

О НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ДИСКА II. ИЗГИБНЫЕ МОДЫ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

С.Н.НУРИТДИНОВ^{1,2}, К.Т.МИРТАДЖИЕВА^{2,1}, ИКБАЛ АХМАД³,
Ж.К.РУЗИБАЕВ^{1,2}

Поступила 29 июля 2009

Принята к печати 16 сентября 2009

Рассмотрена проблема гравитационных неустойчивостей нелинейно-неравновесных дисковых моделей с изотропной и анизотропной диаграммами скоростей относительно к изгибным модам вертикальных колебаний. В общем виде получены нестационарные аналоги дисперсионных уравнений вертикальных колебаний этих моделей. Подробно изучены основные крупномасштабные моды колебаний, соответствующие, прежде всего, наиболее распространенному виду изгиба в форме интеграла, а также, куполообразному, U-образному и прецессионному типам изгибов. Для каждой из этих мод вертикальных колебаний построены критические диаграммы зависимости начального вириального отношения от параметра вращения нестационарной модели. Выполнен сравнительный анализ инкрементов неустойчивостей указанных мод колебаний для определения зависимости их характерных времен проявления от основных физических параметров рассматриваемых двух моделей.

Ключевые слова: *модели:самогравитирующие диски*

1. *Введение.* Продолжим наше исследование [1] гравитационных неустойчивостей малых возмущений на фоне нелинейно неравновесной модели самогравитирующего диска с целью оценки роли степени исходной нестационарности этой модели в поведении конкретных мод колебаний. В предыдущей работе [1] нами были изучены проблемы неустойчивостей наиболее интересных типов горизонтальных колебаний [2-4], развивающиеся в плоскости нелинейно пульсирующей модели бесстолкновительного диска, являющейся нестационарным обобщением известной равновесной изотропной модели Бисноватого-Когана и Зельдовича [5]. Ниже в рамках данной, обобщенной нами нелинейно нестационарной модели и одной ее усредненной версии с анизотропной диаграммой скоростей изучим вопросы гравитационной неустойчивости другого класса возмущений, имеющих место почти всегда вдоль направления, перпендикулярного к плоскости диска, и потому называемым изгибными модами возмущения (см., например, [3,6-8] и ссылки там), которые до сих пор рассматривались многими авторами лишь в рамках стационарных моделей. В обсуждении полученных нами результатов мы укажем также роль нелинейной нестационарности моделей в эволюции рассмотренных нами различных мод колебаний, их сравнения, возможные

приложения и существенные различия от соответствующих стационарных конфигураций.

2. *Основные соотношения и уравнения.* Согласно первой части [1] данной работы, в исходном состоянии мы рассматриваем следующую нелинейно-нестационарную фазовую модель бесстолкновительного самогравитирующего диска

$$\Psi(r, v_r, v_\perp, t) = \frac{\sigma_0}{2\pi\Pi\sqrt{1-\Omega^2}} \left[\frac{1-\Omega^2}{\Pi^2} \left(1 - \frac{r^2}{\Pi^2} \right) - (v_r - v_a)^2 - (v_\perp - v_b)^2 \right]^{-1/2} \chi(R-r), \quad (1)$$

который совершает радиальные пульсации по закону $R(t) = R_0 \Pi(t)$, где

$$\Pi(t) = \frac{1 + \lambda \cos \psi}{1 - \lambda^2}, \quad t = \frac{\psi + \lambda \sin \psi}{(1 - \lambda^2)^{3/2}}, \quad (2)$$

причем амплитуда радиальных колебаний $\lambda = 1 - (2T/U)_0$ выражается через значения вириального отношения в момент времени $t=0$, т.е. $0 \leq \lambda \leq 1$. В (1) принята нормировка $\pi^2 G \sigma_0 = 2 R_0$ ($R_0 = 1$), а Ω - безразмерный параметр [5], характеризующий величину твердотельного вращения, χ - функция Хевисайда. Остальные обозначения подробно указаны в [1]. Далее нам понадобится также выражение для поверхностной плотности в исходном состоянии

$$\sigma(\bar{r}; t) = \frac{\sigma_0}{\Pi^2(t)} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\Pi^2(t)}}, \quad (3)$$

вытекающее из (1). Период радиальной пульсации модели равен $P(\lambda) = 2\pi \cdot (1 - \lambda^2)^{-3/2}$.

Отметим, что нелинейно нестационарная модель (1) так же, как ее равновесное состояние [5], имеет изотропную диаграмму скоростей. Поскольку это носит несколько идеализированную картину, напрашивается рассмотрение в исходном состоянии также хотя бы одной анизотропной модели с радиальной нестационарностью. С этой целью для начала целесообразно воспользоваться известным способом усреднения по параметру Ω :

$$\Psi_a = \frac{\int_{-1}^{+1} \rho(\Omega) \cdot \Psi d\Omega}{\int_{-1}^{+1} \rho(\Omega) d\Omega}. \quad (4)$$

Ранее один из авторов данной статьи построил в [9] вращающуюся анизотропную модель, рассматривая весовую функцию в (4) в виде

$$\rho(\Omega') = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \Omega'^2} (1 + \Omega\Omega'). \quad (5)$$

