АСТРОФИЗИКА

ТОМ 54 МАЙ, 2011 ВЫПУСК 2

БИЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 7 февраля 2011

Показывается, что группа задач теории переноса излучения, сводящихся к задаче без источников, допускает класс интегралов, включающих квадратичные моменты интенсивности произвольно высоких порядков. На основе вариационного принципа делается вывод, что данные интегралы, к числу которых относится R-интеграл, являются следствием соответствующих законов сохранения. Некоторые результаты обобщаются на случай анизотропного рассеяния.

Ключевые слова: *теория переноса излучения:вариационный формализм, квадратичные, билинейные интегралы*

1. *Введение*. В работе Райбики [1] было показано, что уравнение переноса для монохроматического изотропного рассеяния в плоскопараллельной среде допускает класс интегралов, квадратичных по отношению к полю излучения. Интегралы, названные им Q- и R-интегралами, включали квадратичные моменты интенсивности соответственно нулевого и второго порядка. В дальнейшем в работах [2,3] были получены более общие, так называемые, билинейные интегралы, которые можно интерпретировать как соотношения, связывающие между собой поля излучения в двух различных задачах переноса. В последней из указанных работ было продемонстрировано, что билинейные интегралы можно вывести для данной задачи непосредственно, на основе несложных физических рассуждений. Единственным условием при этом является отсутствие зависимости коэффициента рассеяния λ от глубины в атмосфере. Там же была установлена связь существования подобных интегралов с принципом инвариантности Амбарцумяна [4,5]. Следует отметить, что аналогичные нелинейные интегралы допускают также задачи об определении статистических средних величин, описывающих процесс рассеяния, таких как, например, среднее число рассеяний и среднее время пребывания кванта в среде [6].

Для рассмотрения задач переноса излучения в работе [7] применялся вариационный формализм. Было показано, что наличие Q-интегралов отражает факт инвариантности уравнений переноса и соответствующих лагранжианов по отношению к трансляционному преобразованию оптической глубины. По сути дела они представляют собой законы сохранения, аналогичные закону сохранения импульса в механике, получаемого при трансляционном преобразовании осей.

Вопрос о том, каким образом R-интегралы связаны с законами сохранения, до сих пор остается в тени. В данной работе мы покажем, что, как эти интегралы, так и целый ряд других нелинейных интегралов, включающих квадратичные моменты высоких порядков, могут быть получены из Q-интегралов в результате несложных, но часто громоздких преобразований. Помимо того, будут приведены некоторые более общие результаты, касающисся применения вариационного принципа в случае анизотропного рассеяния.

2. *Вариационный принцип*. Здесь мы приведем некоторые необходимые сведения о вариационном формализме, развитом в [7] (см. также [8]). Для простоты ограничимся рассмотрением изотропного рассеяния монохроматического излучения в полубесконечной атмосфере. Для наглядности уравнения переноса запишем в терминах величины $P(\tau, \eta, \mu)$, представляющей собой вероятность того, что фотон, движущийся на глубине τ в направлении η, выйдет из среды под углом $\arccos\mu$ (углы отсчитываются от внешней нормали). Они имеют вид

$$\pm\eta \frac{dP(\tau, \pm\eta, \mu)}{d\tau} = -P(\tau, \pm\eta, \mu) + \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} P(\tau, \eta', \mu)\, d\eta'. \tag{1}$$

Совершенно очевидно, что при необходимости от величин P нетрудно перейти к соответствующим интенсивностям.

Из уравнений (1) получаем

$$\eta^2 \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} = \Phi(\tau, \eta, \mu) - \lambda\int_0^1 \Phi(\tau, \eta', \mu)\, d\eta', \tag{2}$$

где введено обозначение $\Phi(\tau, \eta, \mu) = P(\tau, +\eta, \mu) + P(\tau, -\eta, \mu)$.

