

К НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФФУЗНОГО ОТРАЖЕНИЯ-ПРОПУСКАНИЯ ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ СЛОЕМ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

О.В.ПИКИЧЯН

Поступила 14 сентября 2009

Принята к печати 3 марта 2010

Путем последовательного применения подхода Амбарцумяна для случая одномерной анизотропной среды удается основные достижения решения линейной задачи диффузного отражения-пропускания излучения слоем конечной толщины перенести на нелинейный случай. Приводятся формулы нелинейного сложения слоев, которые пригодны для построения процедур рекуррентного расчета однородных, периодических и произвольных слоистых сред. С помощью этих соотношений дается полный набор дифференциальных уравнений инвариантного погружения. Использование последних позволяет получить систему уравнений *полной инвариантности*, которые, в свою очередь, предоставляют возможность свести решение нелинейной задачи диффузного отражения-пропускания при облучении слоя со стороны обеих его границ, к более простой задаче освещения этой среды со стороны лишь одной из ее границ, толщина слоя при этом остается лишь фиксированным параметром. Наконец, показывается, что при переходе от одночастотного случая (двухуровневый атом) к важному, с точки зрения интерпретации астрофизической информации, полихроматическому случаю (многоуровневый атом), все полученные результаты сохраняют свою форму в векторной записи.

Ключевые слова: *перенос излучения: нелинейная задача диффузного отражения-пропускания*

1. Введение. Исследованиям линейных задач переноса излучения в последние шестьдесят лет посвящено большое количество работ и монографий, в то время как нелинейные задачи из-за их сложности остаются до сих пор малоисследованными. Однако значение нелинейных задач продолжает неуклонно расти в связи с выявлением и интерпретацией новых более высокоэнергетических физических явлений, протекающих в астрофизических объектах. В отличие от линейного случая при больших плотностях поля излучения характеристики рассеивающей и поглощающей среды (такие как коэффициенты поглощения и рассеивания излучения элементарным объемом, оптическая толщина, функция перераспределения излучения по частотам и направлениям и т.д.) не являются наперед заданными величинами. Здесь уже требуется совместное взаимосогласованное описание результирующих характеристик поля излучения и среды.

Хорошо известно, что введение Амбарцумяном в 1942г. принципа инвариантности [1-7] существенно упростило исследование линейных задач

теории переноса. В частности, в отличие от традиционного подхода он позволил получить решение классической задачи диффузного отражения и пропускания непосредственно без предварительного определения характеристик поля излучения внутри среды. В дальнейшем, на такой основе был разработан широкий арсенал аналитических численных методов для анализа различных задач переноса излучения, частиц, волн (см., например, [8]).

На область нелинейных задач этот подход был распространен Амбарцумяном в [9] (см. также [10]). На примере нелинейной задачи отражения-пропускания для одномерной, изотропной среды, в монохроматическом случае (двухуровневый атом), им были сформулированы соотношения "нелинейного сложения" слоев, затем разработана методика получения с их помощью квазилинейного дифференциального уравнения "инвариантного погружения". В итоге двухточечная граничная задача переноса была сведена к задаче с начальными условиями, т.е. - к задаче Коши. В случае же полубесконечной среды Амбарцумяном было найдено явное аналитическое решение полученного уравнения. Аналитическое решение этой задачи в более общем случае - полихроматическое рассеяние (трехуровневый атом), было получено Никогосяном [11,12]. В дальнейшем, аналитически была решена также и задача определения внутреннего поля излучения в полубесконечной среде в случае двухуровневого атома [13]; при этом были выявлены некоторые аналогии между подходом принципа инвариантности, используемого в теории переноса излучения и методом ренорм группы из теории квантованных полей. Для приближенного расчета нелинейной задачи диффузного отражения-пропускания был построен также алгоритм, основанный на методе линейного сложения слоев, который реализован численно в случае четырехуровневого атома с континуумом [14-16]. Нелинейные задачи аналитически исследовались посредством применения также и других методик [17-21]. В недавно вышедшей работе [22] рекуррентная процедура нелинейного сложения слоев построена аксиоматическим образом, при этом, задача математически исследована на разрешимость и на условия сходимости к решению.

2. Цель работы и постановка задачи. Исследование линейной задачи диффузного отражения-пропускания Амбарцумяном включало, как получение дифференциальных уравнений инвариантного погружения [5], когда подвергается бесконечно малому варьированию каждая из границ исходного слоя по отдельности - условно можно назвать это процедурой раздельного варьирования границ, так и применение объединенной процедуры, когда со стороны одной границы добавляется бесконечно малый слой, а с противоположной стороны отнимается такой же слой - процедура совместного варьирования границ. Последнее, естественно, является уже примером инвариантного варьирования границ, поскольку не меняет исходную геометрию среды. Приравнивая все вычисленные изменения поля излучения

