

ВЛИЯНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ НА ПОЛЯРИЗАЦИЮ РЕЗОНАНСНЫХ ЛИНИЙ

А.В.ДЕМЕНТЬЕВ

Поступила 6 июля 2009

Принята к печати 17 сентября 2009

Рассматривается многократное резонансное рассеяние излучения в спектральной линии при наличии поглощения в непрерывном спектре. Принимается, что рассеивающая атмосфера полубесконечная, магнитное поле, а также излучение в непрерывном спектре на частотах линии в ней отсутствуют. При неполяризованных первичных источниках излучения, равномерно распределенных в атмосфере, и фойгтовском профиле коэффициента поглощения получены поляризационные характеристики выходящего излучения. Расчеты проведены на основе итеративного решения матричного интегрального уравнения Амбардумяна-Чандрасекара.

Ключевые слова: *поляризация:резонансное рассеяние:фойгтовский профиль*

1. *Введение.* Хорошо известно, что в ряде случаев интенсивность излучения, выходящего из рассеивающей среды, может быть определена без расчета поля излучения внутри самой среды. Методы, позволяющие это сделать, были впервые разработаны и применены В.А.Амбардумяном. Например, таким методом является принцип инвариантности, в основе которого лежит рассмотрение характеристик среды как цельного объекта [1].

Подобные методы допускают обобщение и на задачи, связанные с переносом поляризованного излучения. Тем самым имеется возможность находить все параметры Стокса выходящего из среды излучения непосредственно, без прямого интегрирования уравнения переноса, векторного в данном случае. Примером служит теория \hat{I} -матриц, при помощи которой могут быть решены некоторые задачи переноса поляризованного излучения в полубесконечных атмосферах. Эта теория была развита в работе [2] для монохроматического рэлеевского рассеяния, затем применена в [3] для резонансного рассеяния, а также в [4] - для резонансного рассеяния в слабом магнитном поле. В случае резонансного рассеяния данная теория использует предположение полного перераспределения по частотам, а коэффициент поглощения в линии может быть произвольным. Расчет вектора Стокса выходящего излучения в теории \hat{I} -матриц сводится к решению матричного нелинейного интегрального уравнения, обобщающего известное уравнение Амбардумяна-Чандрасекара.

В настоящей работе аппарат \hat{I} -матриц применен для изучения резонансного рассеяния в случае, когда имеется поглощение в континууме. Именно, рассмотрена следующая задача. В полубесконечной плоскопараллельной атмосфере без магнитного поля происходит образование поляризованных спектральных линий за счет многократного резонансного рассеяния. Считается, что на частотах линии в атмосфере происходит поглощение в континууме, а излучения в континууме нет. При этом профиль коэффициента поглощения в линии ϕ , вероятность выживания фотона при рассеянии λ , а также β - отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения, среднему по линии, от координат не зависят. Кроме того, предполагается, что снаружи на атмосферу излучение не падает. Задача состоит в нахождении вектора Стокса выходящего из атмосферы излучения.

Необходимые для решения данной задачи формулы получаются в общей теории \hat{I} -матриц одинаковым образом как при $\beta = 0$, так и при $\beta \neq 0$. Подробный вывод и обстоятельное обсуждение этих формул для резонансного рассеяния без учета поглощения в континууме даны в работах [3] и [5]. Поэтому здесь мы фактически лишь запишем нужные формулы для рассматриваемого нами случая $\beta \neq 0$. Затем мы приведем результаты численных расчетов при фойгтовском коэффициенте поглощения, считая, что источники первичного излучения не поляризованы и распределены в атмосфере равномерно.

Заметим, что ситуация, когда в континууме на частотах линии есть только поглощение, а излучения нет, возникает, например, при рассмотрении диффузии $L\alpha$ -квантов в газовой туманности, в которой имеется пыль. Пыль поглощает излучение на частотах линии $L\alpha$, а переизлучает энергию в ИК-области спектра.

2. Векторное уравнение переноса поляризованного излучения.

В рассматриваемой задаче поле излучения осесимметричное, вследствие чего его можно описать двумя величинами, например, параметрами Стокса I и Q . В силу этого обстоятельства, все встречающиеся ниже векторы имеют размерность 2, а матрицы - 2×2 . Вектор Стокса, описывающий поле излучения в атмосфере, будем обозначать через $i_S = (I, Q)^T$, где T -транспонирование. При этом i_S зависит от обычной усредненной по линии оптической глубины в атмосфере τ , частоты излучения x , отсчитанной от центра линии и измеренной в доплеровских ширинах, и от косинуса угла между направлением распространения излучения и внешней нормалью к границе атмосферы μ . Таким образом, $i_S = i_S(\tau, x, \mu)$.

Поле излучения в атмосфере может быть найдено путем решения следующего векторного уравнения переноса (см. [6] и [3]):

$$\mu \frac{\partial i_S(\tau, x, \mu)}{\partial \tau} = [\phi(x) + \beta] i_S(\tau, x, \mu) - \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-1}^1 d\mu' \hat{R}(x, \mu; x', \mu') i_S(\tau, x', \mu') - \phi(x) s_I(\tau) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$i_S(0, x, \mu) = 0, \quad \mu < 0; \quad i_S(\tau, x, \mu) e^{-\tau/\mu} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0, \quad \mu > 0. \quad (2)$$

В уравнении (1) матрица $\hat{R}(x, \mu; x', \mu')$ описывает перераспределение излучения при рассеянии по частотам, углам и состояниям поляризации. Аргументы со штрихами относятся к падающему излучению, а без штрихов - к рассеянному. Источники первичного излучения в линии задаются векторной функцией $s_I(\tau)$, которая считается известной. Предположение полного перераспределения по частотам дает возможность разделить частотные переменные в матрице $\hat{R}(x, \mu; x', \mu')$, так что

$$\hat{R}(x, \mu; x', \mu') = \phi(x)\phi(x')\hat{P}(\mu, \mu'). \quad (3)$$

В свою очередь, фазовую матрицу резонансного рассеяния $\hat{P}(\mu, \mu')$, которая в нашем случае не зависит от азимута, можно факторизовать таким образом, что оказываются разделенными также и угловые переменные (см., например, [2])

$$\hat{P}(\mu, \mu') = \hat{A}(\mu)\hat{A}^T(\mu'), \quad (4)$$

где

$$\hat{A}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{W}{8}}(1 - 3\mu^2) \\ 0 & \sqrt{\frac{W}{8}}3(1 - \mu^2) \end{pmatrix} \quad (5)$$

и W - параметр деполяризации, определяемый квантовыми числами уровней, при переходах между которыми возникает рассматриваемая линия ($0 \leq W \leq 1$).