Тогда из (4) с учетом (1)-(3) и (5) имеем [9]:

$$\Psi_a = \frac{\sigma_0}{\pi} \left[1 + \Omega \cdot (x v_y - y v_x) \right] \cdot \chi(B), \quad (6)$$

где роль параметра вращения играет опять величина Ω , а $B = (1 - r^2/\Pi^2)(1 - \Pi^2 v_\perp^2) - \Pi^2(v_r - v_a)^2$, причем $v_a = -\lambda\sqrt{1 - \lambda^2}(r \sin\psi/\Pi^2)$. Способ (4) удобен тем, что, имея нестационарный аналог дисперсионного уравнения (НАДУ) для изотропной модели (1), легко можно получить такое уравнение также и для анизотропной модели (6) без повторного выполнения необходимых расчетов. Для этого достаточно применить процедуру (4) к НАДУ изотропной модели, выводу которого посвящен следующий параграф.

3. *Вывод НАДУ изгибных возмущений для модели (1).* С этой целью воспользуемся теорией малых изгибных колебаний тонкого диска, развитой впервые Хантером и Тумре [6]. Согласно им, если плоскость диска подвергнута деформации и вертикальное смещение его элемента в точке $\kappa(x, y)$ в момент времени t равно $H(\bar{r}, t)$, тогда уравнение движения частицы имеет вид:

$$Z^2 H(\bar{r}, t) = F_\perp - \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(P_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right]. \quad (7)$$

Здесь оператор

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y},$$

где \bar{v}_x и \bar{v}_y - компоненты скорости центра, а сила

$$F_\perp = G \cdot \iint \frac{\sigma(\bar{r}', t) \cdot [H(\bar{r}', t) - H(\bar{r}, t)]}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} dx' dy' \quad (8)$$

есть поперечная составляющая гравитационной силы, действующей на рассматриваемый элемент диска вследствие изгибного возмущения. P_{xx} и P_{yy} - компоненты тензора "давления", причем для изотропной модели (1) $P_{xx} = P_{yy}$.

В соответствии с теорией [6], величина вертикальных возмущений в общем случае задается в виде

$$H(\bar{r}, t) = D(\psi) \frac{1}{\xi} P_N^m(\xi) e^{im\varphi}, \quad (9)$$

где $\xi = (1 - r^2/R^2)^{1/2}$, $D(\psi)$ - искомая функция от времени t , характеризующая амплитуду вертикальных колебаний, φ - азимутальный угол, $P_N^m(\xi)$ - присоединенный полином Лежандра, N - основной индекс возмущения, m - азимутальное волновое число, причем в отличие от горизонтальных мод, разность $N - m$ теперь должна быть всегда нечетной.

Согласно (1), легко находим компоненты скорости центра

$$\bar{v}_x = -\frac{1}{\Pi^2} \left[\frac{\lambda \sin \psi}{(1-\lambda^2)^{1/2}} \cdot x + \Omega y \right], \quad \bar{v}_y = -\frac{1}{\Pi^2} \left[\frac{\lambda \sin \psi}{(1-\lambda^2)^{1/2}} \cdot y - \Omega x \right]. \quad (10)$$

Используя этот результат, сначала вычислим левую часть уравнения (7).
С учетом (9) имеем

$$Z^2 H = \left[\frac{D'(\psi)}{\Pi^2} + \frac{\lambda \sin \psi + 2im\Omega}{\sqrt{1-\lambda^2}\Pi^3} D'(\psi) + \frac{2im\Omega\lambda \sin \psi - m^2\Omega^2\sqrt{1-\lambda^2}}{(1-\lambda^2)^{3/2}\Pi^4} D(\psi) \right] \frac{H(1-\lambda^2)}{D(\psi)}, \quad (11)$$

где штрих над функцией $D(\psi)$ означает дифференцирование по ψ .

Перейдем к расчету правой части (7). Зная (10), легко вычислить компоненты тензора "давления" для модели (1)

$$P_{xx} = P_{yy} = \iint (v_y - \bar{v}_y)^2 \Psi d v_x d v_y = \frac{\sigma_0(1-\Omega^2)}{3\Pi^4} \cdot \xi^3. \quad (12)$$

Следовательно, выражение в квадратной скобке в правой части (7) равно

$$\frac{\sigma_0(1-\Omega^2)}{3\Pi^4} \cdot \left[\frac{r^2}{\Pi^4} \cdot \frac{d^2 P_N^m}{d\xi^2} + \frac{2}{\Pi^2} \left(P_N^m - \xi \cdot \frac{dP_N^m}{d\xi} \right) - \frac{m^2}{r^2} \xi^2 \cdot P_N^m \right] \cdot D(\psi) \cdot e^{im\varphi}, \quad (13)$$

что, согласно известному уравнению для функции $P_N^m(\xi)$, сильно упрощается и принимает вид

$$\frac{\sigma_0(1-\Omega^2)}{3\Pi^6} \cdot [m^2 - N(N+1) + 2] \cdot D(\psi) \cdot P_N^m(\xi) \cdot e^{im\varphi}. \quad (13')$$

