

## О НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ДИСКА. III. ЯВЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЯ ЯДРА И СРАВНЕНИЕ МОД ВОЗМУЩЕНИЙ

К.Т.МИРТАДЖИЕВА<sup>1</sup>, С.Н.НУРИТДИНОВ<sup>2</sup>, Ж.К.РУЗИБАЕВ<sup>1,2</sup>,  
МУХАММАД ХАЛАИД<sup>3</sup>

Поступила 27 октября 2010

Принята к печати 16 марта 2011

В данной работе исследована гравитационная неустойчивость основных крупномасштабных мод возмущений при фиксированном значении азимутального волнового числа  $m = 1$  на фоне нелинейно нестационарных дисковых моделей с изотропной и анизотропной диаграммами скоростей с целью изучения проблемы происхождения явления смещения ядра от геометрического центра (или лопсайдности) в спиральных галактиках. Получены нестационарные аналоги дисперсионных уравнений рассмотренных мод возмущений. Построены критические диаграммы начального виртуального отношения от параметра вращения моделей для каждого случая. Проводился сравнительный анализ инкрементов неустойчивости основных горизонтальных мод возмущений в рамках двух моделей и установлено, что инкремент неустойчивости моды  $m = 1$  с радиальным волновым числом  $N = 3$  в среднем почти всегда имеет явное превосходство относительно других рассматриваемых мод. Анализ полученных результатов показывает, что если начальная полная кинетическая энергия изотропной модели составляет не более, чем 12.4% от начальной потенциальной энергии, то независимо от величины параметра вращения  $\Omega$  всегда имеет место неустойчивость радиальных движений, приводящая к феномену смещенности ядра от геометрического центра. Данная неустойчивость носит аperiодический характер при  $\Omega = 0$ , а при  $\Omega \neq 0$  колебательный характер. На фоне же анизотропной модели такая структура с ядром формируется тогда, когда начальная полная кинетическая энергия модели составляет не более, чем 30.6% от начальной потенциальной энергии.

Ключевые слова: *модели:самогравитирующие диски*

1. *Введение.* В предыдущих частях работы нами были исследованы наиболее интересные типы неустойчивостей горизонтальных [1] и вертикальных [2] мод возмущений на фоне нелинейно неравновесной модели самогравитирующего диска, являющейся нестационарным обобщением равновесного диска Бисноватого-Когана и Зельдовича [3]. В частности, при изучении горизонтальных колебаний в [1] нами был выведен нестационарный аналог дисперсионного уравнения для произвольных секториальных возмущений и отдельно вычислены характеристики неустойчивостей бароподобной и кольцеобразной мод колебаний, которые могут проявляться вместе, чаще всего, в спиральных галактиках с перемычкой.

Среди различных горизонтальных возмущений диска спиральных

галактик важно обратить внимание также на довольно часто наблюдаемое в них явление смещенности ядра от центра галактики. В зарубежных журналах этот феномен называется "лопсайдедностью" (см., например, [4-9] и ссылки в них), что связано с удивительной картиной, где ядро галактики явно смещено от ее геометрического центра и масса одной стороны от ядра заметно больше, чем масса другой, противоположной части данной галактики. Впервые на это явление было указано, по-видимому, в статье [5], которая так и называется "Lopsided galaxies". Согласно статистике [9,10], на сегодняшний день примерно у 30% спиральных галактик явно наблюдается феномен смещенности ядра. Многие авторы стараются обработать данные наблюдений с целью определения значения коэффициента  $A_1$  (см., например, [11]) путем анализа соответствующей гармоники Фурье. А имеющиеся точки зрения на проблему происхождения явления смещения ядра в спиральных галактиках приведены в [12]. Ниже мы указываем еще на одну возможность, связанную с гравитационной неустойчивостью моды возмущения на фоне радиально неравновесной модели самогравитирующего диска, полагая, что данная неустойчивость может возникать на ранней, нестационарной стадии радиально сжимающегося бесстолкновительного диска. Сравнивая же инкременты этой неустойчивости с инкрементами других мод колебаний на примере двух нестационарных моделей с изотропной и анизотропной диаграммами скоростей, мы показываем, что темп неустойчивости, приводящий к проявлению данного феномена, в среднем, почти всегда имеет явное превосходство. Отмечены также возможные приложения результатов и их различия от соответствующих стационарных моделей.

2. *Основные формулы и уравнения.* Как и ранее [1,2], в исходном состоянии мы будем рассматривать нелинейно нестационарные фазовые модели бесстолкновительного диска с изотропной

$$\Psi_1 = \frac{\sigma_0}{2\pi\sqrt{1-\Omega^2}} \left[ \frac{1-\Omega^2}{\Pi^2} \left( 1 - \frac{r^2}{\Pi^2} \right) - (v_r - v_a)^2 - (v_{\perp} - v_b)^2 \right]^{-1/2} \cdot \chi(R-r), \quad (1)$$

и анизотропной

$$\Psi_2 = \frac{\sigma_0}{\pi} [1 + \Omega \cdot (x v_y - y v_x)] \cdot \chi \left( \left( 1 - r^2/\Pi^2 \right) \left( 1 - \Pi^2 v_{\perp}^2 \right) - \Pi^2 (v_r - v_a)^2 \right) \quad (2)$$

диаграммами скоростей, имеющие поверхностную плотность

$$\sigma(\bar{r}, t) = \frac{\sigma_0}{\Pi^2(t)} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\Pi^2(t)}} \quad (3)$$

и единый закон радиальных пульсаций  $R(t) = R_0 \Pi(t)$ , где  $\Pi(t) = \frac{1 + \lambda \cos \psi}{1 - \lambda^2}$  есть коэффициент растяжения системы, а время  $t = (\psi + \lambda \sin \psi) / (1 - \lambda^2)^{3/2}$ , причем величина  $\lambda = 1 - (2T/|U|)_0$  характеризует амплитуду пульсации

системы и выражается через значения начального вириального отношения ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ),  $\Omega$  - угловая скорость вращения диска, которая также принимает значения из интервала  $[0; 1]$ ,  $\chi$  - функция Хевисайда. Отметим также, что здесь принята известная нормировка  $\pi^2 G \sigma_0 = 2 R_0$  ( $R_0 = 1$ ), а остальные все обозначения подробно приведены в [1,2].

Налагая на нестационарную модель малое несимметричное возмущение с потенциалом  $\delta\Phi$ , в [1] нами было выведено основное уравнение для вектора смещения центроида  $\overline{\delta\vec{r}}$ :

$$\Lambda \overline{\delta\vec{r}} = \Pi^3(\psi) \left[ \frac{\partial(\delta\hat{\Phi})}{\partial \vec{r}} \right], \quad (4)$$

где черта сверху означает усреднение по пространству скоростей, а оператор  $\Lambda$  имеет следующий вид:

$$\Lambda = (1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2}{d\psi^2} + \lambda \sin \psi \frac{d}{d\psi} + 1. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) может быть представлено в интегральной форме

$$\overline{\delta\vec{r}} = \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) \left[ \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial \vec{r}} \right] d\psi_1, \quad (6)$$

причем  $S(\psi, \psi_1)$  является аналогом функции Грина для однородного уравнения, соответствующего (4). Задавая выражение для  $\delta\Phi$ , можно вывести нестационарный аналог дисперсионного уравнения (НАДУ).