Для плотности Лагранжиана L, соответствующего уравнению (2), имеем

$$L(\Phi, \Phi', \eta) = \Phi^2 + (\eta\Phi')^2 - 2\Phi U, \tag{3}$$

где

$$U(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \Phi(\tau, \eta', \mu)\, d\eta'. \tag{4}$$

Поскольку плотность Лагранжиана (3) не зависит явным образом от τ, то трансляция оптической глубины является преобразованием симметрии для системы (1) и потому допускает закон сохранения вида

$$\int_0^1 \left[L - \frac{\partial L}{\partial \Phi}\Phi' \right] d\eta = \text{const}, \tag{5}$$

который ввиду (3) принимает вид

$$\int_0^1 \left[\Phi^2(\tau,\eta,\mu) - \eta^2\Phi'^2(\tau,\eta,\mu) - 2U(\tau,\mu)\Phi(\tau,\eta,\mu)\right] d\eta = \text{const} \tag{6}$$

или

$$\int_0^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau,-\varsigma,\mu)d\varsigma = \frac{\lambda}{4}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)d\varsigma\right)^2 + \text{const}\,. \tag{7}$$

Для полубесконечной атмосферы $P(\tau,\pm\varsigma,\mu)\to 0$ при $\tau\to\infty$, так что $\text{const}=0$. Это соотношение, содержащее интеграл, квадратичный по отношению к полю излучения, является, по сути дела, аналогом Q-интеграла, полученного в [1]. Для этого же случая легко вывести более общее соотношение, если рассмотреть две проблемы, различающиеся друг от друга лишь значением параметра μ

$$\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau,-\varsigma,\mu')d\varsigma = \frac{\lambda}{2}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)d\varsigma\right)\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu')d\varsigma\right). \tag{8}$$

Данное билинейное соотношение впервые было получено в [3] двумя путями, в частности, на основе несложных физических рассуждений. Наконец, к более общему результату можно прийти, если рассматривать две различные глубины ([2,7])

$$\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau',-\varsigma,\mu')d\varsigma = \frac{\lambda}{2}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)d\zeta\right)\left(\int_{-1}^1 P(\tau',\varsigma,\mu')d\varsigma\right). \tag{9}$$

Билинейные соотношения такого типа называются двуточечными. Соответственно, интегралы в левых частях (8) и (9) можно рассматривать как билинейные нулевые моменты функции P.

3. *R - интеграл и интегралы, содержащие билинейные моменты высших порядков.* В настоящем разделе мы покажем, что билинейные интегралы (8), (9) могут быть использованы для получения целого класса интегралов, содержащих моменты высших порядков, к которому принадлежит и R-интеграл.

Если положить в (9) $\tau=\tau'=0$, то придем к уравнению, полученному Амбарцумяном для коэффициента отражения $\rho(\eta,\varsigma)$ (ς и η - косинусы углов падения и отражения, соответственно) на основе сформулированного им принципа инвариантности. Оно имеет вид

$$(\eta+\zeta)\rho(\eta,\varsigma) = \frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)\varphi(\varsigma), \tag{10}$$

где функция

$$\varphi(\eta) = 1 + \eta\int_0^1 \rho(\eta,\eta')d\eta' \tag{11}$$

есть функция Амбарцумяна. При написании (10) было учтено, что

$$P(0,\varsigma,\mu)=\mu\rho(\varsigma,\mu),\quad P(0,-\varsigma,\mu)=\delta(\mu-\varsigma),\tag{12}$$

где через δ обозначена δ-функция Дирака. Из соотношений (10) и (11) следует, что функция φ удовлетворяет следующему функциональному уравнению Амбарцумяна

$$\varphi(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\varphi(\eta)\varphi(\eta')}{\eta+\eta'}d\eta'.\tag{13}$$

Из (13) для нулевого момента функцию φ нетрудно получить

$$\alpha_0=\int_0^1\varphi(\eta)d\eta=2\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right)/\lambda.\tag{14}$$

Покажем теперь, что для получения двуточечного билинейного R-интеграла достаточно умножить обе части соотношения (10) на произведение $\eta\varsigma P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau',\eta,\mu')$ и проинтегрировать по ς и η в пределах от 0 до 1. Тогда, с учетом того, что

$$P(\tau,-\eta,\mu)=\int_0^1 P(\tau,\eta',\mu)\rho(\eta',\eta)\eta' d\eta',\tag{15}$$

слева будем иметь

$$\int_0^1 P(\tau,\varsigma,\mu)\varsigma d\varsigma\int_0^1(\eta+\varsigma)\rho(\eta,\varsigma)P(\tau',\varsigma,\mu')\eta d\eta=\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau',-\varsigma,\mu')\varsigma^2 d\varsigma.\tag{16}$$

Для преобразования интегралов, получаемых справа, необходимо учесть соотношения (11), (14), (15). Тогда, например, для одного из указанных интегралов находим

$$\int_0^1 P(\tau,\varsigma,\mu)\varphi(\varsigma)\varsigma d\varsigma=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)\varsigma d\varsigma,\tag{17}$$

с помощью которого приходим к требуемому результату

$$(1-\lambda)\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau',-\varsigma,\mu')\varsigma^2 d\varsigma=\frac{\lambda}{2}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)\varsigma d\varsigma\right)\left(\int_{-1}^1 P(\tau',\varsigma,\mu')\varsigma d\varsigma\right).\tag{18}$$

При консервативном рассеянии, как и следовало ожидать, интегралы в правой части, характеризующие поток излучения, равны нулю.