Наконец, вычислим поперечную силу F_{\perp}

$$F_{\perp} = -\frac{3\pi GM}{2R^3\xi} \cdot (\gamma_{mN} - 1) \cdot D(\psi) P_N^m(\xi) e^{im\varphi} = \frac{2}{\Pi^3} (1 - \gamma_{mN}) \cdot H, \quad (14)$$

где M - масса диска, а

$$\gamma_{mN} = \frac{(N+m)!!(N-m)!!}{(N+m-1)!!(N-m-1)!!}.$$

Подставляя (11), (13') и (14) в (7) и сокращая обе части на функцию H , мы получим следующее искомое НАДУ изгибных возмущений для изотропной нестационарной модели (1):

$$(1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2 D}{d\psi^2} + \left(\lambda \sin \psi + 2im\Omega\sqrt{1-\lambda^2} \right) \frac{dD}{d\psi} + 2 \left[\gamma_{mN} - 1 + \frac{m\Omega\sqrt{1-\lambda^2}}{1 + \lambda \cos \psi} \right] \times \\ \times \left(i\lambda \sin \psi - \frac{m\Omega}{2}\sqrt{1-\lambda^2} \right) - \frac{(1-\Omega^2)(1-\lambda^2)(N^2 - m^2 + N - 2)}{6(1 + \lambda \cos \psi)} \Big] D(\psi) = 0. \quad (15)$$

Для вывода из (15) обычного дисперсионного соотношения соответствующей

стационарной модели надо подставить в (15) $\lambda = 0$ и $D(\psi) \sim \exp(i\omega\psi)$. Тогда уравнение сильно упрощается и принимает вид

$$\frac{1}{2}(\omega + m\Omega)^2 = \gamma_{mN} - 1 - \frac{1 - \Omega^2}{6} \cdot (N^2 - m^2 + N - 2), \quad (16)$$

что совпадает с результатом [8].

Теперь с помощью НАДУ (15) мы можем исследовать поведение любого возможного типа искривления на фоне нелинейной модели (1).

4. Анализ НАДУ для отдельных мод колебаний на фоне изотропной модели. Среди различных изгибных мод колебаний наиболее интересной и чаще всего наблюдаемой в дисках спиральных галактик является асимметричная мода колебаний, неустойчивость которой приводит к изгибу, напоминающему в полном объеме "ковбойскую шляпу" (или в проекции символ интеграла). Анализ поведения функции $H(r)$ в (9) показывает, что мода колебаний ($m = 1; N = 4$), ($m = 5; N = 6$) и ($m = 7; N = 8$) приводит именно к данному асимметричному изгибу диска галактик (рис.1).

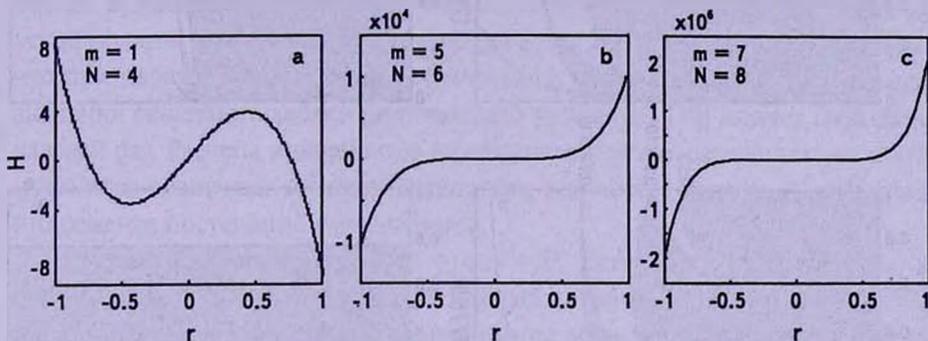


Рис.1. Графики функции $H(r)$ для трех мод а) $m = 1; N = 4$; б) $m = 5; N = 6$; в) $m = 7; N = 8$.

Как видно из рис.1, наблюдаемый в дисках галактик асимметричный изгиб более адекватно описывается модами $m = 5; N = 6$ и $m = 7; N = 8$, чем, как считалось ранее, модой $m = 1; N = 4$. Поэтому мы считаем, что здесь достаточно привести результаты расчета для моды $m = 5; N = 6$.

Асимметричная мода ($m = 5; N = 6$). Согласно (16), неустойчивость данной моды для стационарной модели наступает, если параметр вращения системы $\Omega < 0.563194$. А для нестационарной модели (1) поведение данного типа возмущения (5;6), в соответствии с (15), описывается при помощи следующего НАДУ:

$$\begin{aligned} & (1 + \lambda \cos\psi) \frac{d^2 D}{d\psi^2} + \left(\lambda \sin\psi + 10 i \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} \right) \frac{dD}{d\psi} + \\ & + \left[\frac{437}{128} + \frac{10\Omega\sqrt{1 - \lambda^2}}{1 + \lambda \cos\psi} \left(i \lambda \sin\psi - \frac{5}{2} \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} \right) - \frac{5(1 - \Omega^2)(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda \cos\psi)} \right] \cdot D(\psi) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, мы имеем дифференциальное уравнение лишь с двумя произвольными параметрами. Оно решалось нами численно методом периодических решений [10] при значениях параметров λ и Ω от 0 до 1.