**3. Некоторые свойства горизонтальных возмущений и способ вывода НАДУ.** Отметим сначала некоторые свойства горизонтальных возмущений и покажем для них один из простейших способов вывода НАДУ. Для этого заметим, что эти возмущения не зависят от  $z$  координаты и могут быть описаны только двумя индексами, т.е. для вывода НАДУ, так же, как в соответствующей стационарной модели, достаточно брать возмущение потенциала в виде [1]

$$\delta\Phi = A_{mN}(\psi) r^{N-m} (x+iy)^m, \quad \left( r = \sqrt{x^2 + y^2} \right). \quad (7)$$

Здесь  $m$  и  $N$  - соответственно, азимутальное и радиальное волновые числа, а неизвестный коэффициент  $A_{mN}$  в отличие от случая стационарных моделей, у нас является функцией от времени.

Анализ интегрального представления (6) основного уравнения (4) показывает, что при равноправности направлений  $x$  и  $y$  осреднение градиентов  $\partial\delta\Phi/\partial\vec{r}$  по скоростям дает те же степени по координатам, как было до этого, а точнее

$$\left. \begin{aligned} \overline{\delta x} &= B_1 r^{N-m} (x+iy)^{m-1} + B_2 r^{N-m-2} x (x+iy)^m \\ \overline{\delta y} &= i B_1 r^{N-m} (x+iy)^{m-1} + B_2 r^{N-m-2} y (x+iy)^m \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  - некоторые функции от  $\psi$ . Отклик плотности  $\delta\sigma$  вычисляем

по формуле

$$\delta\sigma = -\frac{\partial(\sigma\overline{\delta x})}{\partial x} - \frac{\partial(\sigma\overline{\delta y})}{\partial y}. \quad (9)$$

Подставляя (3) и (8) в (9), находим

$$\delta\sigma = \frac{\sigma_0}{\xi \cdot \Pi^4} r^{N-m} (x+iy)^m [(N-m+1)B_1 + (N+1)B_2], \quad \xi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\Pi^2}}. \quad (10)$$

Однако из теории потенциала диска известно [13,14], что возмущению плотности

$$\delta\sigma = \frac{\sigma_0 \Pi}{\xi} P_N^m(\xi) e^{im\varphi} \quad (11)$$

соответствует возмущение потенциала

$$\delta\Phi = 2\Pi^2 \gamma_{mN} P_N^m(\xi) e^{im\varphi}, \quad \gamma_{mN} = \frac{(N+m-1)!!(N-m-1)!!}{(N+m)!!(N-m)!!}. \quad (12)$$

Сравнивая между собой формулы (7), (10), (11) и (12), получим следующее искоемое НАДУ

$$A_{mN}(\psi) = \frac{2}{\Pi^3(\psi)} \gamma_{mN} [(N-m+1)B_1(\psi) + (N+1)B_2(\psi)]. \quad (13)$$

Остается определять функции  $B_1(\psi)$  и  $B_2(\psi)$  отдельно для рассматриваемых моделей и конкретных мод колебаний.

4. *Анализ крупномасштабных мод для модели (1)*. Поскольку здесь нас интересует прежде всего явление смещения ядра, далее при фиксированном значении азимутального волнового числа  $m=1$ , рассмотрим крупномасштабные моды колебаний  $N=1, 3$  и  $5$ .

4.1. *Случай  $m=1, N=1$* . В этом случае  $\delta\Phi = A_{11}(x+iy)$ , а

$$\overline{\delta x} = \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{11}(\psi_1) d\psi_1 = -i\overline{\delta y}. \quad (14)$$

Сопоставляя (14) с (8), имеем  $B_2=0, B_1=\overline{\delta\sigma}$ . Тогда из (13) следует, что

$$A_{11}(\psi) = \frac{1}{\Pi^3} \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{11}(\psi_1) d\psi_1. \quad (15)$$

Согласно (4) и (6), можно перейти от интегральной формы (15) обратно к дифференциальной. Отсюда находим простое уравнение

$$\Lambda A_{11}(\psi) = A_{11}(\psi), \quad (16)$$

откуда, с учетом (5), получим

$$(1 + \lambda \cos\psi) \frac{dF}{d\psi} + \lambda \sin\psi \cdot F = 0, \quad (17)$$

причем  $F = dA_{11}/d\psi$ . Интегрируя (17), находим точное решение

$$F = c_1(1 + \lambda \cos\psi), \quad A_{11} = c_1(\psi + \lambda \sin\psi) + c_2, \quad (18)$$

где  $c_i$  - некоторые постоянные. Как видно, мода колебаний  $m=1, N=1$  является устойчивой и связана с тривиальным смещением всей системы

как целого, что не вызывает никакой неустойчивости.

Следует также отметить, что данная мода колебаний в случае стационарной модели детально рассмотрена Г.С.Бисноватым-Коганом в [15], где доказана ее устойчивость для случая  $\lambda = 0$ .

4.2. *Случай  $m = 1, N = 3$ .* Как известно [6], неустойчивость данной моды колебаний смещает кинематический центр системы и вызывает деформацию, напоминающую результат проекции яйца на плоскость  $(x, y)$ . Вообще говоря, эта мода колебаний довольно хорошо изучена для различных стационарных моделей (см. например, [6,14] и ссылки в них), а на фоне нестационарной пульсирующей сферической модели рассмотрена одним из авторов данной работы в статье [16]. Можно утверждать, что неустойчивость этой моды вносит весомый вклад в явление смещения ядра от геометрического центра системы.

Поскольку в этом случае

$$\delta\Phi = A_{13}(\psi) \cdot r^2(x + iy), \tag{19}$$

расчет компонент

$$\overline{\delta x} = \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{13}(\psi_1) \left[ 2x_1(x_1 + iy_1) + (x_1^2 + y_1^2) \right] d\psi_1, \tag{20}$$

$$\overline{\delta y} = \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{13}(\psi_1) \left[ 2y_1(x_1 + iy_1) + i(x_1^2 + y_1^2) \right] d\psi_1, \tag{21}$$

требует использования процедуры осреднения по скоростям. Согласно [1], мы имеем, в частности

$$\overline{x_1(x_1 + iy_1)} = x(x + iy) H_\alpha^2 + [x(u + i\vartheta) + (x + iy)u] H_\alpha H_\beta + \overline{u(u + i\vartheta)} H_\beta^2, \tag{22}$$

$$\overline{x_1^2 + y_1^2} = (x^2 + y^2) H_\alpha^2 + 2(x\bar{u} + y\bar{\vartheta}) H_\alpha H_\beta + (\bar{u}^2 + \bar{\vartheta}^2) H_\beta^2, \tag{23}$$

где  $u$  и  $\vartheta$  - компоненты скорости по  $x$  и  $y$ , соответственно,

$$H_\alpha = \frac{\cos\psi(\lambda + \cos\psi_1) + \sin\psi\sin\psi_1}{1 + \lambda\cos\psi}, \tag{24}$$

$$H_\beta = (1 - \lambda^2)^{3/2} [\sin\psi_1(\lambda + \cos\psi) - \sin\psi(\lambda + \cos\psi_1)].$$