Матрица $\hat{A}(\mu)$ имеет верхнетреугольный вид, поэтому для неполяризованных первичных источников, когда $s_I(\tau) = (s_I'(\tau), 0)^T$, можно записать

$$s_I(\tau) = \hat{A}(\mu)s_I(\tau) \quad (6)$$

Далее, представим искомый вектор Стокса в следующем виде:

$$i_S(\tau, x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} \hat{A}(\mu) i(\tau, x, \mu). \quad (7)$$

Подставим (6) и (7) в уравнение (1), умножим обе части равенства слева на $\hat{A}^{-1}(\mu)$ и сократим на $\phi(x)$. В итоге получим, что вектор $i(\tau, x, \mu)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mu}{\phi(x)+\beta} \frac{\partial i(\tau, x, \mu)}{\partial \tau} = i(\tau, x, \mu) - s(\tau) \quad (8)$$

с граничными условиями вида (2). Здесь

$$s(\tau) = s_0(\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\phi^2(x')}{\phi(x')+\beta} \int_{-1}^1 d\mu' \hat{\psi}(\mu') i(\tau, x', \mu'), \quad (9)$$

$$s_0(\tau) = s_I(\tau), \quad (10)$$

а через $\hat{\psi}(\mu)$ обозначена матрица

$$\hat{\psi}(\mu) = \frac{\lambda}{2} \hat{A}^T(\mu) \hat{A}(\mu). \quad (11)$$

Из уравнения (8) следует, что $i(\tau, x, \mu)$ зависит от x и μ не по отдельности, а от их комбинации

$$z = \frac{\mu}{\phi(x)+\beta}, \quad (12)$$

так что вместо (8) имеем уравнение

$$z \frac{\partial i(\tau, z)}{\partial \tau} = i(\tau, z) - s(\tau) \quad (13)$$

с граничными условиями

$$i(0, z) = 0, \quad z < 0; \quad i(\tau, z) e^{-z/\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0, \quad z > 0. \quad (14)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению векторной функции только двух переменных, а не трех, как было ранее. Ясно, что это упрощение есть следствие разделения переменных (3) и (4).

Сделаем замену переменной $z' \equiv \mu' / (\phi(x') + \beta)$ во внутреннем интеграле в (9) и поменяем порядок интегрирования по x' и z' (см. [7], п. 5.1 и [3]). Тогда вместо (9) будем иметь

$$s(\tau) = s_0(\tau) + \int_{-1/\beta}^{1/\beta} dz' \hat{G}(z') i(\tau, z'). \quad (15)$$

Здесь

$$\hat{G}(z) = 2 \int_{x(z)}^{\infty} dx \phi^2(x) \hat{\psi}[z(\phi(x)+\beta)], \quad (16)$$

где функция $x(z)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} x(z) &= 0, & |z| &\leq 1/[\phi(0)+\beta] \\ \phi(x(z)) &= 1/|z| - \beta, & 1/\beta > |z| > 1/[\phi(0)+\beta] \end{aligned} \quad (17)$$

Матрица $\hat{G}(z)$ является четной и симметричной, т.е.

$$\hat{G}(-z) = \hat{G}(z), \quad \hat{G}^T(z) = \hat{G}(z). \quad (18)$$

Пусть теперь первичные источники поляризованы, т.е. $s_I(\tau) = (s_I'(\tau), s_Q'(\tau))^T$, так что $s_Q'(\tau)$ не является тождественным нулем. Тогда в общем случае

(6) не имеет места. Для того, чтобы и при таких источниках в полной мере воспользоваться разделением переменных (3) и (4), представим исходный вектор Стокса в виде следующей суммы:

$$i_s(\tau, x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} \left[i_d(\tau, x, \mu) + \hat{A}(\mu) i_*(\tau, x, \mu) \right], \quad (19)$$

где первое слагаемое соответствует излучению, пришедшему непосредственно от первичных источников, а второе - излучению, испытавшему хотя бы одно рассеяние. При этом после подстановки (19) в уравнение (1) в итоге оказывается, что векторы i_d и i_* удовлетворяют соответственно уравнениям

$$z \frac{\partial i_d(\tau, z)}{\partial \tau} = i_d(\tau, z) - s_I(\tau) \quad (20)$$

и

$$z \frac{\partial i_*(\tau, z)}{\partial \tau} = i_*(\tau, z) - s(\tau) \quad (21)$$

с граничными условиями вида (14). Здесь, в отличие от случая неполяризованных первичных источников,

$$s(\tau) = s_*(\tau) + \int_{-1/\beta}^{1/\beta} dz' \hat{G}(z') i_*(\tau, z') \quad (22)$$

и

$$s_*(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\phi^2(x')}{\phi(x') + \beta} \int_{-1}^1 d\mu' \hat{A}^T(\mu') i_d(\tau, z(x', \mu')). \quad (23)$$

Отметим, что вектор i_d можно считать известным, поскольку решение дифференциального уравнения (20) при заданной функции $s_I(\tau)$ находится элементарно.