Способ получения R-интеграла показывает, что его можно использовать и для нахождения целого ряда более общих интегралов, содержащих билинейные моменты более высоких порядков. Для этого необходимо умножить обе части соотношения (10) на $\eta^n\varsigma^n P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau',\eta,\mu')$ $(n=2,\ 3,\ \ldots)$ и произвести выкладки, аналогичные проделанным выше. Для иллюстрации приведем здесь окончательный результат для $n=2$.

$$\begin{aligned}(1-\lambda)&\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau',-\varsigma,\mu')\varsigma^4 d\varsigma=\\&=\frac{\lambda}{2}\left[U_1(\tau,\mu)U_3(\tau',\mu')+U_1(\tau',\mu')U_3(\tau,\mu)-U_2(\tau,\mu)U_2(\tau',\mu')\right],\end{aligned}\tag{19}$$

где введены следующие обозначения

$$U_1(\tau,\mu)=P_1(\tau,\mu),\quad U_2(\tau,\mu)=P_2(\tau,\mu)-\frac{\lambda}{2}\frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\lambda}}P_1(\tau,\mu),$$
$$U_3(\tau,\mu)=P_3(\tau,\mu)-\frac{\lambda}{2}\frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\lambda}}P_2(\tau,\mu)+\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\left(\alpha_2+\frac{\alpha_1^2}{\sqrt{1-\lambda}}\right)P_2(\tau,\mu), \tag{20}$$

$P_n(\tau,\mu)=\int_{-1}^{1}P(\tau,\varsigma,\mu)\varsigma^n d\varsigma$, и α_n - моменты функции $\varphi(\eta)$.

Таким образом, при отличном от нуля коэффициенте рассеяния данная задача допускает класс квадратичных и билинейных интегралов, вытекающих из закона сохранения (7). Вместе с тем, в работе [7] была определена группа так называемых RSF (redicible to the source-free) задач, решения которых, будучи связанными между собой, могут быть сведены к рассмотренной здесь задаче без источников. К данной группе относятся часто встречаемые в астрофизических приложениях задачи, в том числе, залача о диффузном отражении (и пропускании, в случае среды конечной толщины), задача Милна, а также задачи переноса излучения при экспоненциальном и полиномиальном законах распределения внутренних источников энергии. Для всех перечисленных задач применение вариационного принципа приводит к соответствующим квадратичным и билинейным интегралам, в том числе к интегралам, содержащим моменты высоких порядков, Например, для рассмотрения задачи о диффузном отражении следует лишь воспользоваться принципом обратимости оптических явлений и ввести величину $P^*(\tau,\mu,\eta)$ так, чтобы $P^* d\eta$ описывал вероятность того, что фотон, падающий на полубесконечную рассеивающую и поглощающую атмосферу в направлении μ, будет двигаться на глубине τ в интервале направлений $(\eta,\eta+d\eta)$ (углы здесь отсчитываются от внутренней нормали к границе среды). Закон симметрии для функции $P(\tau,\eta,\mu)$ позволяет написать

$$|\eta|\,P(\tau,\eta,\mu)=|\mu|\,P(\tau,-\eta,-\mu)=|\mu|\,P^*(\tau,\mu,\eta), \tag{21}$$

откуда для интенсивностей излучения в восходящем и нисходящем направлениях I^+ и I^- имеем

$$I^+(\tau,\eta,\mu)=P^*(\tau,\mu,-\eta)/\eta,\quad I^-(\tau,\eta,\mu)=P^*(\tau,\mu,\eta)/\eta. \tag{22}$$

Тогда, с учетом (18), (21) и (22), например, двуточечный R-интеграл для этой задачи запишется в виде

$$(1-\lambda)\int_0^1\left[I^+(\tau,\eta,\mu)I^-(\tau',\eta,\mu')+I^+(\tau',\eta,\mu')I^-(\tau,\eta,\mu)\right]\eta^2\,d\eta=$$
$$=2\lambda\,H(\tau,\mu)H(\tau',\mu'), \tag{23}$$