С помощью полученных результатов построена критическая диаграмма начального вириального отношения $(2T/U)_0$ от параметра вращения системы Ω (рис.2а). Как видно из диаграммы, нелинейно пульсирующий диск при малых и умеренных значениях Ω может стать устойчивым относительно данного типа возмущения лишь в узких "каналах"

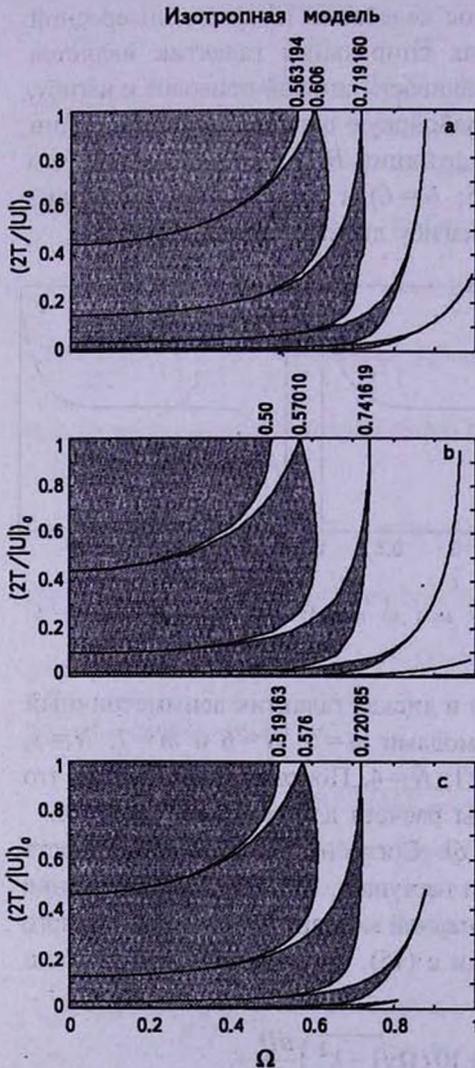


Рис.2. Критические зависимости $(2T/U)_0$ от параметра вращения изотропной модели для трех мод а) $m=5$; $N=6$, б) $m=0$; $N=3$, в) $m=4$; $N=5$.

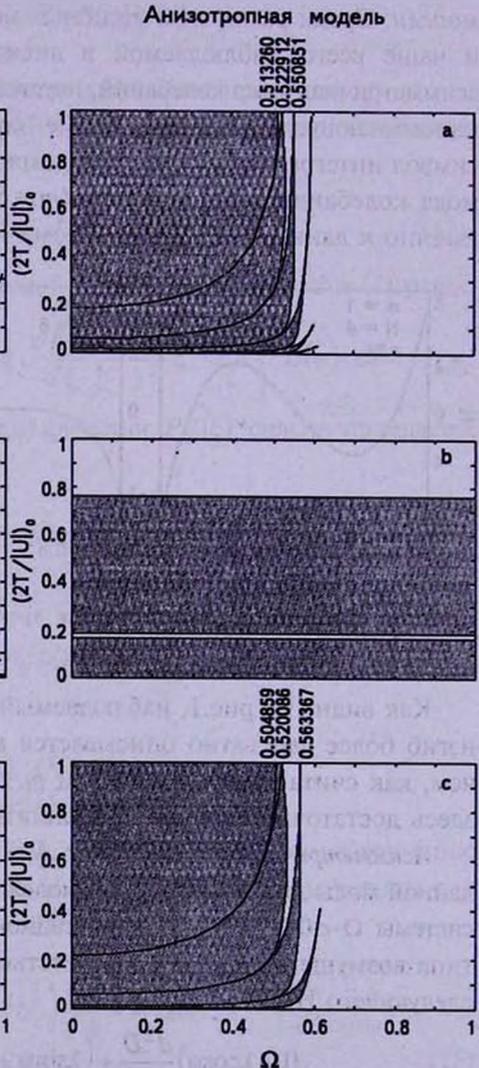


Рис.3. Критические зависимости $(2T/U)_0$ от параметра вращения анизотропной модели для тех же трех мод.

устойчивости". Для определения таких каналов нам пришлось проследить с большой точностью поведение инкремента неустойчивости при непрерывном изменении параметра $(2T/|U|)_0$. Результат такого расчета показывает, что при $\Omega = 0$ действительно имеются следующие очень узкие интервалы устойчивости на оси ординат: (0.445811; 0.445230), (0.151205; 0.150354), (0.038721; 0.038671), (0.009122; 0.009122), причем по мере приближения к "холодному" начальному состоянию по вириальному параметру количество таких зон устойчивости увеличивается. Отметим также, что при $\Omega = 0$ мы имеем неустойчивость аperiodического характера, но когда $\Omega > 0$ мы сталкиваемся с колебательной неустойчивостью.

Как отмечено выше, при отсутствии радиальных колебаний $((2T/|U|)_0 = 1)$ стационарный диск полностью неустойчив при $\Omega < 0.563194$. Как только исходный диск начинает пульсировать радиально, инкремент неустойчивости асимметричной изгибной моды (5;6) постепенно уменьшается (рис.4) и соответственно область неустойчивости на диаграмме рис.2а сужается из-за наличия канала устойчивости. Перейдя каналы устойчивости, мы попадаем каждый раз в зону неустойчивости. Заметим, что при переходе через канал устойчивости реальная часть собственного значения решаемого характеристического уравнения [10] меняет свой знак каждый раз. Расчеты инкрементов неустойчивостей для различных значений параметра вращения Ω показывают, что, в целом, с ростом Ω значения инкремента постепенно уменьшаются.

