АСТРОФИЗИКА

ТОМ 53 АВГУСТ, 2010 ВЫПУСК 3

УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ДЛЯ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЯНИИ

А.В.ДЕМЕНТЬЕВ

Поступила 10 марта 2010
Принята к печати 26 мая 2010

Рассматривается матричное уравнение переноса, которое описывает многократное резонансное рассеяние излучения в спектральной линии в полубесконечной атмосфере с равномерно распределенными источниками первичного излучения. Для этого уравнения получен матричный нелинейный интеграл, обобщающий двухточечный Q-интеграл Райбики. Частным случаем матричного $\hat{\mathbf{Q}}$-интеграла является уравнение Вольтерра для матричной функции источников рассматриваемой задачи. При доплеровском профиле коэффициента поглощения уравнение Вольтерра решено численно. Для выходящего излучения получены некоторые поляризационные характеристики.

Ключевые слова: *резонансное рассеяние:функция источников: доплеровский профиль*

1. *Введение*. В недавней работе [1] было получено матричное обобщение двухточечного Q-интеграла Райбики и рассмотрены некоторые его приложения к задаче о многократном рэлеевском (молекулярном) рассеянии в полубесконечной атмосфере, в которой равномерно распределены источники частично поляризованного излучения (так называемая стандартная задача). В частности, из матричного $\hat{\mathbf{Q}}$-интеграла было выведено уравнение Вольтерра для матричной функции источников. В настоящей работе мы выводим это уравнение для матричной функции источников в аналогичной задаче о многократном резонансном рассеянии в спектральной линии. При этом, в отличие от [1], мы используем матричное уравнение переноса, записанное в несколько ином виде, а также другим способом определяем матричный двухточечный $\hat{\mathbf{Q}}$-момент, входящий в соотношение для $\hat{\mathbf{Q}}$-интеграла. Для доплеровского профиля коэффициента поглощения мы приводим результаты расчета матричной функции источников, полученные на основе численного решения уравнения Вольтерра. С помощью найденной матричной функции источников рассчитаны поляризационные характеристики выходящего из атмосферы излучения.

2. *Основные уравнения*. Поле диффузного излучения в рассматриваемой задаче может быть найдено с помощью матрицы Стокса $\hat{\mathbf{I}}(\tau, z)$,

которая является решением матричного уравнения переноса

$$z\frac{\partial \hat{\mathbf{I}}(\tau,z)}{\partial\tau}=\hat{\mathbf{I}}(\tau,z)-\hat{\mathbf{S}}(\tau) \tag{1}$$

и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\hat{\mathbf{I}}(0,z)=\hat{\mathbf{0}}, \quad z<0; \quad \hat{\mathbf{I}}(\tau,z)e^{-\tau/z}\xrightarrow[\tau\to\infty]{}\hat{\mathbf{0}}, \quad z>0. \tag{2}$$

Здесь переменная τ является усредненной по линии оптической глубиной, а переменная $z=\mu/\phi(x)$, где μ - косинус угла между направлением распространения излучения и внешней нормалью к границе атмосферы, x - частота излучения, отсчитанная от центра линии и измеренная в доплеровских ширинах, а ϕ - профиль коэффициента поглощения в линии. Матричная функция источников $\hat{\mathbf{S}}(\tau)$ имеет вид

$$\hat{\mathbf{S}}(\tau)=\hat{\mathbf{S}}_{\bullet}(\tau)+\int_{-\infty}^{+\infty}dz'\,\hat{\mathbf{G}}(z')\hat{\mathbf{I}}(\tau,z'). \tag{3}$$

При этом $\hat{\mathbf{S}}_{\bullet}(\tau)$ описывает первичные источники излучения, а

$$\hat{\mathbf{G}}(z)=2\int_{x(z)}^{+\infty}dx'\phi^2(x')\hat{\psi}[z\,\phi(x')], \tag{4}$$

где функция $x(z)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} &x(z)=0, && |z|\le 1/\phi(0)\\ &\phi(x(z))=1/|z|, && |z|>1/\phi(0). \end{aligned} \tag{5}$$

Матрица $\hat{\psi}(\mu)$ называется характеристической и имеет следующий вид:

$$\hat{\psi}(\mu)=\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{W}{8}}\left(1-3\mu^2\right)\\ \sqrt{\frac{W}{8}}\left(1-3\mu^2\right) & \frac{W}{4}\left(5-12\mu^2+9\mu^4\right)\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь λ - вероятность выживания фотона при рассеянии, которая в атмосфере считается постоянной, а W - параметр деполяризации, определяемый квантовыми числами уровней, при переходах между которыми возникает рассматриваемая линия ($0\le W\le 1$). Отметим, что матрица $\hat{\mathbf{G}}(z)$ является четной и симметричной, т.е.

$$\hat{\mathbf{G}}(-z)=\hat{\mathbf{G}}(z), \quad \hat{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}(z)=\hat{\mathbf{G}}(z), \tag{7}$$

где символ $^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование.