к нулю, Амбарцумяном было получено функциональное соотношение нового типа, не содержащее уже процедуру дифференцирования по толщине слоя [2]. Такой тип условно назовем соотношениями *полной инвариантности*, чтобы отличить их от широко используемого ныне класса уравнений *инвариантного погружения* [23-25]. В нелинейной же задаче диффузного отражения-пропускания Амбарцумяном была выполнена лишь одна из процедур раздельного варьирования границы, в результате получено только одно дифференциальное уравнение инвариантного погружения [9]. Нашей задачей является вывод полного набора дифференциальных уравнений инвариантного погружения и получение, с их помощью, соотношений полной инвариантности. Показывается, что последовательное применение подхода Амбарцумяна позволяет аналогично линейному случаю упростить решение нелинейной задачи отражения-пропускания. Сначала даются формулы нелинейного сложения слоев пригодные для построения различных алгоритмов рекуррентного наращивания слоев до заранее намеченной структуры и толщины. Затем с их помощью выводятся новые дифференциальные уравнения инвариантного погружения, которые вместе с уже известными уравнениями позволяют, в частности, путем исключения производных по толщине, получить новую систему функциональных уравнений, где толщина слоя является теперь лишь фиксированным параметром. Это позволяет, в частности, свести решение исходной нелинейной задачи отражения-пропускания при двустороннем облучении слоя извне к решению более простой задачи с односторонним облучением. Результаты обобщаются далее на задачу полихроматического рассеяния, которая в астрофизических приложениях имеет особую важность. Некоторые, из приводимых в данной работе результатов ранее доложены нами в [26,27].

Пусть имеется рассеивающая и поглощающая, одномерная, анизотропная среда геометрической толщины L , левая и правая границы которой освещены мощными пучками излучения интенсивности j^+ и j^- , соответственно. Требуется определить интенсивности излучения $u_L^{\pm}(j^+, j^-)$ и $u_L^-(j^+, j^-)$, выходящего через правую и левую границы этой среды. Свойства "отражения-пропускания" для слоя "малой" геометрической толщины $\Delta \rightarrow 0$, следуя Амбарцумяну [9], будем использовать в качестве исходной информации посредством представления

$$u_{\Delta}^{\pm}(x, y) = \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} + \alpha^{\pm}(x, y) \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad (1)$$

при этом коэффициенты $\alpha^{\pm}(x, y)$ предварительно считаем заданными.

3. Соотношения "нелинейного сложения" слоев. Пусть к слою геометрической толщины A справа приложен второй слой толщины B . Полученный в результате слой толщины $A+B$ слева и справа освещен мощными пучками излучения интенсивности x и y соответственно, требуется найти интенсивности $u_{A+B}^{\pm}(x, y)$ выходящего из суммарной среды $A+B$

излучения при условии, что соответствующие величины $u_A^+(x, y)$ и $u_B^+(x, y)$ для отдельных слоев A и B заранее заданы (см. рис.1).

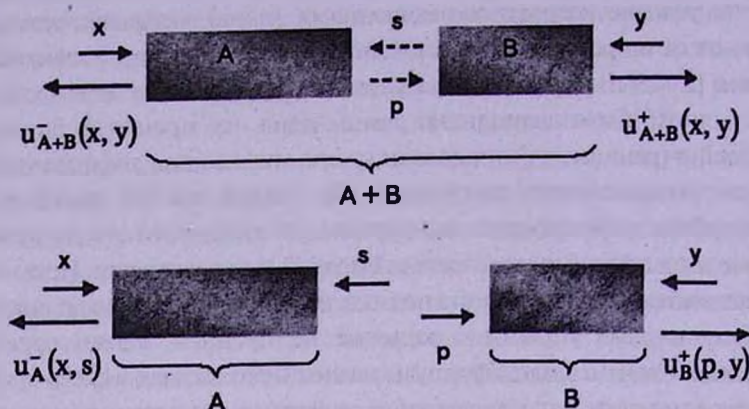


Рис.1. Сложение слоев в нелинейной задаче диффузного отражения и пропускания.

Будем исходить из очевидного физического факта, что, как излучение, выходящее из среды, так и поле излучения в ней, однозначно определяются значениями интенсивностей излучения, падающими на нее извне. Тогда, каждую из интенсивностей $u^\pm$, выходящих через данную (правую или левую) границу, можно представить двояким образом. Так, например, u^+ с одной стороны можно представить как интенсивность излучения, выходящего из объединенной среды $A+B$, сформированное под воздействием внешних потоков (x, y) , а с другой - как интенсивность излучения, выходящего из одной только среды B и образуемого под воздействием внешних потоков (p, y) . Аналогичным образом u^- может быть трактовано как интенсивность излучения, выходящего из среды $A+B$, сформированного под воздействием внешних потоков (x, y) , а с другой стороны, как интенсивность излучения, выходящего из среды A , в результате воздействия внешних потоков (x, s) :

$$u_{A+B}^+(x, y) = u_B^+(p, y), \quad (2)$$

$$u_{A+B}^-(x, y) = u_A^-(x, s). \quad (3)$$

При определении u^+ от исходной среды $A+B$ была отсечена ее часть A с сохранением при этом сформированного на контактной границе ее частей результирующего поля p , подразумевая, что теперь уже имеется лишь среда B облученная слева полем p , а справа, как и прежде - y . Аналогичным образом, при определении u^- , исходную среду заменили ее частью A , облученную справа полем s , а слева - x . Величины же p и s , представляющие собой интенсивности результирующего излучения, идущего вправо и влево, на контактной границе сред A и B остаются пока неизвестными. Для

последних нетрудно получить систему

$$p = u_A^+(x, s), \quad s = u_B^-(p, y). \quad (4)$$

Соотношения нелинейного сложения слоев (2)-(4), подобно линейному случаю (см., например [28]), позволяют вести расчет задачи отражения-пропускания рекуррентным образом. На каждом очередном шаге сложения:

1. По заданным значениям u_A и u_B , искомые величины u_{A+B} вычисляются посредством явных выражений (2)-(3), а вспомогательные функции определяются путем решения (например, итеративного) системы (4).

