

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ С ТРЕМЯ
ИЗОЛИРУЮЩИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ДВИЖЕНИЯГ.А.МАЛАСИДЗЕ¹, Г.Н.САЛУКВАДЗЕ², Р.А.ЧИГЛАДЗЕ¹

Поступила 7 февраля 2011

Проблема существования третьего изолирующего (неклассического) интеграла движения в определенном смысле связана с негауссовской формой распределения скоростей в звездных системах. На базе найденной ранее серии моделей со штеккетовскими формами потенциала, путем линейной суперпозиции были обобщены некоторые характеристики этих моделей для описания наблюдаемых свойств галактических систем. Найденны соответствующие выражения для круговой скорости вращения и поверхностной плотности. Построены графики изменения этих характеристик для интересных двух случаев.

Ключевые слова: *Галактика: модель: динамика*

1. *Введение.* Одной из важной проблемой звездной динамики продолжает оставаться вопрос существования третьего неклассического изолирующего интеграла движения. Численные эксперименты свидетельствуют, что для большинства объектов Галактики, наряду с интегралами энергии и углового момента относительно оси симметрии, может существовать и третий, изолирующий интеграл движения. Всякие двуинтегральные представления в динамике стационарной Галактики сильно расходятся от наблюдений. Существует еще третий интеграл Оорта-Линдблада, характеризующий движения только вблизи плоскости симметрии Галактики. С физической точки зрения весьма желательно было бы иметь даже неточное аналитическое выражение настоящего изолирующего интеграла движения, удобного для такого математического преобразования, каким является известная оортовская подстановка. По результатам некоторых исследований [1], условием существования указанного типа выражения для третьего изолирующего интеграла движения является негауссовская форма распределения скоростей. Освобождение от ограничений, налагаемых гауссовой формой распределения, согласно Кингу [2], помогает вывести приближенную аналитическую форму третьего интеграла движения, приводящую естественным образом к потенциалам Штеккеля.

2. *Основные признаки изолирующих интегралов движения.* Для динамической системы со многими степенями свободы имеем

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ - обобщенные координаты, а $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ - соответствующие им обобщенные импульсы, H - известная функция Гамильтона, которую просто называют гамильтониан. Если выполняются условия:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = f(q_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

тогда каждое уравнение системы (1) будет решаться в квадратурах. В общем же случае необходимо искать решение системы дифференциальных уравнений (1) совместно. Если кроме гамильтониана H имеются и другие интегралы движения, тогда число уравнений в решаемой системе для каждого дополнительного изолирующего интеграла движения уменьшится на единицу.

Следует подчеркнуть, что изолирующим является тот интеграл движения, который в некоторых канонических переменных сводится к уравнению вида $\partial H / \partial p_i = f(q_i)$.

Преобразования, приводящие к переменным действия-угол удовлетворяют более жестким требованиям: $\partial H / \partial p_i = \text{const}$. Хотя само преобразование зависит от существования изолирующего интеграла, который, возможно будет настолько глубоко скрыт в динамике системы, что обнаружить его будет непросто.

Изолирующие интегралы связаны с определенными типами симметрии динамической системы, которые могут быть очевидными. Тогда нужные преобразования переменных, обеспечивающие решение системы в квадратурах, определяются непосредственно. В других ситуациях, когда не так просто обнаружить свойство симметричности, отыскание изолирующего интеграла затруднено.

В настоящее время не только не найден общий метод обнаружения всех изолирующих интегралов движения динамической системы, но даже невозможно установить хотя бы их общую численность. Если у гамильтоновой системы отсутствует явная симметрия, тогда прогнозирование существования и отыскание скрытого изолирующего интеграла движения часто возможно только численными экспериментами.

3. Модели с потенциалами Штеккеля. Согласно известной теореме Джинса, в динамике стационарной ротационно-симметричной Галактики зависимость функции фазовой плотности $f(\vec{r}, \vec{v})$ от компонента скорости V_ϕ (в случае цилиндрической геометрии) может быть совершенно произвольной. Роль остальных двух компонентов скорости V_R и V_z должна быть совершенно симметричной, т.е. их распределение должно быть совершенно идентичным. Это не подтверждается наблюдениями; и дисперсии скоростей по этим двум направлениям отличаются почти вдвое.