Следуя [1], будем рассматривать следующую матрицу первичных источников:

$$\hat{\mathbf{S}}_{\bullet}(\tau)=\hat{\mathbf{S}}_{\bullet}=\hat{\varepsilon}^{1/2}=\mathrm{diag}\left(\sqrt{1-\lambda},\sqrt{1-0.7W\lambda}\right). \tag{8}$$

Такие первичные источники, по терминологии [2], соответствуют стандартной задаче. Если подставить формальное решение уравнения (1)

$$\hat{\mathrm{I}}(\tau, z) = \int_\tau^\infty d\tau' e^{-(\tau'-\tau)/z}\,\hat{\mathrm{S}}(\tau')\big/z, \quad z > 0 \tag{9}$$

$$\hat{\mathrm{I}}(\tau, z) = -\int_0^\tau d\tau' e^{-(\tau'-\tau)/z}\,\hat{\mathrm{S}}(\tau')\big/z, \quad z < 0 \tag{10}$$

в (3), то получится интегральное уравнение для функции источников

$$\hat{\mathrm{S}}(\tau) = \hat{\varepsilon}^{1/2} + \int_0^\infty d\tau' \hat{\mathrm{K}}_1(\tau-\tau')\hat{\mathrm{S}}(\tau'), \tag{11}$$

где ядерная матрица $\hat{\mathrm{K}}_1(\tau)$ имеет вид

$$\hat{\mathrm{K}}_1(\tau) = \int_0^\infty dz\, e^{-|\tau|/z}\,\hat{\mathrm{G}}(z)\big/z\,. \tag{12}$$

При этом для матриц $\hat{\mathrm{K}}_1(\tau)$ и $\hat{\mathrm{G}}(z)$ выполняется нормировка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \hat{\mathrm{K}}_1(\tau) = 2\int_0^\infty dz\, \hat{\mathrm{G}}(z) = \mathrm{diag}(\lambda, 0.7W\lambda) = \hat{\mathrm{E}} - \hat{\varepsilon}\,. \tag{13}$$

Здесь $\hat{\mathrm{E}}$ - единичная матрица, а $\hat{\varepsilon} \equiv \mathrm{diag}(1-\lambda, 1-0.7W\lambda)$.

Подробное обсуждение приведенных выше формул дано в работе [2].

3. *Вывод уравнения Вольтерра для* $\hat{\mathrm{S}}(\tau)$. Запишем уравнение переноса (1) в следующих двух видах:

$$z\frac{\partial \hat{\mathrm{I}}(\tau+\tau_1, z)}{\partial\tau} = \hat{\mathrm{I}}(\tau+\tau_1, z) - \hat{\mathrm{S}}(\tau+\tau_1), \tag{14}$$

$$-z\frac{\partial \hat{\mathrm{I}}^{\,T}(\tau+\tau_2, -z)}{\partial\tau} = \hat{\mathrm{I}}^{\,T}(\tau+\tau_2, -z) - \hat{\mathrm{S}}^{\,T}(\tau+\tau_2). \tag{15}$$

Домножим обе части (14) слева на матрицу $\hat{\mathrm{G}}(z)$, а затем получившееся уравнение перемножим "крест-накрест" на (15). В результате имеем

$$\begin{gathered}-z\frac{\partial \hat{\mathrm{I}}^{\,T}(\tau+\tau_2, -z)}{\partial\tau}\hat{\mathrm{G}}(z)\hat{\mathrm{I}}(\tau+\tau_1, z) + z\frac{\partial \hat{\mathrm{I}}^{\,T}(\tau+\tau_2, -z)}{\partial\tau}\hat{\mathrm{G}}(z)\hat{\mathrm{S}}(\tau+\tau_1) = \\ = z\hat{\mathrm{I}}^{\,T}(\tau+\tau_2, -z)\hat{\mathrm{G}}(z)\frac{\partial \hat{\mathrm{I}}(\tau+\tau_1, z)}{\partial\tau} - z\hat{\mathrm{S}}^{\,T}(\tau+\tau_2)\hat{\mathrm{G}}(z)\frac{\partial \hat{\mathrm{I}}(\tau+\tau_1, z)}{\partial\tau}.\end{gathered} \tag{16}$$

Преобразуя (16), получим соотношение

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\hat{\mathrm{I}}^{\,T}(\tau+\tau_2, -z)\hat{\mathrm{G}}(z)\hat{\mathrm{I}}(\tau+\tau_1, z)\right] = \\ = \hat{\mathrm{S}}^{\,T}(\tau+\tau_2)\hat{\mathrm{G}}(z)\frac{\partial \hat{\mathrm{I}}(\tau+\tau_1, z)}{\partial\tau} + \frac{\partial \hat{\mathrm{I}}^{\,T}(\tau+\tau_2, -z)}{\partial\tau}\hat{\mathrm{G}}(z)\hat{\mathrm{S}}(\tau+\tau_1).\end{gathered} \tag{17}$$

Введем оператор <> усреднения по z произведения двух матриц

$$<\hat{\mathrm{U}}(z)\hat{\mathrm{V}}(z)> \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \hat{\mathrm{U}}(z)\hat{\mathrm{G}}(z)\hat{\mathrm{V}}(z) \tag{18}$$

и определим двухточечный матричный момент $\hat{Q}(\tau_1,\tau_2)$ следующим образом:

$$\hat{Q}(\tau_1,\tau_2) \equiv \langle \hat{I}^{T}(\tau_2,-z)\hat{I}(\tau_1,z)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \hat{I}^{T}(\tau_2,-z)\hat{G}(z)\hat{I}(\tau_1,z). \quad (19)$$

Отметим, что для скалярной задачи о резонансном рассеянии в линии усреднение с весовой функцией $G(z)$, аналогичное (19), было определено в [3].