2. Если A и B , в частности, брать одинаковыми $A = B \equiv L$, то получим формулы нелинейного удвоения слоев: $L \rightarrow 2L \rightarrow 4L \rightarrow \dots$.

3. Если же, расчет, при этом, начать с малой величины $L = \Delta + O(\Delta^2)$, используя, например, представление (1), то получим процедуру наращивания толщины по схеме $(L = 2^{i-1} \cdot \Delta) \rightarrow (2L = 2^i \cdot \Delta) \rightarrow \dots$, с последовательными значениями $i = 1, 2, 3, \dots$ и т.д.

Посредством схемы пункта 3, очевидно, можно вычислить нелинейные задачи однородных сред, процедура же пункта 2 - позволяет перейти уже к вычислению задач "периодических" сред, после того, как решение задачи для одного периода L уже найдено. Пункт 1, наконец, описывает способ расчета произвольных слоистых сред, когда соответствующие задачи для каждого отдельных исходных слоев A и B уже рассчитаны.

4. *Уравнения инвариантного погружения.* Используя несколько видоизмененную методику Амбарцумяна [9], с помощью (2)-(4) выведем полный набор дифференциальных уравнений инвариантного погружения для определения выходящих интенсивностей $u_L^\pm(j^+, j^-)$ в случае слоя произвольной конечной геометрической толщины L левая и правая границы которого находятся под воздействием потоков j^+ и j^- , соответственно. Принимая в соотношениях (2)-(3) $A \equiv \Delta \rightarrow 0$ и $B \equiv L$, а также $x \equiv j^+$, $y \equiv j^-$ получим

$$u_{\Delta+L}^+(j^+, j^-) = u_L^+(p, j^-), \quad (5)$$

$$u_{\Delta+L}^-(j^+, j^-) = u_L^-(j^+, s). \quad (6)$$

Для неизвестных величин s и p из (4), очевидно, будем иметь

$$p = u_\Delta^+(j^+, s), \quad s = u_L^-(p, j^-). \quad (7)$$

Использование представления (1) и разложения

$$u_{\Delta+L}^\pm = u_L^\pm + \frac{\partial u_L^\pm}{\partial L} \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad (8)$$

в выражениях (5)-(6) и в первом из (7), приводит нас к соотношениям:

$$u_L^\pm(j^+, j^-) + \frac{\partial u_L^\pm(j^+, j^-)}{\partial L} \cdot \Delta + O(\Delta^2) = u_L^\pm(p, j^-), \quad (9)$$

$$u_L^-(j^+, j^-) + \frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial L} \cdot \Delta = s + \alpha^-(j^+, s) \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad (10)$$

$$p = j^+ + \alpha^+(j^+, s) \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad (11)$$

соответственно. Подстановкой выражения (11) во второе соотношение (7), с учетом возможности разложения функции $u_L^-(p, j^-)$, по малой величине Δ , фигурирующей в ее первом аргументе, получим уравнение

$$s = u_L^-(j^+, j^-) + \alpha^+(j^+, s) \cdot \frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial j^+} \cdot \Delta + O(\Delta^2). \quad (12)$$

Соотношения (11)-(12) представляют разложенную форму системы (7), явное решение которой с точностью до $O(\Delta^2)$ имеет вид:

$$p \cong j^+ + \alpha^+(j^+, u_L^-) \cdot \Delta, \quad (13)$$

$$s \cong u_L^-(j^+, j^-) + \alpha^+(j^+, u_L^-) \cdot \frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial j^+} \cdot \Delta. \quad (14)$$

Подставляя выражения (13)-(14) в соотношения (9)-(10) и проводя соответствующие разложения и сокращения, в пределе при $\Delta \rightarrow 0$, получим окончательно

$$\frac{\partial u_L^+(j^+, j^-)}{\partial L} = \alpha^+(j^+, u_L^-) \cdot \frac{\partial u_L^+(j^+, j^-)}{\partial j^+}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial L} = \alpha^+(j^+, u_L^-) \cdot \frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial j^+} + \alpha^-(j^+, u_L^-). \quad (16)$$

Если в соотношениях (2)-(3) принять $A \equiv L$ и $B \equiv \Delta \rightarrow 0$, а также $x \equiv j^+$, $y \equiv j^-$, то вместо выражений (5)-(6) найдем

$$u_{L+\Delta}^+(j^+, j^-) = u_{\Delta}^+(\tilde{p}, j^-), \quad (17)$$

$$u_{L+\Delta}^-(j^+, j^-) = u_L^-(j^+, \tilde{s}), \quad (18)$$

а система, аналогичная (7), примет форму

$$\tilde{p} = u_L^+(j^+, \tilde{s}), \quad \tilde{s} = u_{\Delta}^-(\tilde{p}, j^-). \quad (19)$$

Повторяя описанную выше процедуру с использованием соотношений (1) и (17)-(19), с точностью до членов порядка $O(\Delta^2)$, в качестве решения системы (19) получим

$$\tilde{s} \cong j^- + \alpha^-(u_L^+, j^-) \cdot \Delta, \quad (20)$$

$$\tilde{p} \cong u_L^+(j^+, j^-) + \alpha^-(u_L^+, j^-) \cdot \frac{\partial u_L^+(j^+, j^-)}{\partial j^-} \cdot \Delta, \quad (21)$$