Очевидно, что здесь не все идет так, как задумано. Галактика пока еще не достигла своего состояния равновесия. Так как Галактика успела совершить

почти 50 оборотов, такая точка зрения не должна была быть вполне убедительной. По всей вероятности, возможное объяснение следует связать с существованием третьего (неклассического) изолирующего интеграла движения или, с какой-то неизменной величиной за все время существования Галактики.

На наш взгляд интересно аппроксимировать потенциал регулярного гравитационного поля Галактики выражением Штеккеля

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \frac{\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)}{\xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad (3)$$

согласно которому возможно достичь разделения переменных в так называемых софокусных эллиптических координатах. Следует отметить, что многочисленные современные исследования проводились именно на базе этого выражения потенциала. Здесь $\varphi(\xi)$ - произвольная функция своего аргумента, при этом $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$ можно считать частями одной функции, поскольку $1 \leq \xi_1 < \infty$ и $-1 \leq \xi_2 \leq 1$. Эти переменные представляют собой эллиптические конфокальные координаты, связанные с цилиндрическими координатами R и z такими преобразованиями:

$$R = z_0 \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}, \quad (4)$$

$$|z| = z_0 \xi_1 |\xi_2|, \quad (5)$$

где z_0 - параметр, имеющий размерность длины, который фиксирует положения фокусов выбранной ортогональной криволинейной системы координат на оси симметрии модели ($0; \pm z_0$). Обобщенные координаты резонно было бы здесь выбрать следующим образом:

$$\xi_1 = q_1, \quad \xi_2 = q_2, \quad \theta = q_3, \quad (6)$$

соответствующие обобщенные импульсы которых будут иметь вид:

$$P_1 = z_0 \frac{W_1}{q_1^2 - 1}, \quad P_2 = z_0 \frac{W_2}{1 - q_2^2}, \quad P_3 = z_0 I_2. \quad (7)$$

Для функции W_1 и W_2 имеем выражение

$$W_i^2 = 2[I_1 q_i^2 - I_3 + \varphi(q_i)](q_i^2 - 1) - I_2^2 q_i^2, \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

где I_1 - интеграл энергии, I_2 - интеграл углового момента относительно оси симметрии модели, а I_3 - третий квадратичный относительно компонентов скорости звезды, изолирующий интеграл движения.

Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(0) = 0$. В центре модели $q_1 = 1$ и $q_2 = 0$, где $\Phi_0 = \varphi(1)$ - значение потенциала в самом центре модели. Функция $\varphi(q)$ довольно просто связана с потенциалом в плоскости симметрии ($z=0$) и на оси симметрии ($R=0$), где один из обобщенных координат равен единице (или минус единице). Соответственно имеем

$$\Phi_{z=0} = \frac{\varphi(q)}{q^2}, \quad q = \sqrt{1 + \frac{R^2}{z_0^2}}, \quad (9)$$

$$\Phi_{R=0} = \frac{\varphi(q) - \varphi(1)}{q^2 - 1}, \quad \bar{q} = \frac{z}{z_0}. \quad (10)$$

Здесь уместно было бы вспомнить обнаруженную ранее [3] серию линзообразных моделей со следующими выражениями произвольной функции $\varphi(\xi)$ и гравитационного потенциала:

$$\varphi(\xi) = \frac{GM}{z_0} \frac{\xi^2}{b + |\xi|}, \quad (11)$$

$$\Phi(R, z) = \frac{GM}{s} \frac{bs + |z|}{b^2 z_0 + bs + |z|}, \quad (12)$$

где

$$s = z_0(\xi_1 + |\xi_2|) = \sqrt{R^2 + (z_0 + |z|)^2}, \quad (13)$$

G - гравитационная постоянная, M - полная масса, b - структурный параметр модели.