Как видно, в данном случае будет еще проще проводить расчеты, если воспользоваться результатами усреднений по скоростям, выполненных нами в [1]. Не повторяя их здесь снова и подставляя эти результаты в (20) и (21), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \overline{\delta x} = & \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{13}(\psi_1) \left\{ [2x(x + iy) + x^2 + y^2] H_\alpha^2 + \frac{2}{\Pi^2(\psi)} \cdot \right. \\ & \left. [x^2(i\Omega - 3c) + 2ixy(i\Omega - c) - y^2(i\Omega + c)] H_\alpha H_\beta + \frac{1}{\Pi^4(\psi)} \left[ \frac{4(1 - \Omega^2)}{3} \right. \right. \\ & \left. \left. (\Pi^2(\psi) - r^2) + 3(cx + \Omega y)^2 + (cy - \Omega x)^2 + 2i(cx + \Omega y)(cy - \Omega x) \right] H_\beta^2 \right\} d\psi_1, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\overline{\delta y} = \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{13}(\psi_1) \left\{ [2y(x+iy) + i(x^2+y^2)] H_{\alpha}^2 + \frac{2}{\Pi^2(\psi)} \right. \\ \left. [-ix^2(c+i\Omega) + 2xy(i\Omega-c) + iy^2(i\Omega-3c)] H_{\alpha} H_{\beta} + \frac{1}{\Pi^4(\psi)} \left[ \frac{4i(1-\Omega^2)}{3} \right. \right. \quad (26)$$

$$\left. \left. (\Pi^2(\psi) - r^2) + 3i(cy - \Omega x)^2 + i(cx + \Omega y)^2 + 2(cx + \Omega y)(cy - \Omega x) \right] H_{\beta}^2 \right\} d\psi_1,$$

где  $c \equiv \lambda \sin \psi / \sqrt{1 - \lambda^2}$ .

Теперь, вычислим отклик плотности  $\delta\sigma$  по формуле (9). Тогда, опуская из результата члены низшей степени по  $r$ , мы имеем

$$\delta\sigma = \frac{\sigma_0}{\Pi^4(\psi)} \xi^{-1} r^2 (x+iy) \int_{-\infty}^{\psi} B(\psi, \psi_1) \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{13}(\psi_1) d\psi_1. \quad (27)$$

Здесь через  $B(\psi, \psi_1)$  обозначено следующее выражение

$$B(\psi, \psi_1) \equiv 11 H_{\alpha}^2 - \frac{2}{\Pi^2(\psi)} (11c - 5i\Omega) H_{\alpha} H_{\beta} + \frac{1}{\Pi^4(\psi)} (11c^2 + 5\Omega^2 - 10i\Omega c - 4) H_{\beta}^2. \quad (28)$$

С другой стороны, возмущение плотности  $\delta\sigma$ , согласно (11), равно

$$\delta\sigma = \sigma_0 \Pi(\psi) \cdot \xi^{-1} \cdot P_3^1(\xi) e^{i\varphi}, \quad (29)$$

чему соответствует следующее возмущение потенциала из (12):

$$\delta\Phi = \frac{3}{8} \Pi^2 P_3^1(\xi) \cdot e^{i\varphi}. \quad (30)$$

Сопоставляя формулы (19), (27), (29) и (30) между собой, получим НАДУ рассматриваемой моды возмущений в интегральной форме для модели (1)

$$A_{13}(\psi) = \frac{3}{8\Pi^3(\psi)} \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{13}(\psi_1) B(\psi, \psi_1) d\psi_1. \quad (31)$$

Пусть

$$\ell_{\tau}(\psi) = \int_{-\infty}^{\psi} (1 + \lambda \cos \psi_1)^3 S(\psi, \psi_1) A_{13}(\psi_1) (\lambda + \cos \psi_1)^{2-\tau} (\sin \psi_1)^{\tau} d\psi_1, \quad (\tau = 0-2) \quad (32)$$

Тогда от (31) и (32) можно перейти к дифференциальной форме НАДУ

$$\Lambda \ell_{\tau}(\psi) = \frac{3}{8(1 + \lambda \cos \psi)^4} K(\psi) (\lambda + \cos \psi)^{2-\tau} \sin^{\tau} \psi, \quad (33)$$

где

$$K(\psi) = \left[ 11(\lambda + \cos \psi)^2 + (5\Omega^2 - 4)(1 - \lambda^2) \sin^2 \psi - 10i\Omega \sqrt{1 - \lambda^2} (\lambda + \cos \psi) \sin \psi \right] \ell_0(\psi) + \\ + \left\{ 10(3 - \Omega^2)(1 - \lambda^2)(\lambda + \cos \psi) \sin \psi + 10i\Omega \sqrt{1 - \lambda^2} [(\lambda + \cos \psi)^2 - (1 - \lambda^2) \sin^2 \psi] \right\} \ell_1(\psi) + \\ + \left[ 11(1 - \lambda^2)^2 \sin^2 \psi + (5\Omega^2 - 4)(1 - \lambda^2)(\lambda + \cos \psi)^2 + 10i\Omega (1 - \lambda^2)^{3/2} (\lambda + \cos \psi) \sin \psi \right] \ell_2(\psi).$$

Из-за наличия мнимой части в выражении для  $K(\psi)$  НАДУ (33) представляет собой систему дифференциальных уравнений двенадцатого порядка, которая не поддается аналитическому рассмотрению. Поэтому

она исследована нами численно методом устойчивости периодических решений [1,2,17].

С помощью полученных результатов нами построена зависимость критического значения начального вириального отношения от параметра вращения модели (рис.1). Из рис.1 видно, что для невращающейся модели неустойчивость имеет место, если  $0 \leq (2\dot{O}/|U|)_0 \leq 0.888$ , причем внутри данного интервала имеется очень узкая зона устойчивости (0.248; 0.252). Данная зона

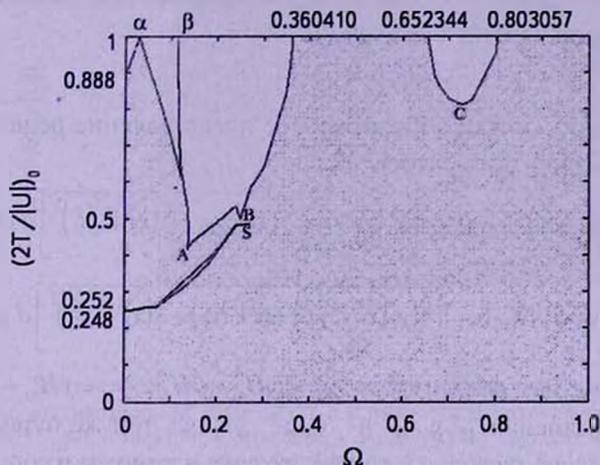


Рис.1. Критическая зависимость начального вириального отношения от параметра вращения для изотропной модели (1) в случае моды возмущений  $m=1, N=3$ . Область неустойчивости заштрихована, а экстремальные точки  $\alpha = 0.029365$ ,  $\beta = 0.114915$ ,  $A(0.136; 0.414)$ ,  $B(0.250; 0.499)$ ,  $C(0.727; 0.812)$ ,  $S(0.270; 0.484)$ .

устойчивости тянется до значения параметра вращения  $\Omega = 0.270$ . Расчеты показывают, что при  $\Omega = 0$  мы имеем четыре области неустойчивости, а именно: две области колебательной неустойчивости  $0.484 \leq (2\dot{O}/|U|)_0 \leq 0.888$ ,  $0.253 \leq (2\dot{O}/|U|)_0 \leq 0.320$  и две области аперiodической неустойчивости  $0.330 \leq (2\dot{O}/|U|)_0 \leq 0.483$ ,  $0 \leq (2\dot{O}/|U|)_0 \leq 0.248$ .