так что соотношения (15)-(16) могут быть дополнены второй парой дифференциальных уравнений инвариантного погружения для тех же отыскиваемых величин $u_L^{\pm}(j^+, j^-)$:

$$\frac{\partial u_L^+(j^+, j^-)}{\partial L} = \alpha^-(u_L^+, j^-) \cdot \frac{\partial u_L^+(j^+, j^-)}{\partial j^-} + \alpha^+(u_L^+, j^-), \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial L} = \alpha^-(u_L^+, j^-) \cdot \frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial j^-}. \quad (23)$$

Таким образом для нахождения двух функций $u_L^+(j^+, j^-)$ и $u_L^-(j^+, j^-)$ получены четыре уравнения (15), (16), (22), (23). Два из них - (22) и (16) представляют отдельные квазилинейные дифференциальные уравнения, которые с учетом начальных условий

$$u_L^+(j^+, j^-)|_{L=0} = j^+, \quad u_L^+(0, 0)|_{L \geq 0} = 0, \quad (24)$$

$$u_L^-(j^+, j^-)|_{L=0} = j^-, \quad u_L^-(0, 0)|_{L \geq 0} = 0 \quad (25)$$

достаточны для вычисления искомых величин $u_L^+(j^+, j^-)$ и $u_L^-(j^+, j^-)$, соответственно. Более того, если хотя бы одна из искомых величин предварительно определена из соответствующего уравнения (16) или (22), то другую можно найти из (15) или (23). Уравнения (15) и (23), взятые вместе,

$$\frac{\partial u_L^+(j^+, j^-)}{\partial L} = \alpha^+(j^+, u_L^-) \cdot \frac{\partial u_L^+(j^+, j^-)}{\partial j^+}, \quad \frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial L} = \alpha^-(u_L^+, j^-) \cdot \frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial j^-}, \quad (26)$$

предоставляет новую - третью, возможность, уже, совместного определения искомых величин. При этом в отличие от отдельных уравнений (22) и (16) здесь квазилинейные дифференциальные уравнения являются однородными. Уравнения (15), (16), (22), (23) можно решать также и при альтернативных начальных условиях:

$$u_L^+(j^+, 0) = T_L^+(j^+), \quad u_L^+(0, j^-) = R_L^+(j^-), \quad (27)$$

$$u_L^-(j^+, 0) = R_L^-(j^+), \quad u_L^-(0, j^-) = T_L^-(j^-). \quad (28)$$

Величины $R_L^+(j^+)$ и $T_L^+(j^+)$ представляют собой интенсивности отраженного и пропущенного слоев излучения, при освещении лишь одной из его границ лучами интенсивности j^+ или j^- . Для нахождения этих частных величин с помощью (15), (16), (22), (23) и (27)-(28), легко выписать, как отдельные уравнения

$$\frac{\partial R_L^+(j^-)}{\partial L} = \alpha^-(R_L^+(j^-), j^-) \cdot \frac{\partial R_L^+(j^-)}{\partial j^-} + \alpha^+(R_L^+(j^-), j^-), \quad (29)$$

$$\frac{\partial R_L^-(j^+)}{\partial L} = \alpha^+(j^+, R_L^-(j^+)) \cdot \frac{\partial R_L^-(j^+)}{\partial j^+} + \alpha^-(j^+, R_L^-(j^+)), \quad (30)$$

так и "смешанные" уравнения

$$\frac{\partial T_L^+(j^+)}{\partial L} = \alpha^+(j^+, R_L^-(j^+)) \cdot \frac{\partial T_L^+(j^+)}{\partial j^+}, \quad \frac{\partial T_L^-(j^-)}{\partial L} = \alpha^-(R_L^+(j^-), j^-) \cdot \frac{\partial T_L^-(j^-)}{\partial j^-}. \quad (31)$$

Начальные условия для (29)-(31), очевидно, легко могут быть выбраны из набора

$$R_L^\pm(j^m)|_{L=0} = 0, \quad R_L^\pm(0)|_{L \geq 0} = 0, \quad T_L^\pm(j^\pm)|_{L=0} = j^\pm, \quad T_L^\pm(0)|_{L \geq 0} = 0. \quad (32)$$

В частном случае изотропной среды, из-за наличия симметрии

$$\alpha^+(x, y) = \alpha^-(y, x) \equiv \alpha(y, x), \quad (33)$$

$$u_L^-(x, y) = u_L^+(y, x) \equiv u_L(y, x), \quad (34)$$

соотношения (22) и (16) совпадают, превращаясь в дифференциальное уравнение инвариантного погружения полученное впервые Амбарцумяном в [9]

$$\frac{\partial u_L(x, y)}{\partial L} = \alpha(u_L, y) \cdot \frac{\partial u_L(x, y)}{\partial y} + \alpha(y, u_L), \quad (35)$$

а система (26) переходит в

$$\frac{\partial u_L(x, y)}{\partial L} = \alpha(u_L(y, x), x) \cdot \frac{\partial u_L(x, y)}{\partial x}. \quad (36)$$

Используя в (36) обозначение

$$v_L(x, y) \equiv u_L(y, x), \quad (37)$$

можно сохранить форму системы (26)

$$\frac{\partial u_L(x, y)}{\partial L} = \alpha(v_L, x) \cdot \frac{\partial u_L(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_L(x, y)}{\partial L} = \alpha(u_L, y) \cdot \frac{\partial v_L(x, y)}{\partial y}. \quad (38)$$