где

$$H(\tau,\mu)=\frac{1}{2}\int_0^1\left[I^+(\tau,\eta,\mu)-I^-(\tau,\eta,\mu)\right]\eta\,d\eta. \tag{24}$$

4. *Анизотропное рассеяние.* Учитывая условия существования закона сохранения (5), нетрудно заключить, что законы аналогичной формы можно написать и при других механизмах рассеяния. Для иллюстрации здесь мы рассмотрим общий случай анизотропного рассеяния. Обозначим через $\gamma(\eta, \eta')$ индикатрису рассеяния, осредненную по азимуту. Тогда, как несложно убедиться, уравнение (2) перепишется в виде

$$\eta^2 \frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} = \Phi(\tau, \eta, \mu) - \lambda \int_0^1 \gamma(\eta, \eta') \Phi(\tau, \eta', \mu) d\eta' . \tag{25}$$

Очевидно, что соответствующий Лагранжиан будет иметь ту же форму (3) с той разницей, что теперь

$$U(\tau, \eta, \mu) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \gamma(\eta, \eta') \Phi(\tau, \eta', \mu) d\eta' . \tag{26}$$

С учетом этого сохраняет форму и формула (6), и потому в качестве аналога квадратичного интеграла (7) для полубесконечной атмосферы будем иметь

$$\int_0^1 P(\tau, \varsigma, \mu) P(\tau, -\varsigma, \mu) d\varsigma = \frac{\lambda}{4} \int_{-1}^1 P(\tau, \varsigma, \mu) d\varsigma \int_{-1}^1 \gamma(\varsigma, \varsigma') P(\tau, \varsigma', \mu) d\varsigma' . \tag{27}$$

Как это часто делается, разложим величины $\gamma(\eta, \eta')$ и $P(\tau, \eta, \mu)$ по полиномам Лежандра, обозначая последние через $\widetilde{P}_k(\eta)$

$$\gamma(\eta, \eta') = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \, \widetilde{P}_k(\eta) \widetilde{P}_k(\eta'), \quad P(\tau, \eta, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\tau, \mu) \widetilde{P}_k(\eta), \tag{28}$$

где

$$P_k(\tau, \mu) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P(\tau, \eta, \mu) \widetilde{P}_k(\eta) d\eta , \tag{29}$$

а x_k совпадают с коэффициентами в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра. С учетом ортонормированности полиномов Лежандра из (27) получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k^2(\tau, \mu)}{2k+1} \left[(-1)^k - \frac{\lambda x_k}{2k+1} \right] = 0 . \tag{30}$$

В случае изотропного рассеяния $x_k = \delta_{0k}$, где δ - символ Кронеккера, и вместо (26) имеем

$$(1 - \lambda) P_0^2(\tau, \mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} P_k^2(\tau, \mu) = 0 . \tag{31}$$

Последние формулы могут представить интерес для численных расчетов. Наконец, выкладки, аналогичные проведенным при получении формулы (18), позволяют вывести R-интеграл и для данной задачи

$$(1 - \lambda) \int_0^1 P(\tau, \varsigma, \mu) P(\tau, -\varsigma, \mu') \varsigma^2 d\varsigma = \frac{\lambda}{4} \int_{-1}^1 P(\tau, \varsigma, \mu) \varsigma d\varsigma \int_{-1}^1 \gamma(\varsigma, \varsigma') P(\tau, \varsigma', \mu) \varsigma' d\varsigma' . \tag{32}$$

В заключение остается заметить, что результаты работы без труда могут быть обобщены на случай рассеяния с перераспределением излучения по частотам.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

BILINEAR INTEGRALS OF THE RADIATIVE TRANSFER EQUATION

A.G.NIKOGHOSSIAN

It is shown that the group of the problems of radiation transfer reducible to the source-free problem admits a class of integrals involving the arbitrarily high-order quadratic moments of intensity. On the base of variational principle, we concluded that these integrals including *R*-integral follow from the proper conservation laws. Some results are generalized to the case of non-isotropic scattering.

Key words: *radiative transfer theory:variational formalism:quadratic, bilinear integrals*

ЛИТЕРАТУРА

1. *G.B.Rybicky*, Astrophys. J., **213**, 165, 1977.
2. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **22**, 612, 1978.
3. *A.G.Nikoghossian*, Astrophys. J., **483**, 849, 1997.
4. *В.А.Амбарцумян*, ДАН СССР, **38**, 257, 1943.
5. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
6. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **43**, 463, 2000.
7. *A.G.Nikoghossian*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, **61**, 345, 1999.
8. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **52**, 5, 2009.