Проинтегрируем обе части соотношения (17) по z в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и учтем (3), (8), а также симметричность матрицы $\hat{G}(z)$. В результате получим

$$\frac{\partial \hat{Q}(\tau+\tau_1,\tau+\tau_2)}{\partial\tau} = \hat{S}^{T}(\tau+\tau_2)\frac{\partial \hat{S}(\tau+\tau_1)}{\partial\tau} + \frac{\partial \hat{S}^{T}(\tau+\tau_2)}{\partial\tau}\hat{S}(\tau+\tau_1), \quad (20)$$

и далее, интегрируя, находим

$$\hat{Q}(\tau+\tau_1,\tau+\tau_2) = \hat{S}^{T}(\tau+\tau_2)\hat{S}(\tau+\tau_1) + \hat{C}, \quad (21)$$

где $\hat{C}$ - постоянная интегрирования.

Матрицу $\hat{C}$ можно найти следующим образом. Положим в уравнении переноса (1) $\tau=\infty$. Это дает

$$\hat{I}(\infty,z) = \hat{S}(\infty). \quad (22)$$

Здесь мы учли тот факт, что при $\tau\to\infty$ интенсивность излучения, которая определяется матрицей $\hat{I}(\tau,z)$, стремится к равновесной, поэтому

$$\frac{\partial \hat{I}(\tau,z)}{\partial\tau} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \hat{0}. \quad (23)$$

Если в интегральном уравнении (11) произвести замену переменной $t \equiv \tau-\tau'$ и положить $\tau=\infty$, то с учетом нормировки матрицы $\hat{K}_1(\tau)$ из соотношения (13) получим, что

$$\hat{S}(\infty) = \hat{\varepsilon}^{-1/2}. \quad (24)$$

При помощи этого равенства и нормировки матрицы $\hat{G}(z)$, даваемой (13), из определения (19) находим следующее соотношение:

$$\hat{Q}(\infty,\infty) = \hat{\varepsilon}^{-1/2}\left(\hat{E}-\hat{\varepsilon}\right)\hat{\varepsilon}^{-1/2}. \quad (25)$$

Наконец, сравнивая с величиной $\hat{Q}(\infty,\infty)$, получающейся из (21), видим, что $\hat{C}=-\hat{E}$. Окончательно (21) дает матричный двухточечный $\hat{Q}$-интеграл

$$\hat{S}^{T}(\tau_2)\hat{S}(\tau_1) = \hat{Q}(\tau_1,\tau_2) + \hat{E}. \quad (26)$$

В выражении (26) положим $\tau_1=\tau_2=0$. Учитывая первое из граничных условий (2), получим

$$\hat{Q}(0,0)=\hat{0}\,, \tag{27}$$

так что

$$\hat{S}^{\,T}(0)\hat{S}(0)=\hat{E}\,. \tag{28}$$

Точно так же при $\tau_1=\tau$ и $\tau_2=0$ имеем

$$\hat{S}^{\,T}(0)\hat{S}(\tau)=\int_{-\infty}^{0}dz\,\hat{I}^{\,T}(0,-z)\hat{G}(z)\hat{I}(\tau,z)+\hat{E}\,. \tag{29}$$

После замены переменной $-z\to z$ получаем, что

$$\hat{S}^{\,T}(0)\hat{S}(\tau)=\int_{0}^{\infty}dz\,\hat{I}^{\,T}(z)\hat{G}(z)\hat{I}(\tau,-z)+\hat{E}\,. \tag{30}$$

Здесь мы воспользовались четностью матрицы $\hat{G}(z)$ и ввели обозначение $\hat{I}(0,z)\equiv\hat{I}(z)$. Интегрирование (9) два раза по частям дает

$$\hat{I}(\tau,z)=\hat{S}(\tau)+z\frac{d\,\hat{S}(\tau)}{d\,\tau}+z\int_{\tau}^{\infty}d\,\tau'\,e^{-(\tau'-\tau)/z}\,\frac{d^2\,\hat{S}(\tau')}{d\,\tau^2}, \tag{31}$$

поэтому

$$\hat{I}(0)=\hat{S}(0). \tag{32}$$

Учитывая соотношение (28), домножим (30) слева на $\hat{S}(0)$. В результате получим, что

$$\hat{S}(\tau)=\int_{0}^{\infty}dz\,\hat{H}^{\,T}(z)\hat{G}(z)\hat{I}(\tau,-z)+\hat{S}(0), \tag{33}$$