Соотношение (36) (то же (38)) получено впервые и совместно с (35) представляет полный набор дифференциальных уравнений инвариантного погружения в случае изотропной среды. В случае анизотропной среды этот набор, очевидно, задается уже четырьмя уравнениями (15)-(16), (22)-(23), которые получены, фактически, посредством варьирования толщины L слоя со стороны правой - (15), (16); или левой - (22), (23); ее границ. Дифференциальные операторы:

$$\hat{E}_+ = \alpha^+(j^+, u_L^-) \cdot \frac{\partial}{\partial j^+}, \quad \hat{E}_- = \alpha^-(u_L^+, j^-) \cdot \frac{\partial}{\partial j^-}, \quad (39)$$

при этом указывают на изменения искоемых выходящих полей, в качестве следствия вариаций падающих потоков j^+ , j^- вызванных этим "бесконечно-малым" изменением толщины слоя со стороны ее левой - $\hat{E}_+$, или правой - $\hat{E}_-$, границ соответственно. Операторная форма записи уравнений инвариантного погружения

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{E}_+ \right) u_L^+ = 0, \quad (15a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{E}_- \right) u_L^- = \alpha^-(j^+, u_L^-), \quad (16a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{E}_-\right) u_L^+ = \alpha^+(u_L^+, j^-), \quad (22a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{E}_-\right) u_L^- = 0, \quad (23a)$$

наглядно показывает, что, совместное действие - $\left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{E}_\pm\right)$, оператора варьирования толщины - $\partial/\partial L$ и, порожденного им, оператора "радиационного отклика" среды - $\hat{E}_\pm$, оставляет неизменной интенсивность излучения, выходящего через противоположную (по отношению к варьированной) границу среды (формулы (15a) и (23a)), а на границе варьирования выходящее из среды излучение обусловлено свечением лишь ее бесконечно малого - пограничного слоя (формулы (16a) и (22a)).

5. Соотношения полной инвариантности. Хотя уравнения инвариантного погружения (15a), (16a), (22a), (23a) достаточны для решения задачи отражения-пропускания (см. выше), однако наличие операции дифференцирования - $\partial/\partial L$ подразумевает вычисление семейства функций $u_L^\pm$ по всем текущим значениям параметра погружения на интервале $[0, L]$. Из этого набора уравнений, однако, можно и вовсе исключить процедуру дифференцирования, сведя задачу к решению новой системы

$$\begin{cases} \alpha^+(j^+, u_L^-) \cdot \frac{\partial u_L^+(j^+, j^-)}{\partial j^+} - \alpha^-(u_L^+, j^-) \cdot \frac{\partial u_L^+(j^+, j^-)}{\partial j^-} = \alpha^+(u_L^+, j^-) \\ \alpha^+(j^+, u_L^-) \cdot \frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial j^+} - \alpha^-(u_L^+, j^-) \cdot \frac{\partial u_L^-(j^+, j^-)}{\partial j^-} = -\alpha^-(j^+, u_L^-), \end{cases} \quad (40)$$

где толщина слоя выступает уже лишь в качестве фиксированного параметра, а операция дифференцирования, включает только параметры двустороннего внешнего радиационного воздействия - j^+ и j^- на среду. Примечательно, что в обоих уравнениях полученной системы выступает один и тот же оператор

$$\hat{A} \equiv \alpha^+(j^+, u_L^-) \cdot \frac{\partial}{\partial j^+} - \alpha^-(u_L^+, j^-) \cdot \frac{\partial}{\partial j^-}, \quad (41)$$

который является разностью операторов "одностороннего радиационного отклика" среды в ответ на процедуру бесконечно малого варьирования одной из ее границ

$$\hat{A} = \hat{E}_+ - \hat{E}_- \quad (42)$$

и зависит от обеих искомым величин $u_L^\pm$. С его помощью систему (40) легко записать в более компактной форме

$$\hat{A} u_L^+ = +\alpha^+(u_L^+, j^-), \quad \hat{A} u_L^- = -\alpha^-(j^+, u_L^-). \quad (40a)$$

Нетрудно заметить (см. (42)), что воздействие оператора - $\hat{A}$, соответствует

процедуре добавления слоя бесконечно малой толщины к одной границе исходной среды с одновременным отнятием такого же слоя со стороны ее противоположной границы, что, очевидно, оставляет физическую картину задачи *полностью инвариантной*. Именно такая процедура впервые была применена Амбарцумяном [2] для решения задач диффузного отражения и пропускания излучения слоем конечной оптической толщины в линейном случае, но та же "инвариантная" процедура в нелинейном случае привела нас к оператору (41), т.е. к новой процедуре - "дифференцирование по параметрам двустороннего радиационного воздействия на слой извне", обусловленной именно *нелинейностью* задачи. Естественно $\hat{A}$ назвать *оператором полной инвариантности Амбарцумяна*. В случае изотропной среды оператор принимает (см. (33) и (41)) более простую форму

$$\hat{A} \equiv \alpha(v_L, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \alpha(u_L, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \quad (43)$$

