(14)

Вклад диаграмм в ширину распада $b \rightarrow s\gamma$ пропорционален вещественной части этих результатов. Видно, что в предельных случаях наш результат примерно на 60–90% больше, чем в случае, соответствующем «фактическому» значению. Это означает, что произведенные расчеты имеют смысл, поскольку полученные результаты сильно отличаются от предельных случаев. Окончательный результат (без константы K_0) для всех отрицательных степеней ε приведен в приложении.

7. Заключение

Были рассчитаны две трехпетлевые диаграммы на Рис.1, которые дают вклад в ширину распада $b \to s\gamma$ пропорциональный α_s^2 . С помощью программы Кіга были найдены 8 мастер интегралов через которые выражаются все 636 скалярных интегралов нашей задачи. Также были определены дифференциальные уравнения для этих 8 мастер интегралов. Мы привели наши дифференциальные уравнения к каноническому базису с помощью Canonica, после чего стало возможно их решение. Используя переход к пределу $z \to \infty$ мы смогли найти константы интегрирования и, таким образом, 8 мастер интегралов.

Приложение

Ниже представляем сумму двух диаграмм на Рис.1 в виде серии ε до ε^{-1} Выражение для ε^{0} слишком длинное, чтобы приводить его здесь. Оно, при необходимости, может быть предоставлено авторами.

$$\begin{split} S_m &= \frac{10}{3\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \Big(-\frac{23G(-1,x)}{x^3} + \frac{23G(1,x)}{x^3} + \frac{13G(-1,x)}{x} - 10G(-1,x) + 20G(0,x) \\ &\quad -\frac{13G(1,x)}{x} - 10G(1,x) + \frac{39}{x^2} + 10i\pi + \frac{8}{3} + 20\log(2) \\ &\quad + \frac{(x^2 - 1)(13x^2 - 1)}{2x^4} \Big(-G(-1, -1, x) + G(-1, 1, x) + G(1, -1, x) - G(1, 1, x) \Big) \\ &\quad + \frac{2(5x^4 - 6x^2 + 1)}{x^4} \Big(-G(-1, -1, -1, x) + G(-1, -1, 1, x) + G(-1, 1, -1, x) \\ &\quad -G(-1, 1, 1, x) + 2G(0, -1, -1, x) - 2G(0, -1, 1, x) - 2G(0, 1, -1, x) \\ &\quad + 2G(0, 1, 1, x) - G(1, -1, -1, x) + G(1, -1, 1, x) + G(1, 1, -1, x) - G(1, 1, 1, x) \Big) \\ &\quad + \frac{2(3x^4 - 4x^2 + 1)}{x^4} \Big(G(-1, -1, -1, -1, x) - G(-1, -1, -1, 1, x) - G(-1, -1, -1, x) \\ &\quad + G(-1, -1, 1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, -1, x) + 2G(0, -1, -1, 1, x) + 2G(0, -1, 1, -1, x) \\ &\quad + G(-1, 1, 1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, -1, x) + 2G(0, -1, -1, 1, x) + 2G(0, -1, 1, -1, x) \\ &\quad + G(-1, 1, 1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, -1, x) + 2G(0, -1, -1, 1, x) - 2G(0, -1, 1, -1, x) \\ &\quad + G(0, 0, 1, 1, x) - 2G(0, 1, -1, -1, x) + 2G(0, 1, -1, 1, x) - 4G(0, 0, 1, -1, x) \\ &\quad + 4G(0, 0, 1, 1, x) - 2G(0, 1, -1, -1, x) + 2G(0, 1, -1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, -1, x) \\ &\quad + 2G(0, -1, 1, 1, x) + 4G(1, -1, -1, -1, x) - G(1, -1, -1, 1, x) - G(1, -1, -1, x) \\ &\quad + G(1, -1, 1, 1, x) - 2G(0, 1, -1, -1, x) + 2G(0, 1, -1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, 1, x) \\ &\quad + 2G(0, 0, 1, 1, x) - 2G(0, 1, -1, -1, x) - 2G(0, 1, -1, 1, x) + 2G(0, 1, -1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, 1, x) + 2G(0, -1, -1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, -1, x) - 2G(0, -1, -1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, -1, x) - 2G(0, -1, -1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, 1, x) - 2G(0, -1, -1, 1, x) - 2G(1, 0, -1, -1, 1, 1, x) - 2G(1, 0, -1, -1, 1$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1. H.M. Asatrian, M. Misiak et al. Phys. Rev. Lett., 114, 221801 (2015).
- 2. H.M. Asatrian, M. Misiak et al. Phys. Rev. Lett., 98, 022002 (2007).
- 3. C. Greub, T. Hurth, D. Wyler. Phys. Rev. D, 54, 3350 (1996).
- 4. H.M. Asatrian et al. JHEP, 04, 012 (2020).
- 5. А.Г. Оганесян. Изв. НАН Армении, Физика, **37**, 206 (2002).
- 6. M. Jamin, M. Lautenbacher. Comput. Phys. Commun., 74, 265 (1993).
- 7. S. Laporta. Int. J. Mod. Phys. A, 15, 5087 (2000).
- 8. C. Anastasiou, A. Lazopoulos. JHEP, 7, 046 (2004).
- 9. A. Smirnov. JHEP, 10, 107 (2008).
- 10. R. Lee. J. Phys. Conf. Ser., 523, 012059 (2014).
- 11. P. Maierhöfer, J. Usovitsch, P. Uwer. Phys. Commun., 230, 99 (2018).
- 12. J. Henn. Phys. Rev. Lett., 110, 251601 (2013).
- 13. C. Meyer. Comput. Phys. Commun., 222, 295 (2018).
- 14. J. Vollinga, S. Weinzierl. Comput. Phys. Commun., 167, 177 (2005).
- 15. J. Carter, G. Heinrich. Comput. Phys. Commun., 182, 1566 (2011).
- 16. J. Vollinga. Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., 559, 282 (2006).