В плоскости симметрии моделей ($z=0$) получаем, что

$$\Phi(R) = GM \left(bz_0 + \sqrt{R^2 + z_0^2} \right)^{-1}, \quad (14)$$

которому будет соответствовать напряженность гравитационного поля:

$$F(R) = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{GM}{\sqrt{R^2 + z_0^2} \left(bz_0 + \sqrt{R^2 + z_0^2} \right)}. \quad (15)$$

На основе такой серии элементарных моделей с учетом дифференциального элемента

$$M = \frac{\alpha^2 z_0}{G \sqrt{z_0^2 - \beta^2}} dz_0, \quad (16)$$

предполагаемого в работе [4], где α и β постоянные величины, причем $z_0 > \beta$, находим путем линейной суперпозиции, что

$$F(R) = \alpha^3 R \int_0^\infty \frac{z_0 dz_0}{\left(bz_0 + \sqrt{R^2 + z_0^2} \right)^2 \sqrt{(R^2 + z_0^2)(z_0^2 - \beta^2)}}. \quad (17)$$

Выполняя интегрирование, получаем выражение

$$F(R) = \frac{\alpha^2}{(b+1)\sqrt{R^2 + (1-b^2)\beta^2}} \left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + (1-b^2)\beta^2}} - \frac{b(b+1)\beta^2}{R^2 + (1-b^2)\beta^2} \ln \frac{R^2 + (b+1)\beta^2 + R\sqrt{R^2 + (1-b^2)\beta^2}}{\beta(b+1)\sqrt{R^2 + \beta^2}} \right], \quad (18)$$

из которого следует, что при $b=0$

$$F(R) = \alpha^2 R(R^2 + \beta^2)^{-1}, \quad (19)$$

а для круговой скорости будем иметь

$$V(R) = \alpha R(R^2 + \beta^2)^{-1/2}. \quad (20)$$

Эти выражения впервые были найдены авторами работы [4] путем линейной суперпозиции элементарных плоских моделей [5].

В случае $b = 1$ базовые элементарные модели раньше были названы квазиизохронными, поскольку соответствующие потенциал и плотность в плоскости симметрии в точности идентичны их выражениям для изохронной модели Энона [6]. По общему выражению (18) результаты линейной суперпозиции имеют вид:

$$F(R) = \frac{\alpha^2 \beta^2}{2 R^3} \left(\frac{R^2}{\beta^2} - \ln \frac{R^2 + \beta^2}{\beta^2} \right), \quad (21)$$

$$V(R) = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{2} R} \left[\frac{R^2}{\beta^2} - \ln \left(1 + \frac{R^2}{\beta^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (22)$$

Также можно найти, что при всех $0 \leq b \leq 1$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R F(R)} = \alpha(1 + b)^{-1/2}, \quad (23)$$

т.е. общий закон изменения круговой скорости в зависимости от переменной R схематически вполне удовлетворительно может описать наблюдаемую форму кривой вращения галактик.

Для поверхностной плотности модели при $b = 0$ нашли выражение

$$\delta(R) = \frac{\alpha^2}{2\pi G} (R^2 + \beta^2)^{-1/2}, \quad (24)$$

где $E(k)$ - полный эллиптический интеграл Лежандра второго рода, модуль которого имеет вид:

$$k = R(R^2 + \beta^2)^{-1/2}. \quad (25)$$

Аналогичным образом при $b = 1$ нашли

$$\delta(R) = \frac{\alpha^2 (\beta + \sqrt{R^2 + \beta^2})}{3\pi G R^4} \left[(R^2 - 4\beta^2) E(k) - 2\beta (3\beta - \sqrt{R^2 + \beta^2}) F(k) \right], \quad (26)$$

где $F(k)$ - полный эллиптический интеграл Лежандра первого рода. Модуль k в этом случае принимает вид:

$$k = R^2 (\beta + \sqrt{R^2 + \beta^2})^{-2}. \quad (27)$$

На рис.1 представлены графики зависимостей (20) и (22), которые наглядно показывают для круговой скорости $V(R)$ ход параллельной оси R , а на рис.2 построены графики изменения поверхностных плотностей

(24) и (26) при $b=0$ и $b=1$. При этом величина

$$\delta_0 = \frac{\alpha}{3\pi G\beta} \quad (28)$$

принята за единицу поверхностной плотности модели.

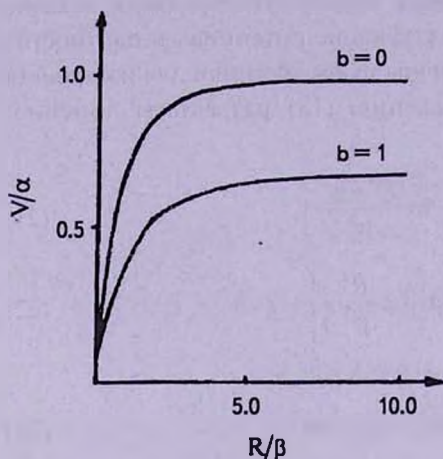


Рис.1. Кривые изменения круговой скорости по R для $b=0$ и $b=1$, согласно (20) и (22).