А когда модель является вращающейся, отмечается наличие лишь колебательной неустойчивости и вращение в основном действует дестабилизирующим образом. В области слабого вращения маргинальная кривая доходит до точки ( $\Omega = 0.029365, (2\dot{O}/|U|)_0 \cong 1$ ) и образует подобие точки ветвления. Надо отметить, что эта точка является устойчивой в рамках линейного приближения, а при малом отклонении от этой точки проявляется нелинейная неустойчивость. Таким образом, возникает некоторый нелинейный эффект по отношению к стационарной модели при наложении на нее возмущения с конечной амплитудой. Очевидно, этот эффект связан со сложным резонансом между частотами коллективных движений линейной теории и нелинейной пульсации системы.

Интересно, что во второй раз маргинальная кривая стремится к аналогичному состоянию при  $\Omega = 0.114915$ . Точность расчетов дает следующее

значение начального вириального отношения:  $(2\dot{\Omega}/|U|)_0 \cong 0.9896$ . В областях  $0.360410 \leq \Omega \leq 0.652344$  и  $\Omega \geq 0.803057$  мода возмущения (1;3) неустойчива для произвольного значения начального вириального отношения. В частном случае  $\lambda = 0$  наши расчеты совпадают с результатами неустойчивости равновесной модели в линейном приближении (см., например, [13,18] и ссылки там).

4.3. *Случай  $m = 1, N = 5$ .* Этот случай, в принципе, также можно отнести к категории крупномасштабных мод колебаний. Для данной моды потенциал возмущения имеет следующий вид:

$$\delta\Phi = A_{15}(\psi)r^4(x+iy). \quad (34)$$

Подставляя (34) в (6), напишем интегральное представление решения (6) по отдельным компонентам вектора  $\delta\vec{r}$ :

$$\overline{\delta x} = \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{15}(\psi_1) \left[ 4x_1(x_1^2 + y_1^2)(x_1 + iy_1) + (x_1^2 + y_1^2)^2 \right] d\psi_1, \quad (35)$$

$$\overline{\delta y} = \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{15}(\psi_1) \left[ 4y_1(x_1^2 + y_1^2)(x_1 + iy_1) + i(x_1^2 + y_1^2)^2 \right] d\psi_1. \quad (36)$$

Используя известные нам зависимости  $x_1 = xH_\alpha + uH_\beta$ ,  $y_1 = yH_\alpha + \vartheta H_\beta$ , а также вычисляя усреднения  $\overline{u^3 \vartheta}$ ,  $\overline{u^2 \vartheta^2}$ ,  $\overline{u \vartheta^3}$ ,  $\overline{u^4}$ ,  $\overline{\vartheta^4}$  тем же путем, как в [1] и здесь, выше, а затем, переходя к расчету отклика плотности и сопоставляя полученный результат с его теоретическим, находим НАДУ моды (1; 5) для модели (1) в интегральной форме

$$A_{15}(\psi) = \frac{15}{64\Pi^3(\psi)} \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{15}(\psi_1) Q(\psi, \psi_1) d\psi_1, \quad (37)$$

где

$$Q(\psi, \psi_1) \equiv 29H_\alpha^4 + h_1H_\alpha^3 \frac{H_\beta}{\Pi^2(\psi)} + h_2H_\alpha^2 \frac{H_\beta^2}{3\Pi^4(\psi)} + h_3H_\alpha \frac{H_\beta^3}{\Pi^6(\psi)} + h_4 \frac{H_\beta^4}{\Pi^8(\psi)}, \quad (38)$$

причем

$$h_1 = 28i\Omega - 116c; \quad h_2 = 174c^2 + 98\Omega^2 - 68 - 84ic\Omega;$$

$$h_3 = 136c - 196c\Omega^2 - 116c^3 - 56i\Omega + 84i\Omega^3 + 84ic^2\Omega;$$

$$h_4 = 8 - 28\Omega^2 + 21\Omega^4 - 68c^2 + 98c^2\Omega^2 + 29c^4 + 56ic\Omega - 84ic\Omega^3 - 28ic^3\Omega.$$

По аналогии (31) с (33) легко написать НАДУ (37) в дифференциальной форме. Затем методом устойчивости периодических решений [17] находим критическую зависимость между начальным вириальным отношением  $(2\dot{\Omega}/|U|)_0$  и параметром вращения  $\Omega$  (см. рис.2).

Как видно из рис.2, в области  $0.2098 < (2\dot{\Omega}/|U|)_0 < 0.2163$ ,  $0 \leq \Omega \leq 0.06$  имеется полуостров устойчивости. Когда модель (1) не вращается, у нас имеется пять чередующихся областей неустойчивости, точнее в интервалах  $0 < (2\dot{\Omega}/|U|)_0 < 0.198$ ,  $0.293 < (2\dot{\Omega}/|U|)_0 < 0.304$  неустойчивость носит аperiodический характер, а в интервалах  $0.199 < (2\dot{\Omega}/|U|)_0 < 0.2098$ ,

$0.2164 < (2\dot{\mathcal{O}}/|U|)_0 < 0.292$  и  $0.305 < (2\dot{\mathcal{O}}/|U|)_0 < 0.4705$  - колебательный.

Но при  $\Omega \neq 0$  здесь также мы имеем только колебательную неустой-

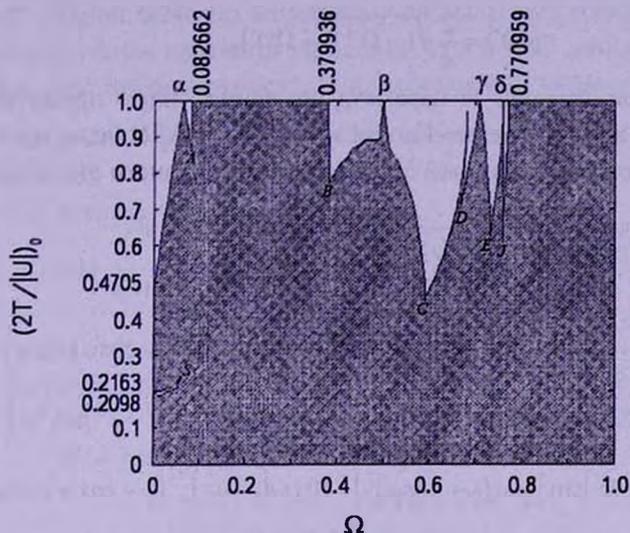


Рис.2. Критическая зависимость начального вириального отношения от параметра вращения для изотропной модели (1) в случае моды возмущений  $m = 1$ ,  $N = 5$ . Здесь  $\alpha = 0.06392$ ,  $\beta = 0.498653$ ,  $\gamma = 0.70851$ ,  $\delta = 0.759242$ , A(0.082; 0.860), B(0.382; 0.770), C(0.592; 0.450), D(0.666; 0.700), E(0.732; 0.625), J(0.759; 0.610), S(0.060; 0.240).

