АСТРОФИЗИКА

ТОМ 52 АВГУСТ, 2009 ВЫПУСК 3

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ АМБАРЦУМЯНА И НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 6 февраля 2009

Работа посвящена одному из методов, предложенных Амбарцумяном в теории переноса излучения, - принципу инвариантности. Обсуждается вопрос о возможной связи некоторых нелинейных соотношений, хорошо известных в теории, с вариационным принципом, формулируемом при трансляционном преобразовании оптической глубины.

Ключевые слова: *перенос излучения:принцип инвариантности:нелинейные соотношения*

1. *Введение.* В работах автора [1,2] был развит вариационный принцип, связанный с трансляционным преобразованием оптической глубины. Было показано, что принцип инвариантности Амбарцумяна является частным случаем этого принципа. В свете этих сравнительно новых результатов возникает вопрос о том, в какой мере те или иные известные в теории переноса излучения нелинейные соотношения связаны с указанными принципами. Речь идет главным образом о соотношениях, используемых в связи с принципом инвариантности или с методом сложения слоев, т.е. с методами, предложенными Амбарцумяном в 40-е годы прошлого столетия, которые во многом предопределили дальнейшее развитие теории ([3,4], см. также [5,6]). Настоящая работа призвана внести ясность в вопросе о происхождении этих соотношений и в используемой при этом терминологии, которая нередко основана на недоразумениях.

В следующем разделе мы напомним о первоначальной формулировке принципа инвариантности, данной Амбарцумяном, и ее связи с более общим вариационным принципом, развитым автором в [1]. В третьем разделе приводятся соотношения, написанные Амбарцумяном при выводе формул сложения для коэффициентов отражения и пропускания. Дается их обобщение на случай трехмерной атмосферы. В разделе 4 показывается, что известные соотношения Чандрасекара, названные им принципами инвариантности, совпадают с соотношениями Амбарцумяна. Указывается, что как те, так и другие не имеют непосредственного отношения к принципу инвариантности, связанному с трансляционным преобразованием оптической глубины.

2. *Принцип инвариантности.* Как известно, подход Амбарцумяна, основанный на предложенном им принципе инвариантности, отличался от классического тем, что он позволял находить интенсивность излучения, выходящего из атмосферы, непосредственно, без предварительного определения поля излучения на всех глубинах. Процедура, приводящая к желаемому результату, заключалась в таком преобразовании рассматриваемой атмосферы и ее глобальных оптических свойств, в результате которого последние оставались бы без изменения. Так, например, при рассмотрении задачи о диффузном отражении света от однородной полубесконечной атмосферы отправным пунктом являлся тот очевидный факт, что добавление к такой среде слоя малой оптической толщины $\Delta\tau$, обладающего такими же свойствами, что и исходная атмосфера, не должно изменить ее отражательную способность. Это положение Амбарцумян назвал принципом инвариантности. В результате его применения для функции отражения $\rho(\eta,\varsigma)$ (ς и η - косинусы углов падения и отражения, соответственно) было получено

$$(\eta+\varsigma)\rho(\eta,\varsigma)=\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)\varphi(\varsigma), \qquad (1)$$

где λ - вероятность переизлучения кванта при элементарном акте рассеяния, а функция φ, называемая функцией Амбарцумяна, определяется из следующего функционального уравнения.

$$\varphi(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\varphi(\eta)\varphi(\eta')}{\eta+\eta'}d\eta'. \qquad (2)$$

Функция отражения $\rho(\eta,\varsigma)$ несколько отличается от используемой в [3] функции $r(\eta,\varsigma)=(1/2)\rho(\eta,\varsigma)\varsigma$, которая определяет интенсивность излучения, диффузно отраженного от среды в направлении η, если последняя освещается потоком параллельных лучей, равным π, под углом $\arccos\varsigma$.

В работе [2] нами был развит лагранжиановский подход и показано, что принцип инвариантности в том виде, в котором был сформулирован Амбарцумяном, является частным выражением более общего вариационного принципа, связанного с трансляционным преобразованием оптической глубины. Вывод законов сохранения опирается на теорему Нетера [7] и ее обобщении на случай интегродифференциальных уравнений, данном в [8]. В результате для плоскопараллельной однородной атмосферы было получено

$$\int_0^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau,-\varsigma,\mu)d\varsigma=\frac{\lambda}{4}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)d\varsigma\right)^2+\mathrm{const}, \qquad (3)$$

где функция $P(\tau,\varsigma,\mu)$ характеризует вероятность того, что фотон, движущийся на глубине τ в направлении ς, выйдет из среды под углом $\arccos\mu$ (углы отсчитываются от внешней нормали).