3. *Матричное уравнение переноса излучения и обобщенное уравнение Амбарцумяна-Чандрасекара.* Следуя [3], введем матрицу Стокса, которая по определению является решением матричного уравнения переноса

$$z \frac{\partial \hat{I}(\tau, z)}{\partial \tau} = \hat{I}(\tau, z) - \hat{S}(\tau) \quad (24)$$

с граничными условиями

$$\hat{I}(0, z) = \hat{0}, \quad z < 0; \quad \hat{I}(\tau, z) e^{-z/\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \hat{0}, \quad z > 0. \quad (25)$$

Здесь матричная функция источников $\hat{S}(\tau)$ имеет следующий вид:

$$\hat{S}(\tau) = \hat{S}_*(\tau) + \int_{-1/\beta}^{1/\beta} dz' \hat{G}(z') \hat{I}(\tau, z'), \quad (26)$$

при этом

$$\hat{S}_*(\tau) = \text{diag}(s_1^*(\tau), s_2^*(\tau)), \quad (27)$$

где $s_1^*(\tau)$ и $s_0^*(\tau)$ являются компонентами векторной функции $s_*(\tau)$, определяемой первичными источниками в соответствии с (10) или (23). Матрица $\hat{G}(z')$ в (26) та же, что и ранее, т.е. задается формулами (16)-(17).

Введем обозначения

$$e_I = (1, 0)^T, \quad e = (1, 1)^T. \quad (28)$$

Тогда, сравнивая (13) и (24), находим, что

$$i(\tau, z) = \hat{I}(\tau, z)e_I, \quad (29)$$

при этом $s(\tau) = \hat{S}(\tau)e_I$. Сравнение же (21) и (24) дает, что

$$i_*(\tau, z) = \hat{I}(\tau, z)e \quad (30)$$

и $s(\tau) = \hat{S}(\tau)e$.

Рассмотрим матрицу

$$\hat{\varepsilon} = \hat{E} - 2\hat{G}_0, \quad (31)$$

где

$$\hat{G}_0 = \int_0^{1/\beta} dz' \hat{G}(z') = \frac{1}{2} \text{diag}(\tilde{\lambda}, 0.7W\tilde{\lambda}). \quad (32)$$

Здесь

$$\tilde{\lambda} \equiv \lambda[1 - \beta\delta(\beta)], \quad (33)$$

а

$$\delta(\beta) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\phi(x')}{\phi(x') + \beta}. \quad (34)$$

Для того чтобы найти матрицу \hat{G}_0 , мы взяли двойной интеграл по z' и x' (см. определение $\hat{G}(z)$, формулы (16) и (17)). Это легко сделать, если от этих переменных вернуться к μ' и x' , поменяв также порядок интегрирования. Таким образом,

$$\hat{\varepsilon} = \text{diag}(1 - \tilde{\lambda}, 1 - 0.7W\tilde{\lambda}). \quad (35)$$

Далее мы будем рассматривать так называемую стандартную задачу (по терминологии [3]), когда

$$\hat{S}_*(\tau) = \hat{S}_* = \hat{\varepsilon}^{-1/2} = \text{diag}(\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}, \sqrt{1 - 0.7W\tilde{\lambda}}). \quad (36)$$

Матрица Стокса выходящего излучения (т.е. при $\tau = 0$) в стандартной задаче обозначается через $\hat{I}(z)$. Как показано в [3], эта \hat{I} -матрица удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению Амбарцумяна-Чандрасекара, обобщенному на матричный случай. Если учитывается поглощение в континууме, то это уравнение записывается следующим образом:

$$\hat{\mathbf{I}}^{-1}(z) = \hat{\varepsilon}^{1/2} + \int_0^{1/\beta} \frac{z' dz'}{z+z'} \hat{\mathbf{I}}^T(z') \hat{\mathbf{G}}(z'). \quad (37)$$

В случае, когда первичные источники распределены равномерно, не поляризованы и таковы, что

$$\mathbf{s}_l(\tau) = \mathbf{s}_l = \left(\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}, 0 \right)^T, \quad (38)$$

искомый вектор Стокса выходящего из атмосферы излучения непосредственно выражается через $\hat{\mathbf{I}}$ -матрицу при помощи (7) и (29). Можно показать, что вектор Стокса выходящего излучения также выражается через $\hat{\mathbf{I}}$ -матрицу при любых равномерно распределенных первичных источниках как неполяризованного, так и поляризованного излучения. То же самое верно и в случае, когда первичные источники распределены экспоненциально.

4. *Вычисление матрицы $\hat{\mathbf{I}}(z)$: методика.* Опишем основные моменты схемы, по которой производились вычисления. Расчеты проводились для фойгтовского профиля

$$\phi(x) = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{(x-y)^2 + a^2}. \quad (39)$$

Фойгтовский параметр a равен отношению естественной ширины линии к доплеровской. Функция Фойгта (39) вычислялась при помощи алгоритма, предложенного Гаутчи [8]. Этот алгоритм применим при произвольных значениях x и a , является достаточно быстрым и обеспечивает хорошую точность. При этом точность вычисления функции Фойгта, заявленная автором алгоритма - 10 знаков после запятой. Она достигается для большинства интересующих нас значений x и a . В основе алгоритма Гаутчи лежит представление в виде непрерывной (цепной) дроби комплексной функции ошибок, вещественной частью которой является функция Фойгта [9].

Для расчета элементов матрицы $\hat{\mathbf{G}}(z)$ удобно ввести новую переменную

$$t = \frac{z}{1 - \beta z}, \quad z = \frac{t}{1 + \beta t}. \quad (40)$$

При этом равенства (17) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0, & t &\leq 1/\phi(0) \\ \phi(x(t)) &= 1/t, & t &> 1/\phi(0). \end{aligned} \quad (41)$$

Будем записывать $\hat{\mathbf{G}}(z(t))$ как $\hat{\mathbf{G}}(t)$, хотя вид функциональной зависимости от z и от t вообще говоря разный. Замена (40) позволяет составить универсальную программу для вычисления матрицы $\hat{\mathbf{G}}$ как при $\beta \neq 0$, так и при $\beta = 0$. В последнем случае $t = z$. Кроме того, такая замена дает возможность получить асимптотики элементов матрицы $\hat{\mathbf{G}}$ при $z \rightarrow 1/\beta$ (при этом $t \rightarrow \infty$). Асимптотические формулы для элементов матрицы $\hat{\mathbf{G}}$

и их вывод даны в *Приложении*.