Купольная неустойчивость ($m = 0; N = 3$). Данный тип возмущения, в целом, напоминает куполообразный изгиб диска в его центральной части [8]. В данном случае вертикальное смещение элемента диска с координатой (x, y) равно

$$H(\vec{r}, t) = D(\psi) \cdot \left(1 - \frac{5r^2}{2R^2} \right). \quad (18)$$

Стационарное дисперсионное уравнение (16) не имеет действительных корней, если $\Omega < 0.5$, а НАДУ (15) примет вид

$$(1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2 D}{d\psi^2} + \lambda \sin \psi \cdot \frac{dD}{d\psi} + \left[\frac{5}{2} - \frac{10(1 - \Omega^2)(1 - \lambda^2)}{3(1 + \lambda \cos \psi)} \right] \cdot D(\psi) = 0. \quad (19)$$

Численные результаты интегрирования (19) и нахождения зависимости $(2T/|U|)_0 + \Omega$ представлены на рис.2b. Как видно, мы опять имеем дело с "каналами" устойчивости, которые тянутся вплоть до оси ординат. При $\Omega = 0$ на оси $(2T/|U|)_0$ имеются узкие зоны устойчивости с точностью до 10^{-5} : (0.4436; 0.4394), (0.0965; 0.0951), (0.0155; 0.0153), (0.0023; 0.0021), (0.00035; 0.00034) и т.д.

Здесь с приближением к "холодному" начальному состоянию размеры

областей неустойчивости и значения их инкрементов уменьшаются. Заметим также, что инкременты куполообразного изгибного возмущения, как и в предыдущем асимметричном случае, уменьшаются с ростом Ω .

U-образная неустойчивость ($m = 4$; $N = 5$). Анализ наблюдательных данных (см., например, [11]), показывает, что в дисках многих спиральных галактик имеется подобный изгиб. Поэтому эта мода также представляет большой интерес. С помощью уравнения (15) мы находим следующее НАДУ для этой моды:

$$(1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2 D}{d \psi^2} + \left(\lambda \sin \psi + 8 i \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} \right) \frac{d D}{d \psi} + \left[\frac{187}{64} + \frac{8 \Omega \sqrt{1 - \lambda^2}}{1 + \lambda \cos \psi} \left(i \lambda \sin \psi - 2 \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} \right) - \frac{4(1 - \Omega^2)(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda \cos \psi)} \right] \cdot D(\psi) = 0. \quad (20)$$

Численные расчеты уравнения (20) показаны на рис.2с. Здесь видно, что при $\Omega = 0$ мы имеем следующие узкие интервалы устойчивости на оси ординат: (0.461000; 0.459100), (0.129500; 0.128700), (0.026794; 0.026694) и т.д. Здесь, также, как и в случае моды $m = 5$; $N = 6$, при $\Omega = 0$ имеется неустойчивость аperiodического характера, но как только диск начинает вращаться, вступает в силу колебательная неустойчивость.

Прецессионные колебания ($m = 1$; $N = 2$). Неустойчивость такого типа возмущения приводит к несовпадению оси симметрии диска с осью вращения самой галактики. По-видимому, впервые роль прецессионных колебаний дисковой компоненты Галактики рассматривал Линден-Белл [12], который доказал их устойчивость в рамках чисто линейной теории. До сих пор никто так и не смог доказать возможность неустойчивости прецессии без учета диссипативных явлений. Из стационарного дисперсионного соотношения (16) находим $\omega_1 = -2\Omega$, $\omega_2 = 0$, что означает полную устойчивость прецессии для стационарной модели.

При прецессионных колебаниях диска вертикальное смещение

$$H(\bar{r}, t) \sim r. \quad (21)$$

С помощью уравнения (15) мы имеем следующее НАДУ для прецессирующего нестационарного диска

$$(1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2 D}{d \psi^2} + \left(\lambda \sin \psi + 2 i \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} \right) \frac{d D}{d \psi} + \frac{\lambda(\cos \psi + \lambda) + 2 i \Omega \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} \sin \psi}{1 + \lambda \cos \psi} D(\psi) = 0. \quad (22)$$

С точки зрения возможной неустойчивости изгибных колебаний более опасным считается состояние отсутствия вращения. Но даже в этом случае нестационарный диск устойчив относительно прецессии. Действительно, при $\Omega = 0$ из (22) находим периодическое решение $D(\psi) = \cos \psi + 1/\lambda$ для

произвольного $\lambda > 0$, а устойчивость при $\lambda = 0$ легко вытекает из самого НАДУ. Проведя численный расчет НАДУ (22) при $\Omega \neq 0$, нам не удалось обнаружить даже какую-либо специфичную область неустойчивости на диаграмме $(2T/|U|)_0 + \Omega$. Вполне вероятно, что при рассмотрении существенно нелинейной прецессии и влияния гало на диск галактики, такая неустойчивость может быть проявлена.