а при переходе к линейному случаю и вовсе "исчезает". Действительно, после совершения такого перехода в (40а) с учетом (43), очевидных соотношений

$$\alpha(x, y) = -k \cdot y + \frac{\lambda}{2} \cdot k \cdot (x + y), \quad (44)$$

$$u_L(x, y) = x \cdot T + y \cdot R, \quad (45)$$

$$v_L(x, y) = x \cdot R + y \cdot T, \quad (46)$$

и применения несложных выкладок приходим к известной формуле Амбарцумяна [5]

$$T^2 = R^2 + \frac{2}{\lambda} \cdot (2 - \lambda) \cdot R + 1, \quad (47)$$

которая совместно с (45)-(46) представляет свойство *полной инвариантности* в линейной одномерной изотропной задаче диффузного отражения-пропускания. Здесь: k и λ - коэффициент поглощения и вероятность выживания фотона при элементарном акте рассеяния, R и T - коэффициенты диффузного отражения и пропускания среды. Характерно, что толщина слоя в обоих (нелинейном и линейном) случаях входит лишь в качестве фиксированного параметра (формулы (40а) и (45)-(47) соответственно). При решении системы полной инвариантности (40) (то же (40а)) зависимость от толщины слоя, очевидно, должна задаваться посредством величин входящих в начальные условия (27), (28). Таким образом, в нелинейном случае (см. (40), (40а), (27), (28)), аналогично линейному - (45)-(47), удастся:

1. Задачу двустороннего облучения среды свести к отысканию решения более простой задачи об освещении среды лишь со стороны одной из ее границ.

2. Толщина слоя остается при этом лишь фиксированным параметром.

6. *Полихроматический случай.* Рассмотренный нами монохроматический случай в астрофизике играет лишь роль "нулевого"- модельного приближения, поскольку соответствует случаю двухуровневого атома. Для интерпретации наблюдаемых спектров астрофизических объектов приходится иметь дело с многоуровневыми атомами и потому практическую важность приобретают задачи полихроматического рассеяния. Очевидно, что всякая задача полихроматического рассеяния, в действительности, существенно нелинейна. Исходя из этого, уместно выяснить, как видоизменяются полученные выше формулы в многочастотном случае? Пусть одномерная анизотропная среда геометрической толщины L , в n различных частотах одновременно, как слева, так и справа находится под воздействием потоков внешнего излучения заданных в виде вектор-строк J^+ и J^- соответственно

$$J^\pm = \{j_1^\pm, \dots, j_n^\pm\}. \quad (48)$$

Интенсивности излучения выходящего через правую и левую границы среды на каждой отдельной частоте k ($k = 1, 2, \dots, n$) обозначим посредством

$$u_k^\pm(j_1^+, \dots, j_n^+; j_1^-, \dots, j_n^-; L) \equiv u_k^\pm(J^+, J^-; L), \quad (49)$$

и построим вектор-строки

$$U_L^\pm \equiv \{u_1^\pm(J^+, J^-; L), \dots, u_n^\pm(J^+, J^-; L)\}, \quad (50)$$

тогда соотношения "нелинейного сложения слоев" (2)-(4) в полихроматическом случае примут вид

$$U_{A+B}^+(x, y) = U_B^+(P, y), \quad (51)$$

$$U_{A+B}^-(x, y) = U_A^-(x, S), \quad (52)$$

$$P = U_A^+(x, S), \quad S = U_B^-(P, y) \quad (53)$$

где введены вектор-строки

$$x \equiv \{x_1, \dots, x_n\}, \quad y \equiv \{y_1, \dots, y_n\}, \quad (54)$$

$$P \equiv \{p_1, \dots, p_n\}, \quad S \equiv \{s_1, \dots, s_n\}. \quad (55)$$

Если отражающе-пропускающие свойства элементарного слоя задавать в виде

$$u_k^\pm(J^+, J^-; \Delta) = \left\{ \begin{matrix} j_k^+ \\ j_k^- \end{matrix} \right\} + \alpha_k^\pm(J^+, J^-) \cdot \Delta + O(\Delta^2), \quad (56)$$

то с помощью (51)-(56), поступая как в монохроматическом случае, получим полный набор уравнений инвариантного погружения

$$\frac{\partial u_k^+}{\partial L} = \sum_{l=1}^n \alpha_l^-(U^+, J^-) \cdot \frac{\partial u_k^+}{\partial j_l^-} + \alpha_k^+(U^+, J^-), \quad (57)$$

$$\frac{\partial u_k^-}{\partial L} = \sum_{l=1}^n \alpha_l^+(J^+, U^-) \cdot \frac{\partial u_k^-}{\partial j_l^+} + \alpha_k^-(J^+, U^-), \quad (58)$$

$$\frac{\partial u_k^+}{\partial L} = \sum_{l=1}^n \alpha_l^+(J^+, U^-) \cdot \frac{\partial u_k^+}{\partial j_l^+}, \quad (59)$$

$$\frac{\partial u_k^-}{\partial L} = \sum_{l=1}^n \alpha_l^-(U^+, J^-) \cdot \frac{\partial u_k^-}{\partial j_l^-}. \quad (60)$$

Исключая из (57)-(58) производные по толщине слоя, окончательно получим, систему полной инвариантности для исследуемого векторного случая

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^n \alpha_l^+(J^+, U^-) \cdot \frac{\partial u_k^+}{\partial j_l^+} - \sum_{l=1}^n \alpha_l^-(U^+, J^-) \cdot \frac{\partial u_k^+}{\partial j_l^-} = +\alpha_k^+(U^+, J^-) \\ \sum_{l=1}^n \alpha_l^+(J^+, U^-) \cdot \frac{\partial u_k^-}{\partial j_l^+} - \sum_{l=1}^n \alpha_l^-(U^+, J^-) \cdot \frac{\partial u_k^-}{\partial j_l^-} = -\alpha_k^-(J^+, U^-). \end{cases} \quad (61)$$