Остановимся на использовании этих асимптотик. Значения элементов матрицы $\hat{G}(t)$ в общем случае выражаются через интегралы от функций $\phi^k(x')$ ($k=2, \dots, 6$) с нижним пределом интегрирования $x(t)$. Соответственно и асимптотики элементов матрицы \hat{G} при $t \rightarrow \infty$ выражаются через асимптотики этих интегралов при $x(t) \rightarrow \infty$. Для вычисления интегралов, стоящих в правой части (37), нам требуются значения матрицы \hat{G} при больших t , а в этом случае сами эти значения очень малы. Чтобы не допустить потери точности в процессе машинных вычислений, мы вычисляли нормированные интегралы

$$\int_{x(t)}^{\infty} \phi^k(x') / J_k^{1/k} dx', \quad (42)$$

где J_k - приближенное значение интеграла от $\phi^k(x')$, в качестве которого мы брали главный член асимптотики этого интеграла.

Ясно, что асимптотики применимы только в соответствующей области значений $x \gg x_{ас}$, где $x_{ас}$ определяет границу асимптотической области. Поэтому при $x(t) < 5x_{ас}$ исходный отрезок интегрирования $[x(t), \infty]$ мы разделяли на два $[x(t), 5x_{ас}]$ и $[5x_{ас}, \infty]$. Нормировку (42) мы применяли на отрезке $[5x_{ас}, \infty]$. Кроме того, на этом отрезке в интеграле мы делали замену переменной $u' = 1/x'$. Такая замена, как оказалось, приводит к уменьшению числа узлов и, соответственно, времени счета, требуемых для достижения заданной точности вычислений. Заметим, что при фойгтовском параметре $a = 0.01$ значение $1/\phi(x_{ас}) \equiv t_{ас} \approx 1200$.

Точность вычисления элементов матрицы $\hat{G}(t)$ можно оценивать сравнением значений элементов этой матрицы, полученных численным интегрированием, с приближенными значениями элементов $\hat{G}(t)$, найденными по асимптотическим формулам. Ясно, что больше верных значащих цифр даст та асимптотическая формула, в которой взято больше членов (но таких, которые при заданном $t > t_{ас}$ еще являются убывающими). Например, в случае $a = 0.01$ и $\beta = 0$ использование первых трех членов в асимптотике элемента G_{11} (см. формулу (A15) в *Приложении*) при $z = 10^5$ дает значение этого элемента, отличающееся в восьмом знаке от значения, найденного численным интегрированием. В то же время использование четырех членов в этой формуле дает отличие в десятом знаке, что в данном случае позволяет на два порядка улучшить оценку точности численного интегрирования.

Интегралы, входящие в выражение для $\hat{G}(t)$, определяемое формулой (16) с учетом замены (40), а также формулой (41), вычислялись по составной квадратурной формуле Симпсона с использованием экстраполяции Ричардсона (эта экстраполяция описана, например, в [10]). Таким же путем вычислялись и интегралы, стоящие в правой части (37).

В этих интегралах, стоящих в (37), в подынтегральное выражение входят неизвестные функции - элементы матрицы $\hat{I}^T(z')$. Данное обстоятельство затрудняет выбор узлов квадратурной формулы, необходимых для вычисления интегралов с заданной точностью. Мы выбирали эти узлы следующим образом.

Во-первых, в указанных интегралах производилась замена переменной (40), и весь промежуток интегрирования разделялся на два: $[0; 1/\psi(0)]$ и $[1/\psi(0); \infty]$ - это разделение связано с нарушением гладкости функции $\hat{G}(t)$ в точке $t = 1/\psi(0)$, см. (41).

Во-вторых, использовалась формула (32), дающая значение интегралов \hat{G}_0 . Именно, путем последовательного увеличения числа узлов на отрезке интегрирования в два раза определялось минимальное количество узлов, необходимое для вычисления данных интегралов с требуемой точностью. При этом на отрезке $[1/\psi(0); \infty]$ в интегралах производилась замена переменной $u' \equiv (t')^{-1/2}$. Эта замена позволяет существенно уменьшить число узлов, необходимое для достижения заданной точности. Точность вычислений по квадратурной формуле оценивалась непосредственным сравнением со значениями, даваемыми правой частью (32). Заметим, что величину $\delta(\beta)$, определяемую интегралом (34), можно достаточно просто вычислить с хорошей точностью, см., например, [11]. Мы не будем останавливаться на нашем способе вычисления $\delta(\beta)$, который отличается от способа, используемого в [11].

Далее, по найденным узлам, позволяющим вычислить интегралы \hat{G}_0 с необходимой точностью, вычислялись затем интегралы, стоящие в правой части (37). Имеются серьезные основания предполагать, что точность вычисления этих интегралов будет примерно такой же, как и точность вычисления интегралов \hat{G}_0 . Отметим, что все результаты расчетов, приведенные ниже, получены в случае, когда точность вычисления интегралов \hat{G}_0 была не хуже, чем 10^{-6} .

Значения матрицы \hat{I} в узлах находились из уравнения (37) итерациями типа Гаусса-Зейделя, которые реализовывались следующим образом. Единичной матрицей задавалось начальное приближение матрицы \hat{I} во всех узлах. Узлы упорядочены так, что $z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} < z_n$. Первая итерация начиналась вычислением значения \hat{I} в наименьшем по величине узле.

Следующий шаг итерационного решения - вычисление $\hat{I}(z_2)$. При этом используется найденное значение $\hat{I}(z_1)$, а значения \hat{I} в остальных узлах берутся те же, заданные начальным приближением. Для вычисления $\hat{I}(z_3)$ используются уже и $\hat{I}(z_1)$, и $\hat{I}(z_2)$, и т.д. Первая итерация считается завершенной после вычисления $\hat{I}(z_n)$. Итерации прекращались, когда для всех элементов I_{jk} ($j, k = 1, 2$) двух последовательных итераций N и $N+1$ матрицы \hat{I} и для всех узлов выполнялось условие

$$|I_{jk}^{N+1} - I_{jk}^N| < \delta_0 |I_{jk}^N|, \quad (43)$$

где δ_0 - заданная точность вычислений (использовалось значение $\delta_0 = 10^{-9}$).

Также мы использовали описанные в работах [5] и [12] итерации, построенные иначе. Однако итерации типа Гаусса-Зейделя оказались сходящимися быстрее всего. На это же указано и авторами [12], находившими фактически \hat{I} -матрицу для ралеевского рассеяния (матрица $\hat{G}(\mu)$ в обозначениях этих авторов).