5. *Изгибные колебания анизотропного диска (6)*. Как мы отметили выше, НАДУ для анизотропной модели легче всего вывести при помощи усреднения (15) по Ω с весовой функцией (5). Действительно, подставим в уравнение (15) $\Omega = \Omega'$ и умножим его на функцию (5). Затем проинтегрируем результат по Ω' в интервале от -1 до $+1$ и получим нужное нам НАДУ изгибных колебаний исследуемой анизотропной модели нестационарного диска (6):

$$(1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2 D}{d\psi^2} + \left(\lambda \sin \psi + \frac{im\Omega}{2} \sqrt{1 - \lambda^2} \right) \frac{dD}{d\psi} + 2 \left[\gamma_{mN} - 1 + \frac{2im\Omega\lambda\sqrt{1 - \lambda^2} \sin \psi - (N^2 + N - 2)(1 - \lambda^2)}{8(1 + \lambda \cos \psi)} \right] D(\psi) = 0. \quad (23)$$

Считая в (23) $\lambda = 0$ и $D(\psi) \sim \exp(i\omega\psi)$, легко вывести дисперсионное соотношение для стационарной модели анизотропного диска:

$$(\omega + m\Omega)^2 = \frac{m^2 \Omega^2}{16} + 2[\gamma_{mN} - 1] - \frac{N^2 + N - 2}{4}. \quad (24)$$

Теперь с помощью (23) рассмотрим также отдельно четыре вышеуказанные изгибные моды колебаний.

Асимметричный изгиб, характеризуемый модой $m = 5$; $N = 6$. Для нестационарной анизотропной модели (6) можно записать следующее НАДУ с помощью (23):

$$(1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2 D}{d\psi^2} + \left(\lambda \sin \psi + \frac{5i\Omega}{2} \sqrt{1 - \lambda^2} \right) \frac{dD}{d\psi} + \left[\frac{437}{128} + \frac{5i\Omega\lambda\sqrt{1 - \lambda^2} \sin \psi - 20(1 - \lambda^2)}{2(1 + \lambda \cos \psi)} \right] D(\psi) = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) почти аналогично НАДУ (17) изотропной модели и соответственно критические диаграммы зависимости $(2T/|U|)_0$ от Ω в принципе будут схожими (рис.3а). Здесь надо отметить, что при необходимости точного сопоставления по параметру Ω соответствующих особенностей изотропной и анизотропной моделей целесообразно заменить Ω анизотропного диска на 4Ω . Характер неустойчивости моды данной анизотропной модели точно такой же, как и в изотропной, т.е. при $\Omega = 0$

внутри интервалов на оси $(2T/|U|)_0$: [1.0; 0.184993], [0.185075; 0.059847], [0.059846; 0.015722], [0.015720; 0.003762], [0.003761; 0.000878 мы имеем только неустойчивость аperiodического характера, а когда $\Omega \neq 0$ у нас имеется колебательная неустойчивость. Здесь также можно заметить, что когда область неустойчивости обрывается каналом устойчивости реальная часть собственного значения решаемого характеристического уравнения меняет свой знак на противоположный.

Купольная неустойчивость. При $m=0$, $N=3$ из стационарного уравнения (24) следует $\omega^2 = 0$, что указывает на полную устойчивость равновесного состояния диска независимо от Ω . Но если амплитуда радиальных колебаний отлично от нуля ($\lambda \neq 0$), то более вероятно проявление неустойчивости. Соответствующее уравнение, описывающее поведение купольных колебаний на фоне нелинейно пульсирующего диска с анизотропной диаграммой скоростей, имеет вид

$$(1 + \lambda \cos \psi) \cdot \frac{d^2 D}{d \psi^2} + \lambda \sin \psi \cdot \frac{d D}{d \psi} + \frac{5 \lambda (\cos \psi + \lambda)}{2(1 + \lambda \cos \psi)} \cdot D(\psi) = 0. \quad (26)$$

При помощи интегрирования уравнения (26) мы нашли следующие отдельные области неустойчивости (рис.3б): $0.76265 > (2T/|U|)_0 > 0.18619$, $0.16553 > (2T/|U|)_0 > 0.02807$ и т.д.

Внутри этих интервалов неустойчивость имеет только аperiodический характер и критерий данной купольной неустойчивости диска не зависит от параметра Ω .

U-образная неустойчивость ($m=4$; $N=5$). НАДУ для эволюции данной моды на фоне анизотропной модели (6) записывается так:

$$\begin{aligned} & (1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2 D}{d \psi^2} + \left(\lambda \sin \psi + 2i \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} \right) \frac{d D}{d \psi} + \\ & + \left[\frac{187}{64} + \frac{2i \Omega \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} \sin \psi - 7(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda \cos \psi)} \right] D(\psi) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Из критической зависимости начального вириального отношения от параметра вращения анизотропной модели для данной моды видно, что области неустойчивости более сужены в сторону уменьшения параметра вращения Ω по сравнению с изотропной моделью (рис.3с). Такую же картину мы видели у моды (5;6) на фоне данной анизотропной модели. А характер неустойчивости рассматриваемой моды точно такой же, как и в изотропной модели.