где введено обозначение

$$\hat{H}(z)=\hat{I}(z)\hat{S}^{\,T}(0)=\hat{I}(z)\hat{I}^{\,T}(0). \tag{34}$$

Отметим, что матрица $\hat{H}(z)$ является обобщением известной в скалярной теории переноса H- функции. Обсуждение связи матриц $\hat{H}$ и $\hat{I}$ смотри в работе [4] (там рассмотрен случай монохроматического рэлеевского рассеяния). Подставим в (33) вместо $\hat{I}(\tau,-z)$ выражение (10) и изменим порядок интегрирования. В результате получим искомое уравнение Вольтерра для матричной функции источников

$$\hat{S}(\tau)=\hat{S}(0)+\int_{0}^{\tau}d\,\tau'\,\hat{N}(\tau-\tau')\hat{S}(\tau'), \tag{35}$$

где

$$\hat{N}(\tau)=\int_{0}^{\infty}dz\,e^{-\tau/z}\,\hat{H}^{\,T}(z)\hat{G}(z)\big/z\,. \tag{36}$$

4. ***Численное интегрирование уравнения Вольтерра.*** Уравнение (35) было нами проинтегрировано численно для доплеровского профиля коэффициента поглощения

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}. \tag{37}$$

Вычисления проводились при нескольких значениях вероятности выживания фотона λ. Принималось, что параметр деполяризации $W=1$. Опишем методику вычислений.

Отрезок интегрирования в (35) разбивается на n частей узлами $0=\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_{n+1}=\tau$. Искомая матричная функция источников представляется в виде кусочно-линейной функции

$$\hat{\mathrm{S}}(\tau)=\sum_{l=1}^{n}\hat{\sigma}_l(\tau-\tau_l), \tag{38}$$

где

$$\hat{\sigma}_l(\tau-\tau_l)=\begin{cases}\hat{\mathrm{S}}(\tau_l)+\hat{\mathrm{B}}_l(\tau-\tau_l), & \tau\in[\tau_l,\tau_{l+1}]\\ 0, & \tau\notin[\tau_l,\tau_{l+1}].\end{cases} \tag{39}$$

Вводя обозначение $\hat{\mathrm{S}}_l\equiv\hat{\mathrm{S}}(\tau_l)$ и пользуясь непрерывностью $\hat{\mathrm{S}}(\tau)$ в узлах, можно записать, что

$$\hat{\mathrm{B}}_l=\frac{\hat{\mathrm{S}}_{l+1}-\hat{\mathrm{S}}_l}{\tau_{l+1}-\tau_l}. \tag{40}$$

Введем следующие обозначения:

$$\hat{\mathrm{N}}_2(\tau_k,\tau_l,\tau_j)\equiv\int_{\tau_l}^{\tau_j}d\tau\,\hat{\mathrm{N}}(\tau_k-\tau)=\int_0^\infty dz\,\hat{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}(z)\hat{\mathrm{G}}(z)e^{-\tau_k/z}\left[e^{\tau_j/z}-e^{\tau_l/z}\right], \tag{41}$$

$$\begin{gathered}\hat{\mathrm{N}}_3(\tau_k,\tau_l,\tau_j)\equiv\int_{\tau_l}^{\tau_j}d\tau\,\hat{\mathrm{N}}(\tau_k-\tau)\tau=\\ =\int_0^\infty dz\,\hat{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}(z)\hat{\mathrm{G}}(z)e^{-\tau_k/z}\left[(\tau_j-z)e^{\tau_j/z}-(\tau_l-z)e^{\tau_l/z}\right].\end{gathered} \tag{42}$$

Подставим представление (38) в уравнение (35), произведя в соответствующих интегралах замену переменной $t=\tau'-\tau_l$. Тогда получим следующие формулы для последовательного вычисления значений матричной функции источников в узлах:

$$\left[\hat{\mathrm{E}}-\frac{\hat{\mathrm{N}}_3(\tau_2-\tau_1,0,\tau_2-\tau_1)}{\tau_2-\tau_1}\right]\hat{\mathrm{S}}_2=\left[\hat{\mathrm{E}}+\hat{\mathrm{N}}_2(\tau_2-\tau_1,0,\tau_2-\tau_1)-\frac{\hat{\mathrm{N}}_3(\tau_2-\tau_1,0,\tau_2-\tau_1)}{\tau_2-\tau_1}\right]\hat{\mathrm{S}}_1, \tag{43}$$

$$\begin{gathered}\left[\hat{\mathrm{E}}-\frac{\hat{\mathrm{N}}_3(\tau_l-\tau_{l-1},0,\tau_l-\tau_{l-1})}{\tau_l-\tau_{l-1}}\right]\hat{\mathrm{S}}_l=\\ =\hat{\mathrm{S}}_1+\left[\hat{\mathrm{N}}_2(\tau_l-\tau_{l-1},0,\tau_l-\tau_{l-1})-\frac{\hat{\mathrm{N}}_3(\tau_l-\tau_{l-1},0,\tau_l-\tau_{l-1})}{\tau_l-\tau_{l-1}}\right]\hat{\mathrm{S}}_{l-1}+\\ +\sum_{k=1}^{l-2}\left[\hat{\mathrm{N}}_2(\tau_l-\tau_k,0,\tau_{k+1}-\tau_k)\hat{\mathrm{S}}_k+\hat{\mathrm{N}}_3(\tau_l-\tau_k,0,\tau_{k+1}-\tau_k)\hat{\mathrm{B}}_k\right].\end{gathered} \tag{44}$$

Формула (44) используется при $i \geq 3$. Значения элементов $\hat{S}_1$ считаются известными из (32). Далее опишем, каким образом вычислялись интегралы вида (41) и (42).