Число итераций, которое необходимо осуществить для выполнения условия (43), растет, когда $\beta \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 1$. Если $\lambda = 1$ и $-6 \leq \log a \leq -1$, то при $\beta = 0.1$ требуется около 15 итераций, а при $\beta = 0$ - около 70 итераций. В случае $\lambda = 1$ и $\log a = 0$ необходимо провести 95 итераций.

Можно указать следующий тест для контроля точности вычислений. Известно, что матрица $\hat{I}(0)$ является матрицей вращения, поэтому ее элементы удовлетворяют следующим соотношениям (см. [5]):

$$I_{11}^2(0) + I_{21}^2(0) = 1, \quad I_{12}^2(0) + I_{22}^2(0) = 1, \quad I_{12}(0) + I_{21}(0) = 0. \quad (44)$$

При той точности, с которой проводились наши вычисления, в правых частях равенств (44) получалось соответственно $1 + 3\delta$, $1 + 5\delta$, 2δ , где $\delta = 10^{-6}$.

Отметим, что описанная выше схема дает возможность вычисления матрицы $\hat{I}(z)$ как при $\beta \neq 0$, так и при $\beta = 0$.

5. *Вычисление матрицы $\hat{I}(z)$: результаты.* Все расчеты мы проводили при $W=1$, что соответствует дипольному рассеянию. Результаты численного решения уравнения (37) использовались для расчета степени поляризации выходящего излучения в случае равномерно распределенных неполяризованных первичных источников вида (38). Степень поляризации выражается через параметры Стокса следующим образом:

$$p(x, \mu) = -\frac{Q(x, \mu)}{I(x, \mu)}. \quad (45)$$

Используя (7) и (29), выпишем параметры Стокса для рассматриваемого случая в явном виде

$$I(x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} \left[I_{11} \left(\frac{\mu}{\phi(x) + \beta} \right) + \sqrt{\frac{1}{8}} (1 - 3\mu^2) I_{21} \left(\frac{\mu}{\phi(x) + \beta} \right) \right], \quad (46)$$

$$Q(x, \mu) = \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} \sqrt{\frac{1}{8}} 3(1 - \mu^2) I_{21} \left(\frac{\mu}{\phi(x) + \beta} \right). \quad (47)$$

Здесь I_{11} и I_{21} - элементы \hat{I} -матрицы. При этом если $\mu = 0$, то

$$p_0 = p(\mu = 0) = -\frac{3 I_{21}(0)}{\sqrt{8} I_{11}(0) + I_{21}(0)}. \quad (48)$$

Значение p_0 дает степень поляризации на краю диска звезды с

рассеивающей атмосферой. На рис.1 для двух значений фойгтовского параметра a представлены поверхности, характеризующие поведение

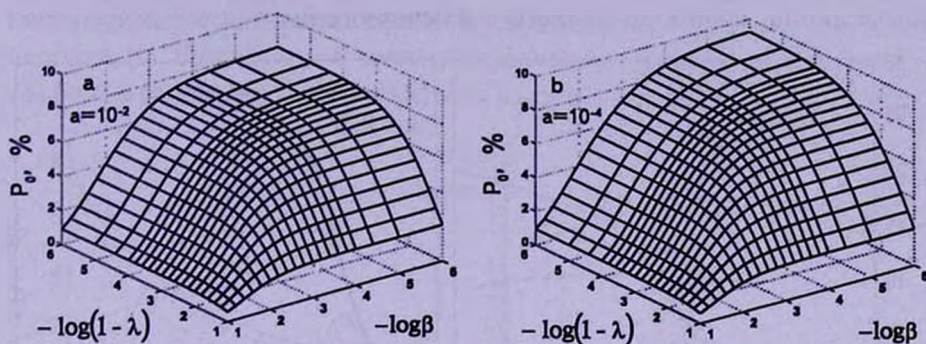


Рис.1. Предельная степень поляризации p_0 на краю диска звезды: а) фойгтовский параметр $a = 10^{-2}$; б) $a = 10^{-4}$.

функции двух параметров $p_0(\lambda, \beta)$. Оказывается, что основное изменение значений $p_0(\lambda, \beta)$ происходит при $\log \beta \geq -3.5$ и при $\log(1-\lambda) \geq -3$.

В случае, когда поглощение в континууме отсутствует ($\beta = 0$), а $1-\lambda \ll 1$, для предельной поляризации нами получена эмпирическая формула вида

$$p_0(\lambda, a) = p_0(0, a) - C_1(a)\sqrt{1-\lambda} - C_2(a)\sqrt{1-\lambda}, \quad (49)$$

где $C_1(a)$ и $C_2(a)$ - коэффициенты, зависящие от параметра a , значения которых представлены в табл.1. При $\log(1-\lambda) \leq -4$ эта формула дает величину $p_0(\lambda, a)$ с ошибкой в четвертом знаке после запятой.

Таблица 1

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

$\log a$	$p_0(0, a), \%$	$C_1(a)$	$C_2(a)$	$T(a)$
-4	9.3195	21.00	850	2.05
-3	9.0399	20.92	261	3.25
-2	8.2201	20.77	38.8	5.74
-1	6.5725	20.50	-18.5	10.10
0	5.5029	20.34	-29.6	17.75

Для случая консервативного рассеяния ($\lambda = 1$) и малого поглощения в континууме ($\beta \ll 1$) эмпирическая формула вида

$$p_0(\beta, a) = p_0(0, a) - T(a)\beta^{1/4} \quad (50)$$

дает величину $p_0(\beta, a)$ с ошибкой в третьем знаке после запятой при $\log \beta \leq -6$. Здесь $T(a)$ - коэффициент, зависящий от параметра a . Его значения также представлены в табл.1.

На рис.2 представлены профили линий в интенсивности при нескольких

значениях β для излучения, выходящего по направлениям с $\mu = 0.11$ и $\mu = 0.51$. Видно, что с ростом β уменьшается величина максимума в крыле линии, вплоть до полного его исчезновения.