Вводя операторы

$$\hat{E}_+ = \sum_{l=1}^n \alpha_l^+(J^+, U^-) \cdot \frac{\partial}{\partial j_l^+}, \quad \hat{E}_- = \sum_{l=1}^n \alpha_l^-(U^+, J^-) \cdot \frac{\partial}{\partial j_l^-}, \quad (62)$$

$$\hat{A} = \hat{E}_+ - \hat{E}_- = \sum_{l=1}^n \alpha_l^+(J^+, U^-) \cdot \frac{\partial}{\partial j_l^+} - \sum_{l=1}^n \alpha_l^-(U^+, J^-) \cdot \frac{\partial}{\partial j_l^-}, \quad (63)$$

уравнения инвариантного погружения запишем в компактной форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{E}_- \right) u_k^+ = \alpha_k^+(U^+, J^-), \quad \left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{E}_+ \right) u_k^- = \alpha_k^-(J^+, U^-), \quad (64)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{E}_+ \right) u_k^+ = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial L} - \hat{E}_- \right) u_k^- = 0, \quad (65)$$

а система полной инвариантности при этом примет вид

$$\hat{A} u_k^+ = +\alpha_k^+(U^+, J^-), \quad \hat{A} u_k^- = -\alpha_k^-(J^+, U^-). \quad (66)$$

Начальные условия записываются аналогично (24), (25), (27), (28):

$$u_k^\pm(J^+, J^-; L) \Big|_{L=0} = j_k^\pm, \quad u_k^\pm(0, 0; L) \Big|_{L \geq 0} = 0, \quad (67)$$

$$u_k^+(J^+, 0; L) = T_k^+(J^+; L), \quad u_k^+(0, J^-; L) = R_k^+(J^-; L), \quad (68)$$

$$u_k^-(J^+, 0; L) = R_k^-(J^+; L), \quad u_k^-(0, J^-; L) = T_k^-(J^-; L), \quad (69)$$

а для компонентов фигурирующих здесь "вспомогательных" вектор-функций $T^\pm \equiv \{T_1^\pm(J^\pm; L), \dots, T_n^\pm(J^\pm; L)\}$ и $R^\pm \equiv \{R_1^\pm(J^\mp; L), \dots, R_n^\pm(J^\mp; L)\}$ легко находим уравнения

$$\frac{\partial R_k^+(J^-; L)}{\partial L} = \sum_{l=1}^n \alpha_l^-(R^+, J^-) \cdot \frac{\partial R_k^+(J^-; L)}{\partial j_l^-} + \alpha_k^+(R^+, J^-), \quad (70)$$

$$\frac{\partial R_k^-(J^+; L)}{\partial L} = \sum_{l=1}^n \alpha_l^+(J^+, R^-) \cdot \frac{\partial R_k^-(J^+; L)}{\partial j_l^+} + \alpha_k^-(J^+, R^-), \quad (71)$$

$$\frac{\partial T_k^+(J^+; L)}{\partial L} = \sum_{j=1}^n \alpha_j^+(J^+, R^-) \cdot \frac{\partial T_k^+(J^+; L)}{\partial j_j^+}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial T_k^-(J^-; L)}{\partial L} = \sum_{j=1}^n \alpha_j^-(R^+, J^-) \cdot \frac{\partial T_k^-(J^-; L)}{\partial j_j^-}, \quad (73)$$

с начальными условиями: $R_k^\pm(J^\mp; L)|_{L=0} = 0$, $R_k^\pm(0; L)|_{L \geq 0} = 0$, $T_k^\pm(J^\pm; L)|_{L=0} = J_k^\pm$, $T_k^\pm(0; L)|_{L \geq 0} = 0$. В частном случае полубесконечной анизотропной среды,

очевидно, имеют место условия $\frac{\partial R_k^\pm(J^\mp; L)}{\partial L} \Big|_{L \rightarrow \infty} = 0$, тогда уравнения (70)-(71) упрощаются превращаясь в

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j^-(R^+, J^-) \cdot \frac{\partial R_k^-(J^-)}{\partial j_j^-} + \alpha_k^+(R^+, J^-) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j^+(J^+, R^-) \cdot \frac{\partial R_k^+(J^+)}{\partial j_j^+} + \alpha_k^-(J^+, R^-) &= 0, \end{aligned} \quad (74)$$

где приняты обозначения $R_k^\pm(J^\mp; \infty) = R_k^\pm(J^\mp)$, $R^\pm = \{R_1^\pm(J^m), \dots, R_n^\pm(J^m)\}$. Первое из уравнений (74) соответствует удалению в бесконечность левой границы среды, а второе - правой. Для полубесконечной среды последние являются уравнениями полной инвариантности и в случае изотропной среды, как было отмечено выше, получены и аналитически решены в случаях двухуровневого [9] и трехуровневого [11,12] атомов.

Таким образом, при переходе от одночастотного случая к полихроматическому, форма основных уравнений сохраняется с точностью до замены скалярных величин векторными. Это означает, что все преимущества, достигнутые при решении линейной задачи отражения-пропускания методами Амбарцумяна, адекватным образом имеют место также в общем случае полихроматического рассеяния в одномерной анизотропной среде.