чивость. Вращение модели играет в основном дестабилизирующую роль, кроме интервала  $0.498 < \Omega < 0.709$ . В интервалах  $0.082662 \leq \Omega \leq 0.379936$  и  $0.770959 \leq \Omega \leq 1.0$  модель (1) неустойчива относительно моды возмущения (1;5) при произвольном значении начального вириального отношения. При  $(2\dot{\mathcal{O}}/|U|)_0 > 0.45$  области устойчивости и неустойчивости чередуются. В состоянии  $(2\dot{\mathcal{O}}/|U|)_0 = 1$  наблюдаются критические значения  $\Omega = 0.082662$ ,  $0.379936$ ,  $0.770959$ , которые соответствуют линейной теории устойчивости равновесной модели [13,14,18]. А в точках  $\Omega = 0.06392$ ,  $0.498653$ ,  $0.70851$ ,  $0.759542$  имеют место некоторые резонансные неустойчивости только в рамках нелинейной модели (1).

## 5. Крупномасштабные моды возмущения анизотропного диска (2).

5.1. *Случай  $m = 1$ ,  $N = 1$ .* Из формул и уравнений этой моды для изотропной модели (см. здесь (14)-(18)) следует, что результат об устойчивости имеет место также и для модели (2).

5.2. *Случай  $m = 1$ ,  $N = 3$ .* Как было отмечено в [2], путем осреднения изотропной модели (1) по параметру вращения  $\Omega$ , была получена анизотропная модель (2). Точно таким же способом, используя НАДУ (33) изотропной модели, можно легко получить НАДУ моды (1;3) для анизотропной модели (2) без повторного выполнения необходимых

громоздких расчетов. Для этого, подставим в НАДУ (33)  $\Omega = \Omega'$  и умножим его на следующую весовую функцию [2]

$$\rho(\Omega') = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \Omega'^2} (1 + \Omega\Omega'), \quad (39)$$

где  $\Omega$  опять принимается за параметр вращения. Затем проинтегрируем результат по  $\Omega'$  в интервале от  $-1$  до  $+1$  и получим НАДУ моды возмущения (1: 3) исследуемой анизотропной модели нестационарного диска (2):

$$\Delta \ell_r(\psi) = \frac{3}{32(1 + \lambda \cos \psi)^4} G(\psi) (\lambda + \cos \psi)^{2-r} \sin^r \psi, \quad (40)$$

где

$$G(\psi) = \left\{ 11 \left[ 4(\lambda + \cos \psi)^2 - (1 - \lambda^2) \sin^2 \psi \right] - 10 i \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} (\lambda + \cos \psi) \sin \psi \right\} \ell_0(\psi) + \\ + 10 \left\{ 11(1 - \lambda^2)(\lambda + \cos \psi) \sin \psi + i \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} \left[ (\lambda + \cos \psi)^2 - (1 - \lambda^2) \sin^2 \psi \right] \right\} \ell_1(\psi) + \\ + \left\{ 11(1 - \lambda^2) \left[ 4(1 - \lambda^2) \sin^2 \psi - (\lambda + \cos \psi)^2 \right] + 10 i \Omega (1 - \lambda^2)^{3/2} (\lambda + \cos \psi) \sin \psi \right\} \ell_2(\psi).$$

Как и в [2], в численном расчете НАДУ (40) целесообразно заменить  $\Omega$  анизотропного диска на  $4\Omega$  для точного сопоставления результатов по параметру  $\Omega$  и соответствующих особенностей изотропной и анизотропной моделей.

Критическая зависимость начального вириального отношения  $(2\dot{\sigma}/|U|)_0$  от параметра вращения  $\Omega$  приведена на рис.3. Как видно из рисунка, при малых значениях параметра вращения внутри неустойчивой области наблюдаем "полуостров" устойчивости. Анализ полученных результатов показывает, что при  $\Omega = 0$ , "полуостров" разделяет зоны с разным типом неустойчивости: в одной области  $0.808 < (2\dot{\sigma}/|U|)_0 \leq 0.828$  имеет место колебательная неустойчивость, а в другой  $0 \leq (2\dot{\sigma}/|U|)_0 \leq 0.654$  - аperiodическая. Когда

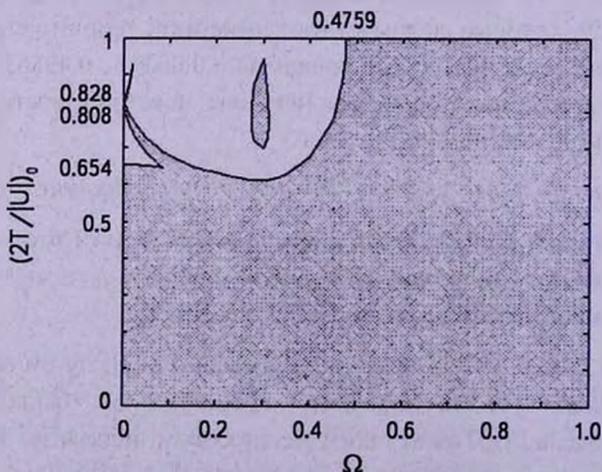


Рис.3. Критическая зависимость начального вириального отношения от параметра вращения для анизотропной модели (2) в случае моды возмущений  $m = 1$ ,  $N = 3$ .

$\Omega \neq 0$ , имеем дело только с колебательной неустойчивостью. В интервале  $0.275003 \leq \Omega \leq 0.312495$  появляется остров неустойчивости в виде лепестка с длиной, равной 0.246 по начальному вириальному параметру. Наконец, начиная со значения параметра вращения  $\Omega \geq 0.4759$ , анизотропная модель полностью неустойчива относительно исследуемой моды возмущения (1;3).

5.3. Случай  $m = 1, N = 5$ . Способом, описанным выше, и через уравнение (37) можно получить НАДУ моды (1;5) для анизотропной модели (2) в следующем виде:

$$A_{15}^*(\psi) = \frac{15}{64\Gamma^3(\psi)} \int_{-\infty}^{\psi} \Gamma^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{15}^*(\psi_1) D(\psi, \psi_1) d\psi_1, \quad (41)$$

где

$$D(\psi, \psi_1) \equiv 29 H_{\alpha}^4 + h_1^* H_{\alpha}^3 \frac{H_{\beta}}{\Gamma^2(\psi)} + h_2^* H_{\alpha}^2 \frac{H_{\beta}^2}{3\Gamma^4(\psi)} + h_3^* H_{\alpha} \frac{H_{\beta}^3}{\Gamma^6(\psi)} + h_4^* \frac{H_{\beta}^4}{\Gamma^8(\psi)},$$

$$h_1^* = 7i\Omega - 116c; \quad h_2^* = 174c^2 - 43.5 - 21ic\Omega;$$

$$h_3^* = 87c - 116c^3 - 3.5i\Omega + 21ic^2\Omega;$$

$$h_4^* = 3.625 - 43.5c^2 + 29c^4 + 3.5ic\Omega - 7ic^3\Omega.$$

Переходя от (41) к дифференциальной форме НАДУ, мы нашли зависимость критического значения начального вириального отношения от параметра вращения модели (2) (рис.4).