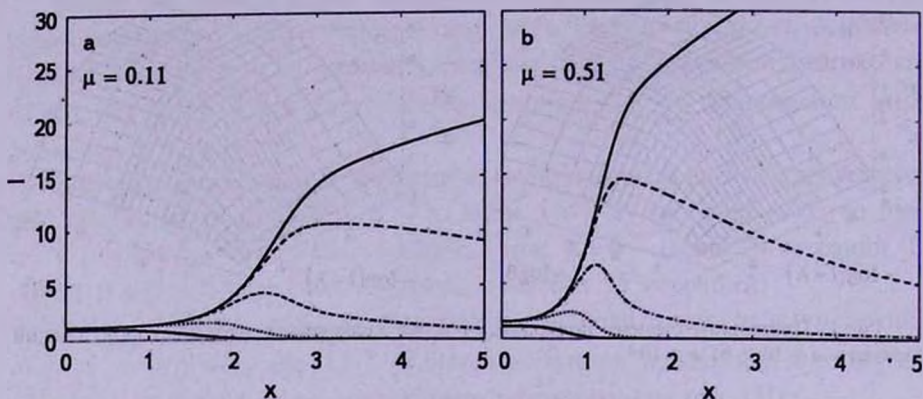


Рис.2. Интенсивность I излучения в резонансной линии, выходящего из атмосферы под разными углами: а) Под углом с $\mu = 0.11$; б) $\mu = 0.51$. Тонкие сплошные линии соответствуют $\beta = 0$, штриховые - $\beta = 10^{-3}$, штрих-пунктирные - $\beta = 10^{-2}$, пунктирные - $\beta = 10^{-1}$, жирные сплошные - $\beta = 10^{-1}$. Все графики построены для случая $a = 10^{-2}$ и $\lambda = 1$.

Рис.3 показывает изменение степени поляризации в пределах линии при тех же значениях β и для тех же двух направлений. Увеличение β приводит к изменению знака поляризации, так что при достаточно больших β возможна ситуация, когда поляризация отрицательна по всей линии, даже в ее центре, т.е. при $x=0$.

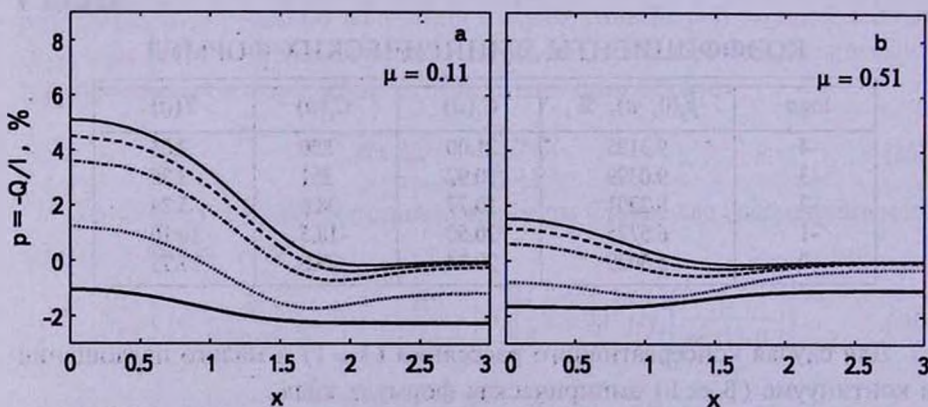


Рис.3. Степень поляризации $p = -Q/I$ излучения в резонансной линии, выходящего из атмосферы под разными углами: а) $\mu = 0.11$; б) $\mu = 0.51$. Линии на графиках имеют тот же смысл, что и на рис.2. Все графики построены для случая $a = 10^{-2}$ и $\lambda = 1$.

Зависимость поляризации от направления выходящего излучения при разных β для частот $x=0$ и $x=2$ представлена на рис.4. С ростом μ при

достаточно больших β также происходит изменение знака поляризации.

Отметим, что в [13-15] поляризация в линиях в задачах со схожей постановкой рассчитывалась путем непосредственного решения уравнения переноса (1). В случае $\beta = 0$ имеется возможность сравнить наши расчеты с той частью результатов, которые получены в указанных работах для фойгтовского

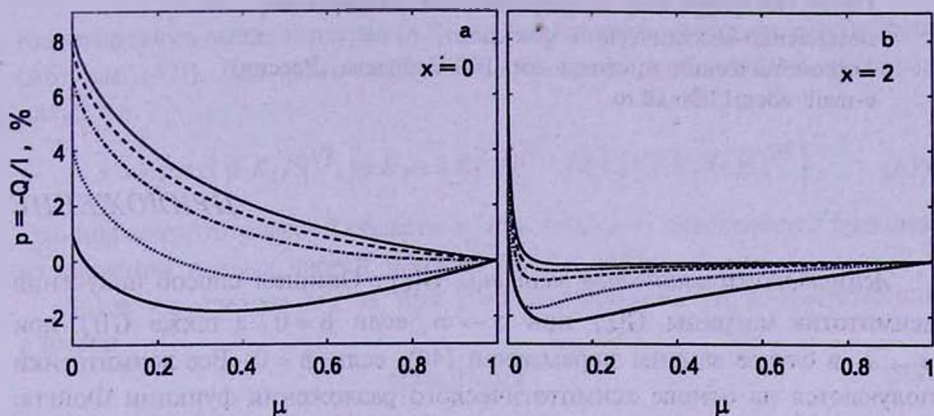


Рис.4. Степень поляризации $p = -Q/I$ излучения в резонансной линии, выходящего из атмосферы на разных частотах: а) $x = 0$; б) $x = 2$. Линии на графиках имеют тот же смысл, что и на рис.2. Все графики построены для случая $a = 10^{-2}$ и $\lambda = 1$.

профиля в предположении полного перераспределения по частотам. Результаты расчетов поляризации в [13-15] представлены в виде графиков. В пределах той точности, с которой построены эти графики, сравнение показывает согласие наших результатов с результатами, которые приводят авторы работ [13-15].

Расчеты в рамках теории \hat{I} -матриц, но по другой методике для фойгтовского профиля при $\beta = 0$ проводились в [16]. С результатами этих расчетов результаты, полученные в настоящей работе, также хорошо согласуются.