Прецессионное колебание ($m=1$, $N=2$). В данном случае частоты в (24) являются действительными: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = -\Omega/2$. Прецессионное колебание нестационарной анизотропной модели описывается, согласно (23), следующим НАДУ:

$$(1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2 D}{d \psi^2} + \left(\lambda \sin \psi + \frac{i \Omega}{2} \sqrt{1 - \lambda^2} \right) \frac{d D}{d \psi} + \left[1 + \frac{i \Omega \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} \sin \psi - 2(1 - \lambda^2)}{2(1 + \lambda \cos \psi)} \right] D(\psi) = 0. \quad (28)$$

Если вместо Ω подставить 4Ω , тогда (28) полностью совпадает с уравнением (22) для изотропной модели. Поэтому, все выводы анализа данной моды для изотропной модели также справедливы и здесь.

6. *Обсуждение полученных результатов.* Если мы будем сравнивать маргинальные зависимости асимметричного, U-образного и купольного изгибных мод в рамках исследуемой изотропной модели, то во всех случаях можно заметить наличие вытянутых областей неустойчивости в виде "лепестка". А в анизотропной модели такая картина отсутствует только у купольной моды. Здесь можно предположить, что коллективные колебания резонируют с движениями отдельных частиц системы. Например, для купольного колебания численные расчеты на фоне изотропной модели показывают, что эта зона находится примерно в точке $\Omega \cong 0.741619$, $\lambda = 0$.

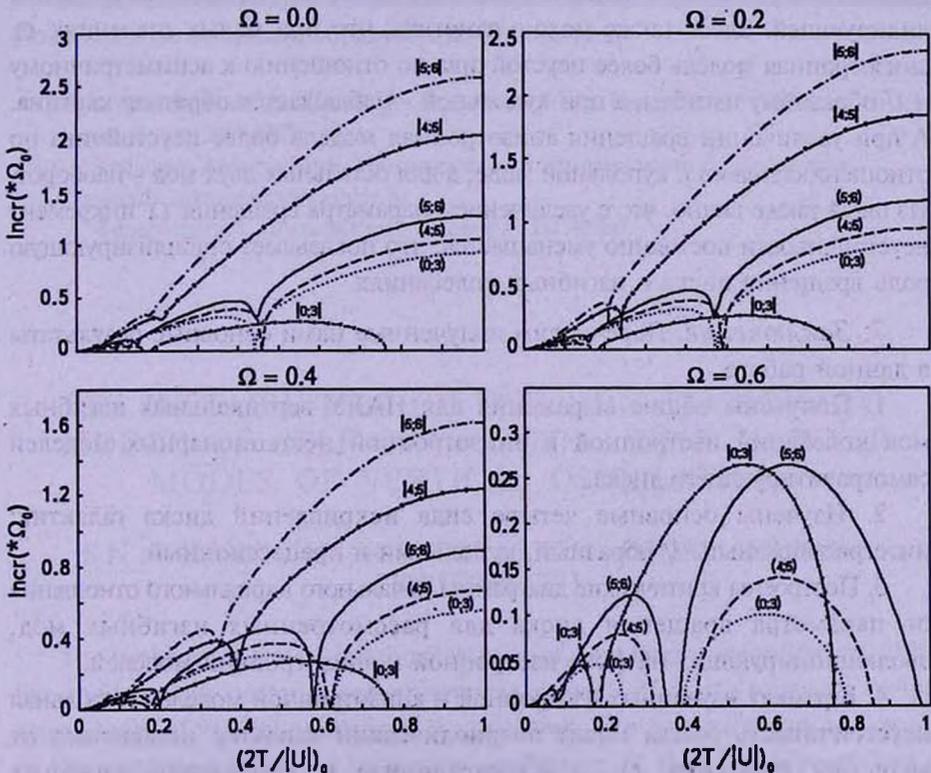


Рис.4. Сравнение инкрементов неустойчивости изгибных мод изотропной и анизотропной моделей при разных значениях параметра вращения Ω . Здесь моды на фоне изотропной модели показаны в круглых скобках, а моды в анизотропной - в вертикальных скобках.

А это означает, что при $\lambda = 0$; $\Omega \cong 0.741619$ исследуемое уравнение (19) должно иметь периодическое решение. И наш аналитический анализ уравнения (19) действительно показал существование такого периодического решения $D = \sin\psi$, если $\Omega = \sqrt{11/20} = 0.74161984\dots$ и $\lambda = 0$. Кроме того, можно сделать вывод о том, что независимо от рассмотренных моделей, купольная неустойчивость имеет аperiodический характер независимо от значения параметра вращения Ω , а асимметричная и U -образная изгибные неустойчивости имеют аperiodический характер только в случае $\Omega = 0$, а когда диск вращается данная неустойчивость является колебательной.