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՔՐՈՄՈԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ በԻՂՂՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՆԵՐ

Հ.Հ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Հ.Մ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Մեր հոդվածը նվիրված է երկու երեք-օղականի դիագրամների հաշվարկին, որոնք ներդրում ունեն $b \to s\gamma$ տրոհման մեջ α_s^2 ճշտությամբ։ Մենք օգտագործում ենք դիֆերենցիալ հավասարումներ վարպետ ինտեգրալների համար, որպեսզի հաշվենք այս դիագրամները сքվարկի կամայական զանգվածի համար։ Canonica ծրագրի օգտագործումը թույլ է տալիս բերել դիֆերենցիալ հավասարումները կանոնիկ բազիսի։ Օգտագործելով դրանք, հնարավոր է լուծել դիֆերենցիալ հավասարումները և ստանալ արտահայտություններ վարպետ ինտեգրալների համար՝ որպես GPL ֆունկցիաների գծային կոմբինացիա։ Հույս ունենք, որ նույն մեթոդը կարող է օգտագործվել α_s^2 ճշտությամբ $b \to s\gamma$ տրոհման մեջ ներդրում ունեցող այլ երեք-օղականի դիագրամների համար։

CALCULATIONS OF HIGHER ORDER QUANTUM CHROMODYNAMICS CORRECTIONS

H.H. ASATRYAN, H.M. ASATRIAN

Our article is devoted to the calculation of two three-loop diagrams that contribute to the $b \rightarrow s\gamma$ decay at α_s^2 order. We use differential equations for master integrals (MI) to calculate these diagrams for an arbitrary c-quark mass. The program Canonica is used to obtain differential equations in the canonical basis. Using them, it is possible to solve the differential equations and get expressions for MI-s in terms of GPL functions. We hope that the same method can be used for other three-loop diagrams which contribute to the $b \rightarrow s\gamma$ decay at α_s^2 order.