Матрица $\hat{G}(z)$ рассчитывалась следующим образом. Промежуток интегрирования в (4) разбивался на две части $[x(z), x_s]$ и $[x_s, \infty)$. Чтобы избежать интегрирования в бесконечных пределах, в интегралах по полубесконечному промежутку производилась замена переменной $x' = \mathrm{tg}\, u$. Подынтегральные функции в рассматриваемых интегралах в случае доплеровского профиля убывают очень быстро, поэтому выбиралось $x_s \leq 10$. При достаточно больших значениях $x(z)$ выбиралось $x_s = x(z)$, и промежуток интегрирования в интегралах (4) оставался исходным. Интегралы в конечных пределах вычислялись по составной квадратурной формуле Симпсона с использованием экстраполяции Ричардсона, описанной, например, в [5].

В соответствии с (34), чтобы найти матрицу $\hat{H}(z)$, необходимо знать матрицу $\hat{I}$. Как показано в [2], $\hat{I}$-матрица удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению Амбарцумяна-Чандрасекара. В нашем случае это уравнение записывается в следующем виде:

$$\hat{I}^{-1}(z) = \hat{\varepsilon}^{1/2} + \int_0^\infty \frac{z'dz'}{z+z'} \hat{I}^{\mathrm{T}}(z')\hat{G}(z'). \tag{45}$$

Уравнение (45) решалось итерациями типа Гаусса-Зейделя по той же схеме, что и в работе [6], где $\hat{I}$-матрица находилась для фойгтовского профиля коэффициента поглощения.

Для выбора узлов z_k, $k = 1, 2, \ldots$, в которых из решения уравнения (45) находятся значения $\hat{I}(z)$, использовалась нормировка матрицы $\hat{G}(z)$, даваемая формулой (13). Именно, эти узлы выбирались таким образом, чтобы интегральные суммы

$$2\sum_k A_k \hat{G}(z_k) \tag{46}$$

отличались бы от элементов матрицы $\mathrm{diag}(\lambda, 0.7\lambda)$ не более, чем на заданную погрешность δ (A_k - коэффициенты квадратурной формулы). Эти же узлы и та же квадратурная формула далее используются для вычисления интегралов, стоящих в правой части (45), а также интегралов вида (41) и (42) (о применяемой квадратурной формуле смотри в [6]). При этом рассмотрение поведения подынтегральных функций на соответствующих промежутках интегрирования дает основания предполагать, что точность вычисления этих интегралов тоже будет иметь порядок δ. Исходный промежуток интегрирования мы разбивали на две части $[0, 1/\phi(0)]$ и $[1/\phi(0), \infty)$, и далее полубесконечный промежуток сводился к $\left[0, \sqrt{\phi(0)}\right]$ заменой переменной $u \equiv z^{-1/2}$. Выбор узлов квадратурной формулы обеспечивал $\delta < 10^{-7}$.

5. *Результаты вычислений*. Результаты расчета элементов матричной функции источников $\hat{S}(\tau)$ при разных значениях λ представлены на рис.1. При $\lambda = 1$ результаты наших расчетов можно сопоставить с результатами, полученными в работе [7], где $\hat{S}(\tau)$ находилась из уравнения (11). В указанной работе использовалась равномерная сетка узлов по $\log\tau$, так что $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 10^{-3}$, $\tau_{n+1} = 10^4$, и на декаду бралось по 30 узлов. При этом, как указывается в [7], расчет дает 4 верных значащих цифры. Сравнение наших данных, полученных на такой же сетке узлов, с данными, приведенными в [7] в табл.1, показывает следующее. В элементе S_{22} совпадают все четыре цифры при всех рассматриваемых τ; в элементе S_{11} имеются расхождения в несколько единиц четвертого знака при τ, больших ≈ 10; такие же расхождения получаются в элементе S_{12} при τ, больших ≈ 1. В элементе S_{21} расхождения в четвертом знаке начинаются при τ больших ≈ 1, в третьем - при τ больших ≈ 10, во втором - при τ больших ≈ 100. Отметим, что $S_{21}(100) \approx 4 \cdot 10^{-4}$ и убывает быстрее, чем $\tau^{-1/2}$ при $\tau \to \infty$ (см. [7], формула (97)).