Для сопоставления двух моделей нами также построены графики сравнения величин инкрементов неустойчивости мод (0;3), (4;5) и (5;6) для разных значений параметра вращения Ω (рис.4). Как видно из рис.4, при умеренном вращении, на фоне нестационарных моделей асимметричный изгиб диска галактик имеет наибольший инкремент, затем идет U -образный изгиб и только после него может происходить куполообразный изгиб в его центральной части. С увеличением параметра вращения порядок формирования различных типов изгиба принимает достаточно сложный характер. При дальнейшем увеличении вращения диска купольная неустойчивость становится лидирующей. Здесь также можно заметить, что при малых значениях Ω анизотропная модель более неустойчива по отношению к асимметричному и U -образному изгибам, а при купольной - наблюдается обратная картина. А при увеличении вращения анизотропная модель более неустойчива по отношению только к купольной моде, а для остальных двух мод - наоборот. Из рис.4 также видно, что с увеличением параметра вращения Ω инкремент неустойчивости постоянно уменьшается, что показывает стабилизирующую роль вращения диска в изгибных колебаниях.

7. Заключение. Перечислим полученные нами основные результаты в данной работе.

1. Получены общие выражения для НАДУ вертикальных изгибных мод колебаний изотропной и анизотропной нестационарных моделей самогравитирующего диска.

2. Изучены основные четыре вида искривлений диска галактик интегралобразный, U -образный, купольный и прецессионный.

3. Построены критические диаграммы начального вириального отношения от параметра вращения диска для рассмотренных изгибных мод, эволюционирующих на фоне изотропной и анизотропной моделей.

4. В рамках изученных изотропной и анизотропной моделей купольная неустойчивость всегда носит аperiodический характер независимо от значения вращения Ω , а асимметричная и U -образная изгибные неустойчивости при $\Omega = 0$ имеют аperiodический характер, но для других значений Ω - колебательный.

5. Установлено, что прецессионное колебание всегда устойчиво на фоне нестационарных изотропной и анизотропной моделей.

6. Вычислены инкременты неустойчивости изгибных мод колебаний в зависимости от начального значения вириального отношения и параметра вращения.

7. Найдено, что в ходе эволюции наших нестационарных моделей при малых Ω вначале проявляется асимметричный изгиб диска галактик, затем может формироваться U -образный изгиб, затем идет куполообразный изгиб. С увеличением параметра вращения купольная неустойчивость становится более существенной по сравнению с другими модами.

8. Обнаружено, что при малых значениях Ω анизотропная модель более неустойчива по отношению асимметричному и U -образному типам изгиба, а для купольной - наблюдается обратная картина. А при увеличении вращения анизотропная модель более неустойчива по отношению только к купольной моде, а для остальных двух мод - наоборот.

Авторы выражают благодарность профессору В.А.Антонову за обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена в рамках гранта ФА-Ф2-Ф058 ККРНТ РУз и гранта Комиссии по высшему образованию Пакистана.

¹ Астрономический институт Академии Наук Республики Узбекистан,
e-mail: nur200848@mail.ru

² Кафедра Астрономии Национального университета Узбекистана,
e-mail: mkaromat@rambler.ru

³ Федеральный университет, Карачи, Пакистан

ON INSTABILITIES OF THE NON-STATIONARY MODEL OF SELF-GRAVITATING DISK II. WARP MODES OF VERTICAL OSCILLATIONS

S.N.NURITDINOV^{1,2}, K.T.MIRTADJEVA^{2,1}, IQBAL AHMAD³,
J.K.RUZIBAEV^{1,2}

The problem of gravitational instabilities of nonlinear-nonequilibrium disk-like models with isotropic and anisotropic velocity diagrams relatively to the warp modes of vertical oscillations is considered. The non-stationary analogues of the dispersion equations of vertical oscillations of these models are found in the general case. The major large-scale oscillation modes which consistent, first of all, to the most common type of warp in the form of an integral, and

also dome-shaped, U-shaped and precession types of warps are studied in detail. For each of these modes of vertical oscillations the critical diagrams of dependence of initial virial ratio on rotation parameter of non-stationary models are constructed. A comparative analysis of instability increments of these oscillations modes are made to determine the dependence of the characteristic times of appearance on the basic physical parameters for the two models.

Key words: *models:gravitating disk*

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Н.Нуритдинов, К.Т.Миртаджиева, Мариам Султана, *Астрофизика*, 51, 487, 2008.
2. М.Г.Абрамян, "Динамика вложенных гравитирующих систем", Автореферат на соиск. уч. ст. док. н., Ереван, 1986.
3. J.Binney, M.Merfield, "Galactic Astronomy", Princeton University Press, 1998, pp.850.
4. В.А.Антонов, Учен. записки ЛГУ, 32, 79, 1976.
5. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович, *Астрофизика*, 6, 3, 387, 1970.
6. С.Hunter, А.Тоомре, *Astrophys. J.*, 155, 3, 747, 1969.
7. J.Binney, S.Tremaine, "Galactic dynamics", Princeton University Press, 1987, pp.733.
8. В.Л.Поляченко, И.Г.Шухман, *Астрон. ж.*, 56, 724, 1979.
9. С.Н.Нуритдинов, *Астрономический Циркуляр*, 1553, 9, 1992.
10. И.Г.Малкин, "Теория устойчивости движения", Москва, Наука, 1967.
11. V.Reshetnikov, E.Battaner, F.Combes, J.Jimenez-Vicente, *Astron. Astrophys.*, 382, 513, 2002.
12. D.Lynden-Bell, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 129, 4, 301, 1965.