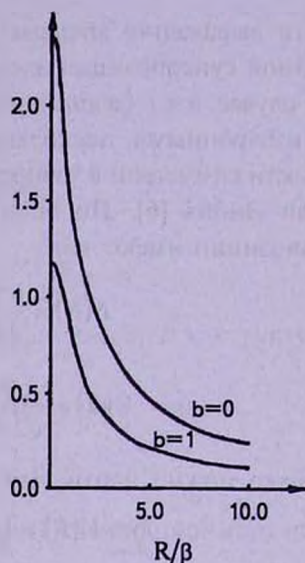


Рис.2. Кривые изменения поверхностной плотности по R для моделей $b=0$ и $b=1$, согласно (24) и (26).

В заключение можно сказать, что на базе некоторых моделей, характеризующейся потенциалами Штеккеля, успешно можно построить модели с бесконечными массами и плоскими кривыми круговой скорости.

4. Выводы. Отдельные факты, свидетельствующие о существовании третьего неклассического изолирующего интеграла движения, стали исключительно важными факторами развития динамической теории Галактики.

На разных этапах развития теории, с учетом наблюдательных предпосылок с разными соображениями и подходами, неоднократно предпринимались попытки построить модели звездных систем с тремя изолирующими интегралами [7-11].

Для гамильтоновых систем с несколькими степенями свободы, существование изолирующего интеграла движения связано с некоторыми видами симметрии системы, которые иногда настолько глубоко скрыты в самой динамике этой системы, что не всегда так просто их прогнозирование. В таких случаях необходимы численные эксперименты.

Особое внимание здесь нами уделено потенциалам Штеккеля, выполнявшим исключительно важную роль в развитии стационарной

динамики Галактики.

Методом линейной суперпозиции напряженности элементарных штеккеловских силовых полей была найдена серия интересных моделей с плоскими кривыми круговой скорости (рис.1). Так же были установлены законы изменения поверхностной плотности этих моделей и построены соответствующие графики для двух конкретных моделей серии (рис.2).

¹ Ахалцихский государственный учебный университет,
Грузия, e-mail: gmalasi@yahoo.com revazchigladze@yahoo.com

² Абастуманская астрофизическая обсерватория им. Е.К.Харадзе, Грузия

ON SOME MODELS IN THE THEORY OF THE THIRD ISOLATING INTEGRAL OF MOTION

G.A.MALASIDZE¹, G.N.SALUKVADZE², R.A.CHIGLADZE¹

The problem of existence of the third isolated (non-classical) integral of motion from the certain point of view is related with non-Gaussian form of velocity distribution in the star systems. On the basis of series of models with Stackel potentials found out earlier, by means of linear superposition are constructed modified models, that are appropriate for description of some observed characteristics of galactic systems. Appropriated expressions are obtained for circular velocity and surface density. Diagrams of these characteristics' change in the two most interesting cases are constructed.

Key words: *Galaxy:model:dynamics*

ЛИТЕРАТУРА

1. J.H.Oort, Bull. Astron. Inst. Netherl., 4, 269 (№159), 1928.
2. А.Р.Кинг, Введение в классическую звездную динамику, М., 286, 2002.
3. Г.Г.Кузмин, Г.А.Маласидзе, Публикац. Тартуск. астроф. обсерв., 52, 48, 1987.
4. В.А.Антонов, О.А.Железняк, Астрон. ж., 65, 461, 1988.
5. Г.Г.Кузмин, Астрон. ж., 33, 27, 1956.
6. М.Henon, Ann d'Ap, 22, 126, 491, 1959.
7. A.S.Eddington, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 76, 37, 1915.
8. G.I.Clark, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 97, 182, 1937.
9. G. Van Albada, Proc. kon. Ned. Akad. Wetensch., series B., 55, №5, 620, 1952.
10. Г.Г.Кузмин, Publ. Tartu Astron. obs., 32, 332, 1953.
11. G.Hori, Publ. Astron. Soc. Japan, 14, 353, 1962.