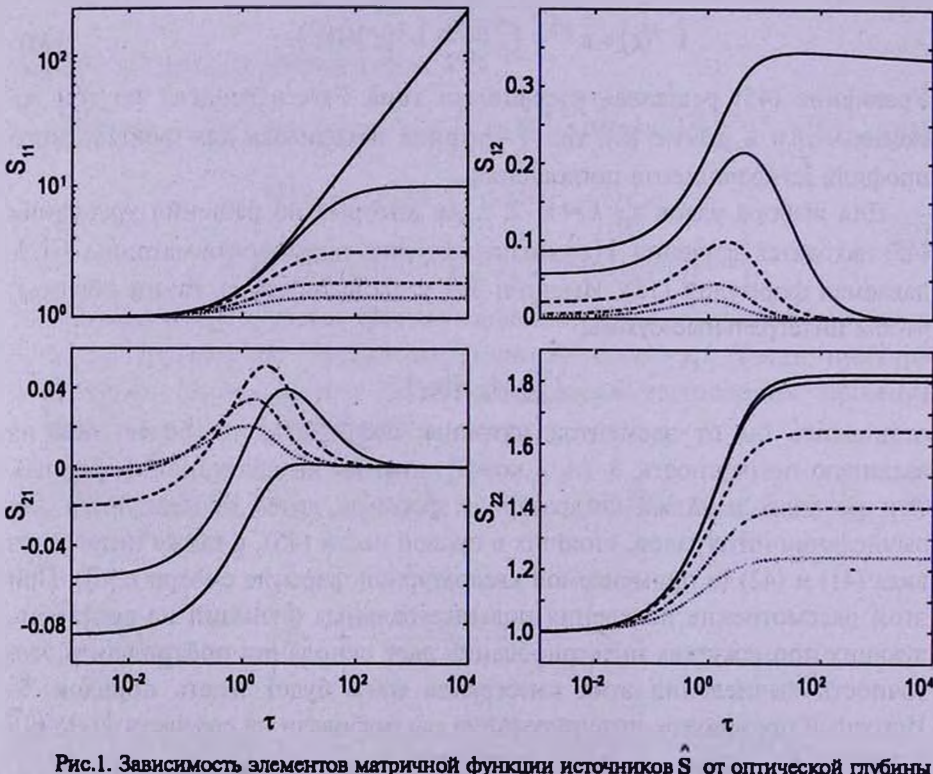

Рис.1. Зависимость элементов матричной функции источников $\hat{S}$ от оптической глубины в атмосфере τ. Толстые сплошные линии соответствуют $\lambda = 1.0$, тонкие сплошные - $\lambda = 0.99$, штриховые - $\lambda = 0.9$, штрих-пунктирные - $\lambda = 0.7$, пунктирные - $\lambda = 0.5$.

Для контроля точности вычислений можно использовать выражение (9) при $\tau = 0$, которое после подстановки в него функции источников в виде (38) и отбрасывания интеграла по промежутку $[\tau_{n+1}, \infty)$, в результате элементарного интегрирования превращается в следующее приближенное равенство:

$$\hat{\mathbf{I}}(z) \approx \sum_{l=1}^{n}\left[\left(\hat{\mathbf{S}}_l + z\,\hat{\mathbf{B}}_l\right)e^{-\tau_l/z} - \left(\hat{\mathbf{S}}_{l+1} + z\,\hat{\mathbf{B}}_l\right)e^{-\tau_{l+1}/z}\right]. \qquad (47)$$

Полученные таким образом значения $\hat{\mathbf{I}}(z)$, в принципе, должны совпадать со значениями этой матрицы, которые находятся из решения уравнения Амбарцумяна - Чандрасекара (45) и используются, в итоге, для расчета правой части (47). К примеру, если $z = 1/\phi(0) = \sqrt{\pi}$, то при использовании вышеупомянутой сетки узлов в элементах I_{11} и I_{22} получается совпадение в пределах пяти, а в элементах I_{12} и I_{21} - в пределах четырех значащих цифр. Если взять равномерную сетку с теми же граничными значениями τ и с 480 узлами на декаду, то совпадение в элементах I_{11} и I_{22} будет уже в пределах семи, а в элементах I_{12} и I_{21} - в пределах шести значащих цифр.

Приведенная в [2] общая формула, выражающая связь между параметрами Стокса I и Q с элементами матрицы $\hat{\mathbf{I}}$ в случае равномерно распределенных неполяризованых первичных источников, дает (смотри (29) в [2])

$$I(\tau, x, \mu) = I_{11}(\tau, \mu/\phi(x)) + \frac{1}{\sqrt{8}}\left(1 - 3\mu^2\right)I_{21}(\tau, \mu/\phi(x)), \qquad (48)$$

$$Q(\tau, x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{8}}\,3\left(1 - \mu^2\right)I_{21}(\tau, \mu/\phi(x)). \qquad (49)$$

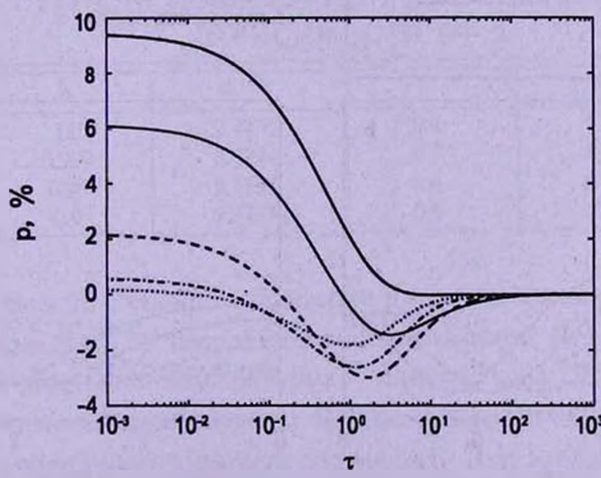

Рис.2. Зависимость от оптической глубины в атмосфере τ степени поляризации p излучения, идущего в направлении, параллельном границе атмосферы (т.е. при $\mu = 0$). Линии на графиках имеют тот же смысл, что и на рис.1.