7. Заключение. Перечислим кратко основные результаты работы. С помощью последовательного применения подхода Амбарцумяна удастся основные достижения решения линейной задачи диффузного отражения-пропускания конечного слоя адекватным образом перенести на нелинейный случай. При этом, в случае одномерной анизотропной среды: сначала приводятся формулы нелинейного сложения слоев - (2)-(4), которые пригодны для построения процедур "рекуррентного" расчета: однородных, периодических и произвольных слоистых сред, затем с помощью этих соотношений выводится *полный* набор дифференциальных уравнений инвариантного погружения - (15)-(16), (22)-(23), (то же (15а)-(16а), (22а)-(23а)). Из последних следуют уравнения *полной инвариантности* - (40), (то же (40а)), которые предоставляют возможность свести решение нелинейной задачи диффузного отражения-пропускания при облучении

слоя со стороны *обеих* ее границ "интенсивными" потоками излучения, к более простой задаче освещения лишь *ее одной* границы. Толщина слоя, при этом, остается фиксированной величиной, а появившийся новый дифференциальный оператор *полной инвариантности Амбарцумяна*- (41), подразумевает дифференцирование только по параметрам радиационного воздействия извне на среду и одинаков для интенсивностей выходящих через обе границы слоя. В конце работы показывается, что при переходе от одночастотного случая (двухуровневый атом), к важному, с точки зрения астрофизической интерпретации, многочастотному случаю (полихроматическое рассеяние - многоуровневый атом) все результаты сохраняют свою форму с точностью до перехода от скалярных величин к векторным, количество компонентов которых равно числу рассматриваемых дискретных частот.

Выражаю свою искреннюю признательность доктору ф.-м.н. А.Г.Никогосяну за всестороннюю поддержку и помощь на всех этапах подготовки представленной работы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна,
Армения, e-mail: hovpik@bao.sci.am

ON THE NONLINEAR PROBLEM OF DIFFUSE REFLECTION AND TRANSMISSION OF THE RADIATION ENERGY FOR A SLAB OF FINITE THICKNESS

H.V.PIKICHIAN

The successive application of Ambartsumian's approach for the one-dimensional non-isotropic medium allows extending the main achievements in solving the linear problem of diffuse reflection and transmission for a slab of finite thickness onto nonlinear case. We present formulas for the "nonlinear addition" of layers which are suitable for constructing the procedures of recurrence calculation for homogeneous, periodic and arbitrary stratified media. These relations allow deriving a complete set of differential equations of invariant imbedding which, in its turn, is utilized to obtain a system of equations of complete invariance. These equations reduce the solution of the nonlinear problem of diffuse reflection-transmission for the case when both sides of the medium are illuminated from outside to a relatively simple problem when only one of the boundaries of a medium is illuminated by the external source. Slabs thickness appears only as a fixed parametr. Finally, we show that

all relations derived for the monochromatic case (two-level atom) remain valid in the vector form for polychromatic (multi-level) problems which are important from the point of view of astrophysical applications.

Key words: *radiative transfer: nonlinear problem of diffuse reflection-transmission*

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Амбарцумян, Астрон. ж., 19, 30, 1942.
2. В.А.Амбарцумян, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
3. В.А.Амбарцумян, ЖЭТФ, 13, 323, 1943.
4. В.А.Амбарцумян, ДАН СССР, 43, 106, 1944.
5. В.А.Амбарцумян, Изв. АН Арм. ССР, Естеств. науки, N1-2, 31, 1944.
6. В.А.Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, 7, 199, 1947.
7. В.А.Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, 8, 149, 1948.
8. Принцип инвариантности и его приложения, (труды симпозиума провед. 26-30 окт. 1981 г. в Бюракане), под. ред. М.А.Мнацаканяна и О.В.Пикичяна, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1989, 522с.
9. В.А.Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, 38, 225, 1964.
10. В.А.Амбарцумян, в кн.: "Теория звездных спектров", (под. ред. В.В.Соболева и др.), Наука, М., 1966, с.91-104.
11. А.Г.Никогосян, ДАН Арм. ССР, 39, 227, 1964.
12. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 1, 285, 1965.
13. М.А.Мнацаканяна, ДАН ССР, 262, 856, 1982.
14. M.Gros, C.Magnan, Astron. Astrophys., 93, 150, 1981.
15. C.Magnan, Astron. Astrophys., 271, 543, 1993.
16. C.Magnan, P. De Laverny, Astrofizika, 37, 313, 1994.
17. В.А.Амбарцумян, ДАН АН Арм. ССР, 39, 159, 1964.
18. Н.Б.Енгибарян, Астрофизика, 1, 297, 1965.
19. В.Ю.Теребиж, Астрофизика, 3, 281, 1967.
20. Н.Б.Енгибарян, Астрофизика, 3, 325, 1967.
21. Р.С.Варданян, Н.Б.Енгибарян, Уч. зап. ЕГУ, естеств. н., N3, 28, 1969.
22. N.B.Yengibarian, On non-linear discrete boundary-value problems and semi-groups, Preprint 2009-02, Inst of Math. NAS of Armenia, July 08, 2009, 10p.
23. R.Bellman, G.M.Wing, An introduction to Invariant Imbedding, (Classics in Appl. Math., vol.8), Philadelphia: SIAM, 1992.
24. В.И.Кляцкин, Динамика стохастических систем: курс лекций, Физматлит, М., 2003, 240с.
25. Дж.Касты, Р.Калаба, Методы погружения в прикладной математике, М., Мир, 1976, 224 с.
26. H.Pikichian, in Proc. of international conf. on "Lasers'97" (New Orleans, LA, December. 15-19, 1997), Ed. by J.J.Carrol, T.A.Goldman, STS press., McLEAN, VA, 1998, pp.226-232.
27. H.V.Pikichian, In materials of Byurakan conf. (Ambartsumians 100-th anniversary, 18 sept 2008) (in press).
28. О.В.Пикичян, Сообщ. Бюракан. общ., 55, 5, 1984.