Для полубесконечной атмосферы $P(\tau,\pm\varsigma,\mu)\to 0$ при $\tau\to\infty$, так что $\mathrm{const}=0$. Для этого случая в работах [1,2] двумя различными путями, в частности, на основе несложных физических рассуждений, было получено более общее соотношение

$$\int_0^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau,-\varsigma,\mu')d\varsigma=\frac{\lambda}{2}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)d\varsigma\right)\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu')d\varsigma\right). \qquad (4)$$

Если положить в (4) $\tau=0$, то приходим к уравнению Амбарцумяна (1). Чтобы убедиться в этом, достаточно переписать указанные два соотношения в виде

$$\frac{\lambda}{2}(\eta+\varsigma)\rho(\eta,\varsigma)=p(0,\eta)p(0,\varsigma), \qquad (5)$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^1 P(\tau,\varsigma',\mu)P(\tau,-\varsigma',\varsigma)d\varsigma'=p(\tau,\eta)p(\tau,\varsigma), \qquad (6)$$

где

$$p(\tau,\eta)=\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\eta)d\varsigma \qquad (7)$$

представляет собой вероятность выхода из среды кванта, первоначально поглощенного на глубине τ (см. [6]). Таким образом, интеграл (4), может рассматриваться как обобщение уравнения Амбарцумяна (1) на случай всех глубин. Он имеет место всюду, где λ не меняется с глубиной. Соотношения типа (3) и (4) называются соответственно квадратичными и билинейными.

Закон сохранения наиболее общего вида для полубесконечной атмосферы, получаемого применением вариационного принципа, имеет вид

$$\int_0^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau',-\varsigma,\mu')d\varsigma=\frac{\lambda}{2}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)d\varsigma\right)\left(\int_{-1}^1 P(\tau',\varsigma,\mu')d\varsigma\right). \qquad (8)$$

Интегралы (3), (4), (8) по своему содержанию являются аналогом закона сохранения импульса в механике, вытекающего из трансляционного преобразования осей. Все квадратичные и билинейные соотношения, приведенные в [1,9,10], могут быть получены из (8).

С учетом результатов работ [1,2] и изложенных здесь соображений можно заключить, что *под принципом инвариантности следует понимать положение, отражающее свойство задачи переноса излучения оставаться без изменения при трансляционном преобразовании оптической глубины.*

Приведенные выше интегралы позволяют написать для величин, представляющих интерес с точки зрения той или иной рассматриваемой задачи, разного рода соотношения, которые уместно называть *соотношениями инвариантности.* Так, например, целый ряд такого рода соотношений нетрудно вывести для каждой из астрофизических задач переноса, входящих в группу задач, приводимых к так называемой задаче без источников (source-free problem) (см. [2]). Отсылая читателя за особенностями задач этой группы к указанной работе, здесь укажем лишь, что в нее входят задача Милна, задача о диффузном отражении (и пропускании, в случае среды конечной толщины), а также задачи при экспоненциальном и полиномиальном законах распределения источников энергии внутри атмосферы.

Вариационный формализм позволяет не только прояснить физическую суть принципа инвариантности Амбарцумяна, но и получить наряду с многими известными результатами, большое количество новых соотношений, имеющих важное теоретическое и прикладное значение. Некоторые из ранее известных соотношений обладают достаточно очевидным физическим или вероятностным смыслом и были записаны непосредственно на основе простых соображений. Однако, как будет показано ниже, далеко не все из них вытекают из вариационного принципа и потому не могут быть признаны соотношениями инвариантности и, тем более, принципами инвариантности. Важно отметить, и это очевидно, что термин "принцип инвариантности" при данном выше определении может применяться лишь в единственном числе.

3. ***Формулы Амбарцумяна.*** В настоящем разделе мы остановимся вкратце на методе сложения слоев, введенном Амбарцумяном в [4] (см. также [5,6]). Однако здесь нас будет интересовать не сам результат, получивший большое развитие в работах целого ряда авторов, а промежуточные вспомогательные формулы, которые относятся к теме, затрагиваемой в данной работе.

Для удобства читателя мы перепишем здесь эти формулы вместе с поясняющим рисунком.

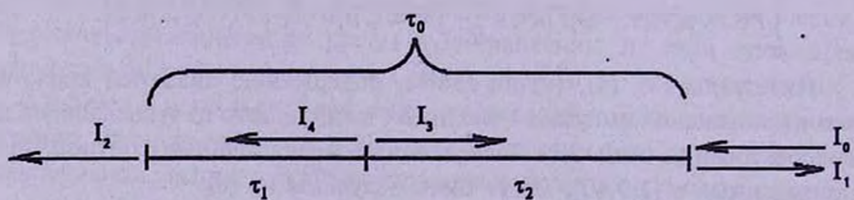

Рис.1. К методу сложения слоев.