6. Заключение. Суммируем основные результаты, полученные в статье.

а) Общая теория \hat{I} -матриц, развитая в работах [3] и [5], применена в случае ненулевого поглощения в непрерывном спектре ($\beta \neq 0$) на частотах линии.

б) Разработан эффективный алгоритм численного решения матричного интегрального уравнения Амбарцумяна-Чандрасекара для случая равномерно распределенных неполяризованных первичных источников излучения и фойгтовского коэффициента поглощения.

в) Получены численные результаты, позволяющие понять характер зависимости интенсивности и поляризации выходящего излучения от β .

г) В случае $\lambda = 1$, $\beta \ll 1$ и в случае $1 - \lambda \ll 1$, $\beta = 0$ для поляризации на краю диска звезды получены эмпирические формулы высокой точности (формулы (49) и (50) соответственно).

Автор благодарен В.В.Иванову за ряд существенных замечаний и полезных предложений при подготовке текста статьи. Работа выполнена при поддержке гранта НШ-1318.2008.2 для ведущих научных школ России и программы АВЦП № 2.1.1/594.

Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет,
Астрономический институт им. В.В.Соболева, Россия,
e-mail: adem13@mail.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ

Асимптотики элементов матрицы $\hat{G}(z)$. Опишем способ получения асимптотик матрицы $\hat{G}(z)$ при $z \rightarrow \infty$, если $\beta = 0$, а также $\hat{G}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ в случае замены переменной (40), если $\beta \neq 0$. Все асимптотики получаются на основе асимптотического разложения функции Фойгта. Рассмотрим сначала случай $\beta = 0$.

Для фойгтовского профиля (39) при больших x известно следующее асимптотическое разложение (см., например, п. 2.7 в [7]):

$$\phi(x) \sim \frac{a}{\pi x^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K_j(a)}{x^{2j}}, \quad (A1)$$

где

$$K_j(a) = (2j+1)! \sum_{i=0}^j (-1)^i \frac{a^{2i}}{(2i+1)!(j-i)!2^{2(j-i)}}. \quad (A2)$$

Заметим, что в [7] в формулу для $K_j(a)$ в знаменатель дроби вкралась опечатка - $(2i+1)!!$ вместо $(2i+1)!$.

Чтобы иметь возможность лучше оценивать точность вычисления матрицы $\hat{G}(z)$, в асимптотическом разложении одного ее элемента, именно $G_{11}(z)$, мы нашли первые четыре слагаемых, для чего требуется использовать четыре слагаемых в разложении (A1)

$$\phi(x) \sim \frac{a}{\pi x^2} \left[1 + \frac{K_1}{x^2} + \frac{K_2}{x^4} + \frac{K_3}{x^6} + O\left(\frac{1}{x^8}\right) \right]. \quad (A3)$$

Аргумент a у K_j здесь и далее опускаем. Для остальных элементов матрицы $\hat{G}(z)$ мы ограничились двумя слагаемыми. Очевидно, что (A3) имеет смысл в том случае, когда

$$x \gg \max\{|K_1|^{1/2}; |K_2|^{1/4}; |K_3|^{1/6}\}. \quad (A4)$$

Из определения матрицы \hat{G} , даваемого выражением (16), имеем

$$G_{11}(z) = \lambda \int_{x(z)}^{\infty} dx' \phi^2(x'). \quad (A5)$$

Подставляя сюда (A3) и интегрируя, получаем

$$G_{11}(x(z)) \sim \frac{\lambda a^2}{3\pi x^3} \left[1 + \frac{6K_1}{5} \frac{1}{x^2} + \frac{6K_2 + 3K_1^2}{7} \frac{1}{x^4} + \frac{2K_3 + 2K_1K_2}{3} \frac{1}{x^6} + O\left(\frac{1}{x^8}\right) \right]. \quad (A6)$$

Как отмечалось выше, интеграл (A5) оценивался первым членом асимптотики (A6) (см. (42)). Для этого остальные слагаемые должны быть заведомо малы, т.е.

$$x \gg \max \left\{ |6K_1/5|^{1/2}; \left| (6K_2 + 3K_1^2)/7 \right|^{1/4}; \left| (2K_3 + 2K_1K_2)/3 \right|^{1/6} \right\}. \quad (A7)$$

Граница асимптотической области x_m (см. раздел 4) определяется большим из значений правых частей условий (A4) и (A7).

Далее, как следует из (17), при $\beta = 0$ для больших x и, соответственно, z имеем

$$\phi(x(z)) = 1/z. \quad (A8)$$

Привлекая (A3), получаем, что

$$\frac{1}{x^2} \sim \frac{\pi}{az} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (A9)$$

Вновь используя (A3) и (A8), находим

$$x^2 \sim \frac{az}{\pi} \left[1 + \frac{K_1}{x^2} + \frac{K_2}{x^4} + \frac{K_3}{x^6} + O\left(\frac{1}{x^8}\right) \right]. \quad (A10)$$

Подставив сюда $1/x^2$ из (A9), получим

$$x^2 \sim \frac{az}{\pi} + K_1 + O\left(\frac{1}{z}\right). \quad (A11)$$

Тогда

$$\frac{1}{x^2} \sim \frac{\pi}{az} - K_1 \left(\frac{\pi}{az}\right)^2 + O\left(\frac{1}{z^3}\right). \quad (A12)$$

Подставив это выражение в (A10), получим следующее слагаемое в разложении x^2 по степеням z . Затем снова уточняем $1/x^2$, подставляем в (A10) и т.д.