Критическая диаграмма показывает, что с увеличением параметра вращения область неустойчивости плавно возрастает с дополнительными ответвлениями. Однако и здесь, в области  $0.4287 < (2\delta/|U|)_0 < 0.4721$ ,  $0 \leq \Omega < 0.23$ , мы наблюдаем узкую зону устойчивости. Как и в изотропной модели, здесь также при  $\Omega = 0$  имеет место чередование четырех областей неустойчивостей с периодическим и аperiodическим характерами. А именно, интервалы  $0 < (2\delta/|U|)_0 < 0.075$  и  $0.304 < (2\delta/|U|)_0 < 0.4287$  соответствуют

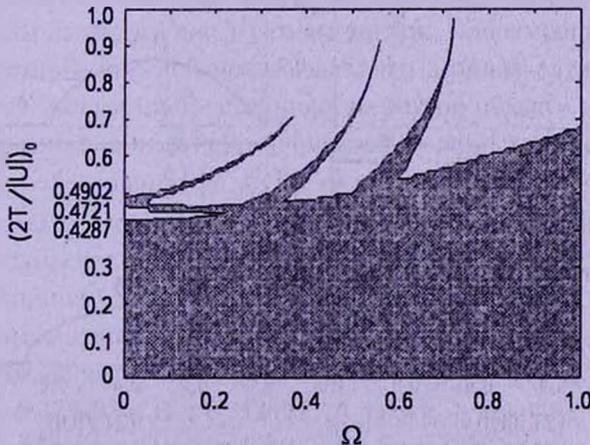


Рис.4. Критическая зависимость начального вириального отношения от параметра вращения для анизотропной модели (2) в случае моды возмущений  $m = 1, N = 5$ .

апериодической, а  $0.076 < (2\partial/U)_0 < 0.304$  и  $0.4721 < (2\partial/U)_0 < 0.4902$  - колебательной неустойчивости.

### 6. Обсуждение результатов.

6.1. Сравнение мод (1;3) и (1;5). Прежде всего, интересно сравнить инкременты неустойчивостей мод (1;3) и (1;5), так как они дают нам, в

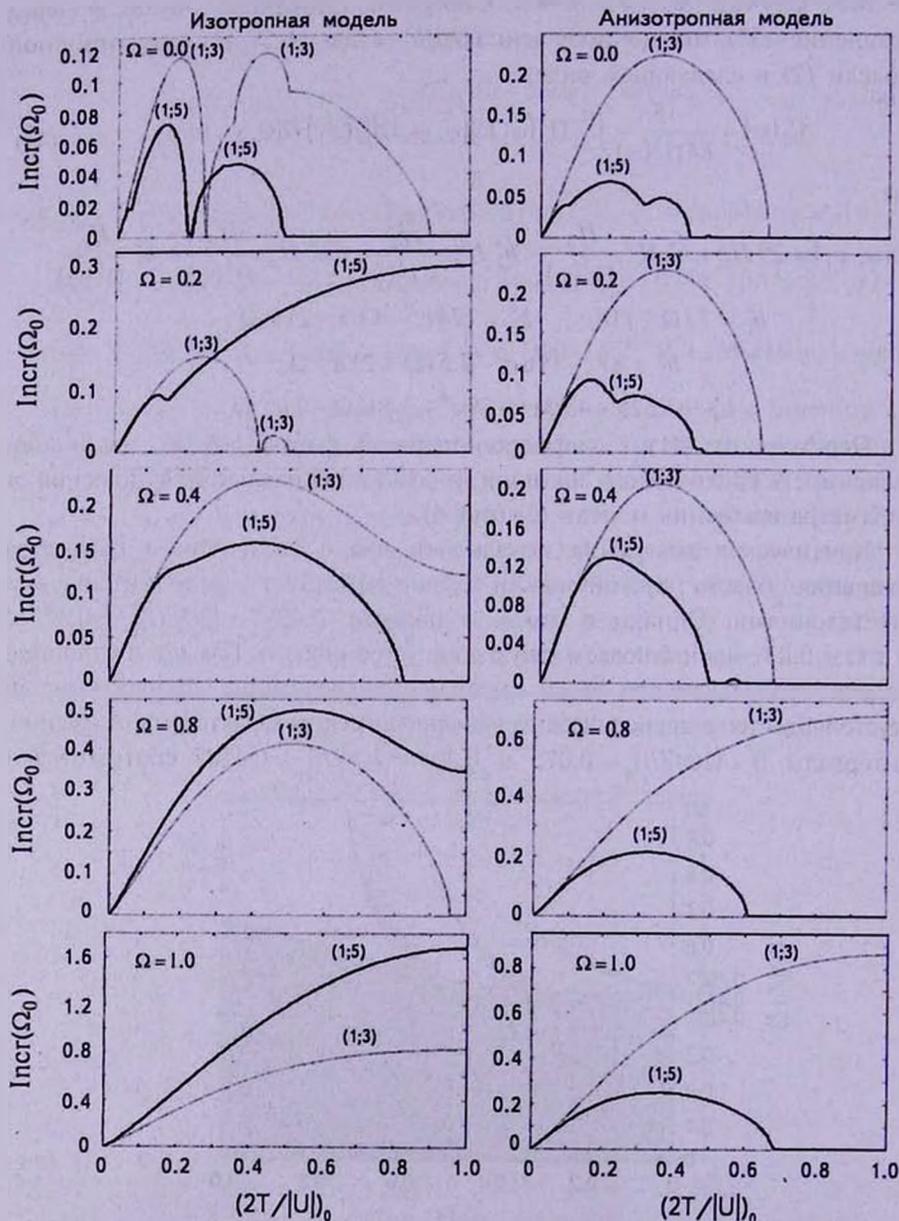


Рис.5. Сравнение инкрементов неустойчивостей мод возмущений (1;3) и (1;5) на фоне изотропной и анизотропной нелинейных моделей для различных значений  $\Omega$ .

частности, характерные времена проявления соответствующих неустойчивостей. На рис.5 видно, что на фоне нелинейной изотропной модели (1) мода (1;3) является лидирующей при  $\Omega = 0$  и  $0.4 \leq \Omega < 0.8$  для всех значений начального вириального отношения. Но при  $0 < \Omega \leq 0.3$  она доминирует лишь при умеренных значениях  $(2\dot{\phi}/|U|)_0$ . Когда  $\Omega > 0.8$  мода (1;5) имеет больший инкремент неустойчивости по сравнению с модой (1;3). Однако на фоне анизотропной модели (2) мода (1;3) всегда доминирует над модой (1;5). Таким образом, можно заключить, что в среднем мода (1;3) является более неустойчивой по сравнению с модой (1;5). Исходя из этого, в следующем пункте мы будем сравнивать поведение бароподобной и кольцевой мод с модой (1;3), которая больше всего может отвечать за лопсайдендную структуру.

При сравнении маргинальных зависимостей мод (1;3) и (1;5) на фоне изотропной модели сразу бросается в глаза то, что в обоих случаях наблюдается чередование областей устойчивости и неустойчивости, а также наличие узких полуостровов устойчивостей (рис.1 и рис.2). Для обеих мод мы имеем точки ветвления на оси абсцисс, где возникает нелинейный эффект, связанный со сложным резонансом между частотами коллективных движений линейной теории и нелинейных колебаний модели (1).

Если обратить внимание на рис.3 и рис.4, то заметим, что критические диаграммы рассматриваемых мод (1;3) и (1;5) для анизотропной модели (2) сильно отличаются друг от друга. Например, для моды (1;3) имеется остров неустойчивости, что явно отсутствует в другом случае. Кроме того, здесь при  $\Omega > 0.48$  модель (2) становится полностью неустойчивой, а в моде (1;5) область неустойчивости плавно возрастает по мере увеличения параметра вращения. Однако для обеих мод мы наблюдаем полуостров устойчивости.