Отсюда, с учетом выражения (31), можно записать степень поляризации p излучения, идущего в направлении, параллельном границе атмосферы (т.е. при $\mu = 0$ или $z = 0$), следующим образом:

$$p(\tau, x, \mu) = -\frac{Q(\tau, x, \mu)}{I(\tau, x, \mu)} = -\frac{3 S_{21}(\tau)}{\sqrt{8}\, S_{11}(\tau) + S_{21}(\tau)}. \tag{50}$$

На рис.2 представлена зависимость степени поляризации p от оптической глубины в атмосфере τ при разных λ. Из графиков видно, что при уменьшении значения λ поляризация меняет знак, и максимум модуля этой степени поляризации достигается уже не при $\tau = 0$, а при $\tau \approx 1$.

Для выходящего из атмосферы излучения ($\tau = 0$) на рис.3 и 4 показано изменение степени поляризации p в пределах резонансной линии в случае неконсервативного рассеяния. На этих рисунках представлены графики, соответствующие разным значениям λ и μ.

Отметим некоторые особенности этих графиков. Во всех случаях в крыле линии имеется минимум поляризации. Однако при изменении λ и μ отношение абсолютных величин поляризации в минимуме и в центре линии ($x=0$) существенно меняется. Оно может оказаться как меньше, так и больше 1. Сами же величины поляризации в минимуме и в центре

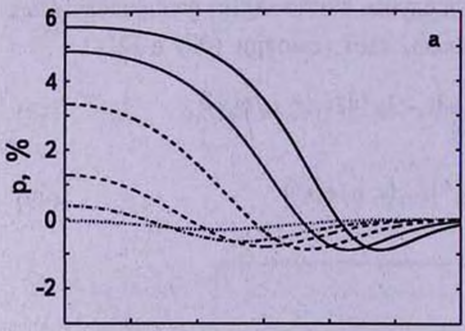

Рис.3а. Степень поляризации p излучения в резонансной линии, выходящего под разными углами из неконсервативной атмосферы при $\lambda = 0.99$. Толстые сплошные линии соответствуют $\mu = 0.01$, тонкие сплошные - $\mu = 0.03$, толстые штриховые - $\mu = 0.1$, тонкие штриховые - $\mu = 0.3$, штрих-пунктирные - $\mu = 0.5$, пунктирные - $\mu = 0.8$. По оси абсцисс - безразмерная частота x.

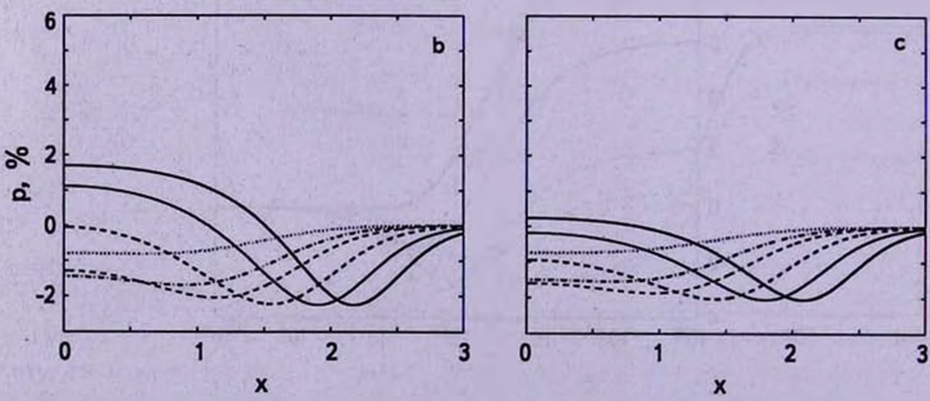

Рис.3b, c. Степень поляризации p излучения в резонансной линии, выходящего под разными углами из неконсервативной атмосферы: b) $\lambda = 0.9$; c) $\lambda = 0.7$. Линии на графиках имеют тот же смысл, что и на рис.3а.

линии могут быть как одного знака, так и разных. Еще одной интересной особенностью является то, что при изменении λ и μ поляризация в центре линии может менять не только свою величину, но и знак. При этом, если величина μ уже достаточно велика, а величина λ, напротив, достаточно мала, то эти изменения поляризации происходят немонотонно. Заметим, что при $\mu \to 1$ или $\lambda \to 0$, поляризация $p \to 0$.