Ограничиваясь первыми четырьмя слагаемыми, после подстановки в явном виде коэффициентов $K_{1,2,3}$ находим, что

$$x^2 \sim \frac{az}{\pi} \left[1 + \left(\frac{3}{2} - a^2\right) \frac{\pi}{az} + \left(\frac{3}{2} - 2a^2\right) \left(\frac{\pi}{az}\right)^2 + (3 - 6a^2) \left(\frac{\pi}{az}\right)^3 + O\left(\left(\frac{\pi}{az}\right)^4\right) \right]. \quad (A13)$$

Извлекая отсюда квадратный корень, имеем

$$x \sim \sqrt{\frac{az}{\pi}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{\pi}{az} + \frac{1}{8} \left(\frac{15}{4} - 5a^2 - a^4 \right) \left(\frac{\pi}{az} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \left(\frac{147}{8} - \frac{147}{4} a^2 - \frac{7}{2} a^4 - a^6 \right) \left(\frac{\pi}{az} \right)^3 + O \left(\left(\frac{\pi}{az} \right)^4 \right) \right]. \quad (\text{A14})$$

Подставляя (A14) в (A6), получаем, наконец, искомую асимптотику

$$G_{11}(z) \sim \frac{\lambda}{3} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{z^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{\pi}{az} - \frac{9}{56} \left(\frac{15}{4} - 5a^2 - a^4 \right) \left(\frac{\pi}{az} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{5}{48} \left(\frac{147}{8} - \frac{147}{4} a^2 - \frac{7}{2} a^4 - a^6 \right) \left(\frac{\pi}{az} \right)^3 + O \left(\left(\frac{\pi}{az} \right)^4 \right) \right], \quad z \rightarrow \infty. \quad (\text{A15})$$

Выражение для элемента $G_{12}(z)$ содержит интеграл от $\phi^4(x)$, а для $G_{22}(z)$ - интегралы от $\phi^4(x)$ и от $\phi^6(x)$. Подставив в эти интегралы разложение (A3), получим зависимости $G_{12}(x(z))$ и $G_{22}(x(z))$, имеющие место при $x \rightarrow \infty$. При этом появятся условия, аналогичные (A7), которые совместно с (A4) определяют границы асимптотических областей. Используя затем (A14), получим асимптотики элементов $G_{12}(z)$ и $G_{22}(z)$

$$G_{12}(z) \sim -\frac{\lambda}{21} \sqrt{\frac{W}{2}} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{z^{3/2}} \left[1 - \frac{7}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{\pi}{az} + O \left(\left(\frac{\pi}{az} \right)^2 \right) \right], \quad z \rightarrow \infty, \quad (\text{A16})$$

$$G_{22}(z) \sim \frac{89\lambda}{462} W \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{z^{3/2}} \left[1 - \frac{539}{2314} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{\pi}{az} + O \left(\left(\frac{\pi}{az} \right)^2 \right) \right], \quad z \rightarrow \infty. \quad (\text{A17})$$

Аналогичным образом можно получить асимптотики и в случае замены переменной (40) при $\beta \neq 0$. Поскольку при такой замене $\phi(x) = 1/t$, то для x сохраняется разложение (A14) с заменой z на t .

Так как z входит в выражения для элементов $G_{12}(t)$ и $G_{22}(t)$, то необходимо учесть, что $z \rightarrow 1/\beta$ при $t \rightarrow \infty$. При этом, как следует из (40),

$$z \sim \frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{1}{\beta t} + O \left(\frac{1}{t^2} \right) \right], \quad (\text{A18})$$

что дает дополнительное условие на границу асимптотической области

$$t \gg 1/\beta. \quad (\text{A19})$$

Из выражения (11) для матрицы $\hat{\Psi}$ следует, что $\Psi_{11}(z\phi(x)) = \Psi_{11}(z[\phi(x) + \beta]) = 1$. Поэтому, заменив в (A15) z на t , сразу получим асимптотику для $G_{11}(t)$. Для асимптотик остальных элементов имеем следующие выражения:

$$G_{12}(t) \sim -\frac{\lambda}{3} \sqrt{\frac{W}{2}} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{t^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{\pi}{at} - \frac{6}{5\beta t} + O \left(\left(\frac{\pi}{at} \right)^2 \right) \right], \quad t \rightarrow \infty, \quad (\text{A20})$$

$$G_{22}(t) \sim \frac{\lambda}{6} W \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{t^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{\pi}{at} - \frac{12}{5\beta t} + O\left(\left(\frac{\pi}{at} \right)^2 \right) \right], \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{A21})$$

Заметим, что при $\beta = 0$ эти асимптотики не переходят автоматически в (A16) и (A17) в силу условия (A19).

THE EFFECT OF CONTINUOUS ABSORPTION ON THE POLARIZATION OF RESONANCE LINES

A.V.Dementyev

Multiple resonance scattering of radiation in a spectral line in a nonmagnetic semi-infinite atmosphere with continuous absorption is considered. The continuous emission in the line frequencies is neglected. Polarization characteristics of the emergent radiation are obtained for the atmosphere with uniformly distributed unpolarized primary sources of radiation in the case of a Voigt absorption profile. These results are found by iterative solution of the Ambartsumian-Chandrasekhar matrix integral equation.

Key words: *polarization:resonance scattering:Voigt profile*

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Амбарцумян, Научные труды, т.1, Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1960.
2. V.V.Ivanov, *Astron. Astrophys.*, 303, 609, 1995.
3. V.V.Ivanov, S.I.Grachev, V.M.Loskutov, *Astron. Astrophys.*, 318, 315, 1997.
4. С.И.Грачев, *Астрофизика*, 44, 455, 2001.
5. V.V.Ivanov, S.I.Grachev, V.M.Loskutov, *Astron. Astrophys.*, 321, 968, 1997.
6. M.Faurobert-Scholl, H.Frisch, *Astron. Astrophys.*, 219, 338, 1989.
7. В.В.Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, М., Наука, 1969.
8. W.Gautschi, *ACM*, 12, 635, 1969.
9. W.Gautschi, *SIAM J. Numer. Anal.*, 7, 187, 1970.
10. А.А.Самарский, А.В.Гулин, Численные методы, М., Наука, 1989.
11. D.G.Hummer, *M. N.*, 138, 73, 1968.
12. W.A. de Rooij, P.B.Bosma, J.P.C. van Hooff, *Astron. Astrophys.*, 226, 347, 1989.
13. S.Dumont, A.Omont, J.C.Pecker, D.Rees, *Astron. Astrophys.*, 54, 675, 1977.
14. D.Rees, G.Saliba, *Astron. Astrophys.*, 115, 1, 1982.
15. M.Faurobert, *Astron. Astrophys.*, 194, 268, 1988.
16. А.В.Деметьев, Письма в Астрон. ж., 34, 633, 2008.