Поскольку выше мы обнаружили, что мода (1;3) является лидирующей, то также имеет смысл сравнить между собой маргинальные зависимости данной моды на рис.1 и рис.3. Сравнение этих зависимостей для изотропной и анизотропной моделей показывает, что в обоих случаях при  $\Omega = 0$  у нас имеется "полуостров" устойчивости внутри области неустойчивости и два типа гравитационных неустойчивостей на разных интервалах начального вириального отношения  $(2\dot{\phi}/|U|)_0$ : колебательная и апериодическая.

А когда  $\Omega \neq 0$ , обе эти модели обладают только колебательной неустойчивостью относительно моды (1;3) и вращение дает дестабилизирующий эффект. Разница маргинальных зависимостей состоит, в частности, в том, что на фоне анизотропной модели наблюдается остров неустойчивости в области устойчивости, который расположен в интервале значений параметра вращения  $0.275003 \leq \Omega \leq 0.312495$ . А также, в отличие от анизотропной модели, в маргинальной зависимости изотропной модели наблюдается резонансное состояние в точке  $\Omega = 0.029365$ ,  $(2\dot{\phi}/|U|)_0 \cong 1$ . Если не

учитывать эту точку, то вблизи  $(2\dot{\Omega}/|U|)_0 \equiv 1$  имеется интервал значений параметра вращения  $0 \leq \Omega < 0.360410$ , где обе модели являются устойчивыми одновременно. И наоборот, если  $\Omega \geq 0.803057$ , то обе модели неустойчивы при произвольном значении начального вириального отношения.

**6.2. Сравнение моды (1;3) с другими крупномасштабными модами горизонтальных колебаний.** Представляет большой интерес также сравнение инкрементов неустойчивости моды (1;3) с инкрементами других мод горизонтальных колебаний изотропной и анизотропной моделей. На рис.6 приведены зависимости инкрементов бароподобной (2;2), кольцевой (0;4) и вышерассмотренной (1;3) мод возмущений от начального вириального отношения для различных значений  $\Omega$ .

Надо сразу отметить один из основных результатов сравнения - факт о том, что на фоне пульсирующей анизотропной модели (2) всегда наиболее сильной модой колебания является (1;3) по сравнению с рассмотренными тремя крупномасштабными модами. Это означает, что смещение ядра относительно геометрического центра системы (или наоборот) имеет место в модели (2) раньше, чем проявление других мод возмущений независимо от значения параметра вращения, а для изотропной модели такую картину можно увидеть только в случае  $0.1 < \Omega \leq 0.5$ . Но, когда  $\Omega > 0.7$ , в модели (1) кольцевая мода стремится быть лидирующей. Лидерство кольцевой моды на фоне изотропной модели можно наблюдать также, когда  $(2\dot{\Omega}/|U|)_0 > 0.3$  и  $\Omega < 0.2$ . В общем случае, с увеличением параметра вращения моделей, рассматриваемые структуры возникают во все более широких диапазонах значений начального вириального отношения и максимальные значения инкрементов неустойчивостей этих структурных мод также постепенно увеличиваются. Таким образом, здесь опять подтверждается вывод о том, что вращение играет явно дестабилизирующую роль в горизонтальных колебаниях.

Когда  $\Omega = 0.5$ , изотропная и анизотропная модели ведут себя одинаково относительно ко всем этим структурным модам. Сравнение изотропной и анизотропной моделей также показывает, что в анизотропной модели формирование рассматриваемых структур подчиняется некоторому закону, а именно, когда  $\Omega < 0.5$  вначале образуется кинематически смещенный центр, затем проявляется кольцевая структура при малых значениях  $(2\dot{\Omega}/|U|)_0$ , а только потом в системе формируется бар, но при больших значениях  $(2\dot{\Omega}/|U|)_0$  последовательность формирования бароподобной и кольцевой структур меняется. В модели (2) мода (1;3) по-прежнему остается лидирующей, а после нее, независимо от значения начального вириального отношения, последовательно проявляются эффекты (0;4) и (2;2) мод. Такую определенную закономерность образования этих крупномасштабных структур в изотропной модели заметить трудно. Отметим, что поведение бароподобной (2;2) моды одинаково в моделях (1) и (2), поскольку НАДУ в обоих случаях являются идентичными [19].

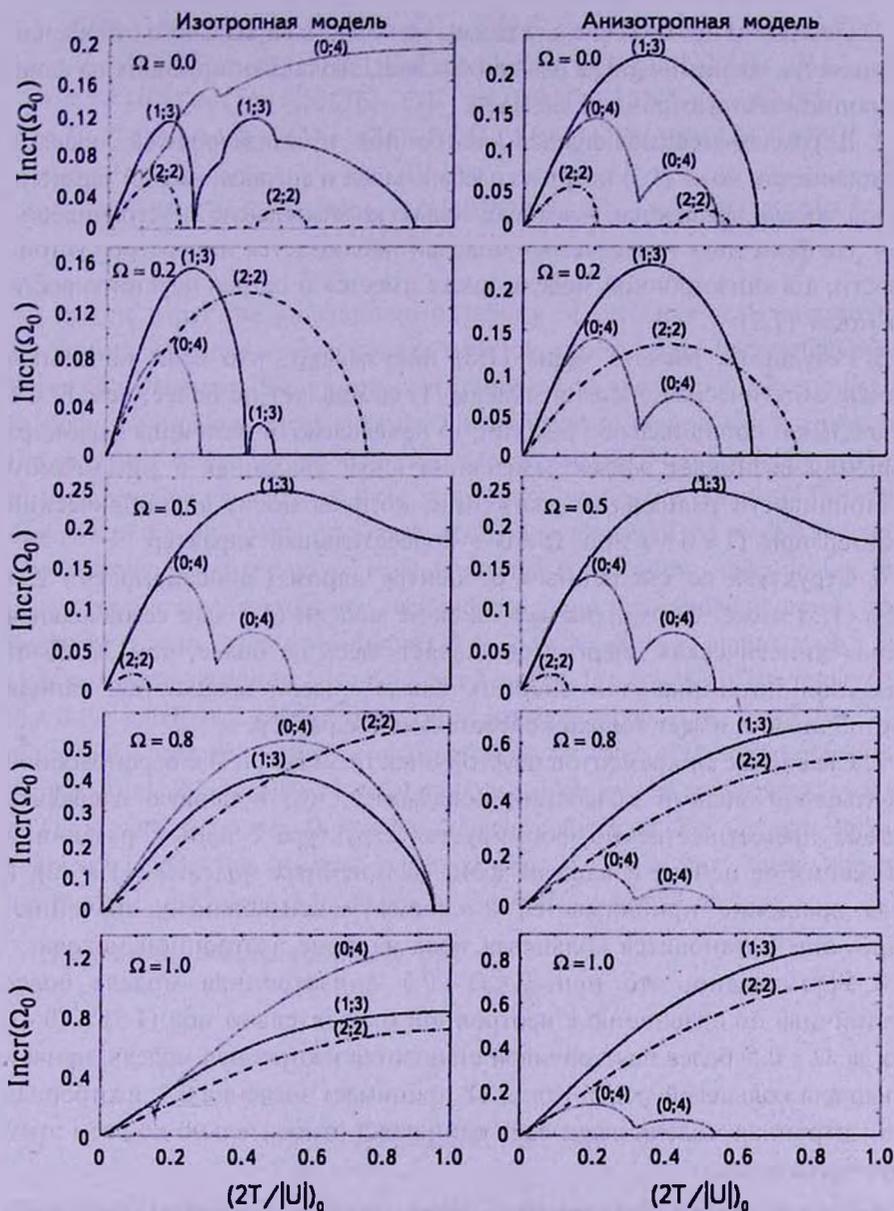


Рис.6. Сравнение инкремента неустойчивости моды (1;3) с инкрементами бароподобной и кольцевой мод возмущений на фоне изотропной и анизотропной моделей для различных значений  $\Omega$ .