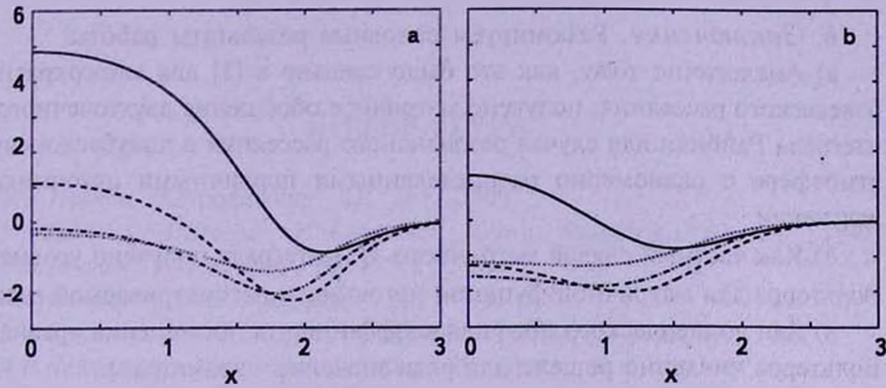

Рис.4. Степень поляризации p излучения в резонансной линии, выходящего из неконсервативной атмосферы: a) под углом с $\mu = 0.03$; b) $\mu = 0.3$. Сплошные линии соответствуют $\lambda = 0.99$, штриховые $\lambda = 0.9$, штрих-пунктирные $\lambda = 0.7$, пунктирные $\lambda = 0.5$.

В табл.1 приведены значения степени поляризации на краю диска ($\tau = 0$ и $\mu = 0$) в зависимости от параметра λ.

Таблица 1

СТЕПЕНЬ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА КРАЮ ДИСКА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ λ

λ	p, %	λ	p, %
1.0	9.4430	0.8	1.0764
0.999	8.2724	0.7	0.5884
0.99	6.1335	0.6	0.3305
0.9	2.1787	0.5	0.1832

При расчете степени поляризации p мы пользовались формулой (47), хотя можно было бы воспользоваться значениями $\hat{I}(z)$, полученными из решения уравнения Амбарцумяна - Чандрасекара. Ясно, что (47) дает менее точные значения матрицы $\hat{I}(z)$, поскольку значения $\hat{S}(\tau)$ получаются путем приближенного расчета с помощью $\hat{I}(z)$, являющейся решением уравнения (45). Однако у формулы (47) имеется и преимущество - из нее сразу же получаются значения $\hat{I}(z)$ при любых z, необходимых при построении графиков на рис.3-4. В то же время, из уравнения Амбарцумяна-

Чандрасекара значения $\hat{I}(z)$ получены только на определенной дискретной сетке по z (смотри выше). Для того чтобы получить из (45) значение $\hat{I}(z)$ при z, не являющимся узлом сетки, требуется вновь решать это уравнение, что само по себе требует немалых вычислительных затрат. Можно поступить иначе, проведя интерполяцию с помощью значений $\hat{I}(z)$ в узлах сетки, но тогда теряется преимущество точности.

6. *Заключение.* Резюмируем основные результаты работы.

а) Аналогично тому, как это было сделано в [1] для многократного рэлеевского рассеяния, получено матричное обобщение двухточечного Q-нтеграла Райбики для случая резонансного рассеяния в полубесконечной атмосфере с равномерно распределенными первичными источниками излучения.

б) Как частный случай матричного $\hat{Q}$-интеграла получено уравнение Вольтерра для матричной функции источников рассматриваемой задачи.

в) Для доплеровского профиля коэффициента поглощения уравнение Вольтерра численно решено для ряда значений параметра λ.

г) С помощью найденной матричной функции источников получены некоторые поляризационные характеристики выходящего из атмосферы излучения.

Автор благодарен В.В.Иванову за постановку задачи, а также полезные советы и замечания при подготовке статьи. Работа выполнена при поддержке гранта НШ-1318.2008.2 для ведущих научных школ России и программы АВЦП № 2.1.1/594.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Астрономический институт им. В.В.Соболева,
Россия, e-mail: adem13@mail.ru

VOLTERRA EQUATION FOR THE MATRIX SOURCE FUNCTION AT RESONANCE SCATTERING

A.V.DEMENTYEV

Matrix radiative transfer equation for multiple resonance scattering of radiation in a spectral line in a semi-infinite atmosphere with uniformly distributed primary sources is considered. For this equation a matrix nonlinear integral is obtained. It generalizes the two-point Q-integral of Rybicki. A particular case of the matrix $\hat{Q}$-integral is Volterra equation for the matrix source function of the problem under consideration. In the case of a Doppler absorption profile the Volterra equation is solved numerically. Some polarization parameters are obtained for the emergent radiation.

Key words: *resonance scattering:source function:Doppler profile*

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.В.Иванов*, Астрофизика, **52**, 301, 2009.
2. *V.V.Ivanov*, *S.I.Grachev*, *V.M.Loskutov*, Astron. Astrophys., **318**, 315, 1997.
3. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **55**, 1072, 1978.
4. *V.V.Ivanov*, Astron. Astrophys., **307**, 319, 1996.
5. *А.А.Самарский*, *А.В.Гулин*, Численные методы, М., Наука, 1989.
6. *А.В.Дементьев*, Астрофизика, **52**, 605, 2009.
7. *V.V.Ivanov*, *S.I.Grachev*, *V.M.Loskutov*, Astron. Astrophys., **321**, 968, 1997.