**6. Заключение.** Перечислим полученные нами основные результаты в данной работе:

1. Получены НАДУ мод возмущений с  $m=1$  при  $N=3$  и  $N=5$  для изотропной и анизотропной нестационарных моделей самогравитирующего диска.

2. Построены критические диаграммы начального вириального отношения от параметра вращения диска для данных мод, эволюционирующих на фоне изотропной и анизотропной моделей.

3. В рамках невращающихся изотропной и анизотропной моделей неустойчивость моды (1;3) носит и колебательный и аperiodический характер, а когда модели вращаются, мы имеем только колебательную неустойчивость.

4. На фоне двух исследуемых моделей наблюдается полуостров устойчивости, а в анизотропной модели также имеется и остров неустойчивости для моды (1;3).

5. Результаты расчета моды (1;3) показывают, что если начальная полная кинетическая энергия модели (1) составляет не более, чем 12.4% от начальной потенциальной энергии, то независимо от величины параметра вращения возникает эффект смещения ядра, связанная с механизмом неустойчивости радиальных движений, которая носит аperiodический характер при  $\Omega = 0$ , а при  $\Omega \neq 0$  - колебательный характер.

6. Структура со смещенным от центра ядром ("лопсайдность") для моды (1;3) может формироваться на фоне модели (2), если ее начальная полная кинетическая энергия составляет здесь не более, чем 30.6% от начальной потенциальной энергии. Когда модели вращаются, данная неустойчивость имеет только колебательный характер.

7. Сравнение инкрементов неустойчивости моды (1;3) с бароподобной и кольцевой модами колебаний показывает, что в первую очередь в системе преимущественно формируется структура с явным различием положений ее центра и ядра на фоне нелинейных моделей (1) и (2), а когда вращение приближается к своему максимальному значению, лидирующей становится кольцевая мода на фоне изотропной модели.

8. Установлено, что при  $0 < \Omega < 0.5$  анизотропная модель более неустойчива по сравнению с изотропной относительно мод (1;3) и (0;4), а когда  $\Omega > 0.5$  более неустойчивой становится изотропная модель, причем только для кольцевой моды. Когда  $\Omega$  принимает значение 0.5, изотропная и анизотропная модели ведут себя одинаково относительно ко всем этим структурным модам.

Авторы выражают благодарность профессору В.А.Антонову за обсуждение полученных результатов и интерес к работе, а также рецензенту за полезные замечания.

<sup>1</sup> Астрономический институт Академии Наук Республики Узбекистан, e-mail: mkaromat@rambler.ru

<sup>2</sup> Кафедра Астрономии и Астрофизики Национального университета Узбекистана, e-mail: nur200848@mail.ru

<sup>3</sup> Федеральный университет, Карачи, Пакистан

# ON INSTABILITIES OF THE NON-STATIONARY MODEL OF SELF-GRAVITATING DISK. III. PHENOMENON OF LOPSIDEDNESS AND COMPARISON OF PERTURBATION MODES

K.T.MIRTADJIEVA<sup>1</sup>, S.N.NURITDINOV<sup>2</sup>, J.K.RUZIBAEV<sup>1,2</sup>,  
MUHAMMAD KHALID<sup>1</sup>

In this paper the gravitational instability of the large-scale perturbations modes with azimuthal wave number  $m=1$  is investigated on the background of non-linear non-stationary disk models with isotropic and anisotropic velocity diagrams to study the problem of origin of the phenomenon of nucleus displacement from the geometric center (or lopsidedness) in spiral galaxies. Non-stationary analogues of the dispersion equations of these perturbation modes are obtained. The critical diagrams of the initial virial ratio on the rotation parameter of the models are plotted. The instability growth rates of main horizontal perturbation modes in the frame of two models are comparatively analyzed and found that instability growth rate of mode  $m=1$  with radial wave number  $N=3$ , on an average, almost always has a clear superiority relative to other considered modes. The analysis of the results shows that if the initial total kinetic energy of the isotropic model is not more than 12.4% of the initial potential energy then independently on the value of the rotation parameter there is "lopsided" instability of radial motions, which has the non-periodic character at  $\Omega = 0$ , and when  $\Omega \neq 0$  one has oscillatory character. For the non-stationary anisotropic model this structure is formed when the initial total kinetic energy of the model is not more than 30.6% of the initial potential energy.

Key words: *models:gravitating disk*

## ЛИТЕРАТУРА

1. С.Н.Нуритдинов, К.Т.Миртаджиева, Мариам Султана, *Астрофизика*, 51, 487, 2008.
2. С.Н.Нуритдинов, К.Т.Миртаджиева, Икбал Ахмад, Ж.К.Рузибаев, *Астрофизика*, 52, 643, 2009.
3. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович, *Астрофизика*, 6, 387, 1970.
4. H.W.Rix, D.Zariisky, *Astrophys. J.*, 447, 82, 1995.
5. J.E.Baldwin, D.Lynden-Bell, R.Sancisi, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 193, 313, 1980.
6. J.Binney, S.Tremaine, "Galactic dynamics". Princeton University Press, 1987.

7. *D.L.Block, G.Bertin, A.Stockton, P.Grosbol, A.F.M.Moorwood*, *Astron. Astrophys.*, **288**, 365, 1994.
8. *R.H.M.Schoenmakers, R.A.Swaters*, *ASP Conf. Ser.*, **182**, 277, 1999.
9. *C.J.Jog, F.Combes*, *Physics Reports*, **471**, 2, 75, 2009.
10. *D.Zaritsky, H.W.Rix*, *Astrophys. J.*, **477**, 118, 1997.
11. *F.Bournaud, F.Combes, C.J.Jog, I.Puerari*, *Astron. Astrophys.*, **438**, 507, 2005.
12. *M.D.Weinberg*, *Astrophys. J.*, **455**, 31, 1995.
13. *В.А.Антонов*, *Учен. записки ЛГУ*, **32**, 79, 1976.
14. *A.M.Fridman, V.L.Polyachenko*, "Physics of gravitating systems", Springer-Verlag, New-York, 1984.
15. *Г.С.Бисноватый-Коган*, *Астрофизика*, **35**, 271, 1991.
16. *С.Н.Нуритдинов*, *Астрон. ж.*, **62**, 506, 1985; **68**, 763, 1991.
17. *И.Г.Малкин*, "Теория устойчивости движения", М., Наука, 1967.
18. *A.J.Kalnajs*, *Astrophys. J.*, **175**, 63, 1972.
19. *С.Н.Нуритдинов*, "Нелинейные модели и физика неустойчивости неравновесных бесстолкновительных самогравитирующих систем", автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, 1993.