Как видно из рис.1, среда оптической толщины τ_0 разбита на две части с толщинами τ_1 и τ_2. Каждая из сред характеризуется коэффициентами отражения ρ и пропускания q. На основе несложных физико-вероятностных рассуждений можно написать

$$I_1 = \rho(\tau_2)I_0 + q(\tau_2)I_3 , \tag{9}$$

$$I_2 = q(\tau_1)I_4 , \tag{10}$$

$$I_3 = \rho(\tau_1)I_4 , \tag{11}$$

$$I_4 = q(\tau_2)I_0 + \rho(\tau_2)I_3 . \tag{12}$$

С учетом того, что $I_1 = \rho(\tau_1 + \tau_2) I_0$ и $I_2 = q(\tau_1 + \tau_2) I_0$, Амбарцумяном были получены формулы сложения для коэффициентов отражения и пропускания рассеивающих и поглощающих сред, на которых, однако, мы здесь не останавливаемся. Следует особо подчеркнуть, что формулы (9)-(12) пишутся без каких-либо ссылок на принцип инвариантности, с которым, естественно, они не связаны. В самом деле, указанные формулы остаются в силе и в более общих случаях, когда говорить об инвариантных свойствах задачи не приходится. Например, формулы (9)-(12) остаются в силе и тогда, когда среды являются неоднородными, правда, с учетом их полярности [11].

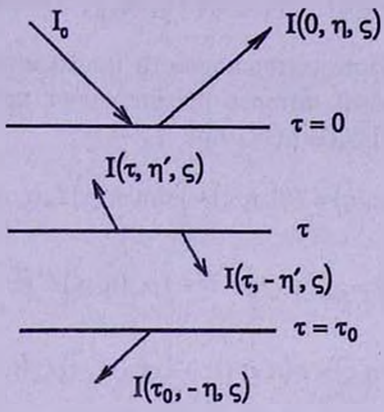

Рис.2. Диффузное отражение света от среды конечной толщины.

Рассмотрим теперь, каким образом переписываются соотношения (9)-(12) в трехмерном аналоге задачи. Преобразуем рассмотренную выше задачу следующим образом. Пусть на границу среды $\tau = 0$ под углом $\arccos\varsigma$ к ее внутренней нормали падает параллельный поток излучения интенсивности I_0 (рис.2). Интенсивность отраженного излучения связана с функцией отражения $\rho(\eta, \varsigma, \tau_0)$ следующим образом $I(0, \eta, \varsigma) = I_0\, \rho(\eta, \varsigma, \tau_0)\varsigma$. Аналогичным образом введем в рассмотрение коэффициент пропускания $\overline{\sigma}$: $I(\tau_0, \eta, \varsigma) = I_0\, \overline{\sigma}(\eta, \varsigma, \tau_0)\varsigma$, где

$$\overline{\sigma}(\eta, \varsigma, \tau_0)\varsigma = \sigma(\eta, \varsigma, \tau_0)\varsigma + e^{-\tau_0/\varsigma}\,\delta(\eta - \varsigma), \qquad (13)$$

причем для диффузной части пропущенного излучения мы сохранили обычное обозначение σ. Для краткости записи зависимость интенсивностей от оптической толщины среди аргументов не будет отмечаться.

Поскольку среда теперь может рассматриваться как состоящая из двух частей с толщинами соответственно τ и $\tau_0 - \tau$, то соотношения, аналогичные (9)-(12), могут быть записаны в виде (без ограничения общности рассуждений I_0 можно принять равной единице)

$$\rho(\eta,\varsigma,\tau_0)\varsigma=\rho(\eta,\varsigma,\tau)\varsigma+I(\tau,\eta,\varsigma)e^{-\tau/\eta}+\int_0^1\sigma(\eta,\eta',\tau)I(\tau,\eta',\varsigma)\eta'd\eta', \quad (14)$$

$$\sigma(\eta,\varsigma,\tau_0)\varsigma=\sigma(\eta,\varsigma,\tau_0-\tau)\varsigma e^{-\tau/\eta}+I^*(\tau,-\eta,\varsigma)e^{-(\tau_0-\tau)/\eta}+$$
$$+\int_0^1\sigma(\eta,\eta',\tau_0-\tau)I^*(\tau,-\eta',\varsigma)\eta'd\eta', \quad (15)$$

$$I(\tau,\eta,\varsigma)=\rho(\eta,\varsigma,\tau_0-\tau)\varsigma e^{-\tau/\varsigma}+\int_0^1\rho(\eta,\eta',\tau_0-\tau)I^*(\tau,-\eta',\varsigma)\eta'd\eta', \quad (16)$$

$$I^*(\tau,-\eta,\varsigma)=\sigma(\eta,\varsigma,\tau)\varsigma+\int_0^1\rho(\eta,\eta',\tau)I(\tau,\eta',\varsigma)\eta'd\eta', \quad (17)$$

где диффузная часть интенсивности нисходящего излучения снабжена звездочкой. Особый интерес представляют предельные соотношения, получаемые из (14),(16),(17) при $\tau_0\to\infty$:

$$I_\infty(0,\eta,\varsigma)=I(0,\eta,\varsigma)+\int_0^1\overline{\sigma}(\eta,\eta',\tau)I_\infty(\tau,\eta',\varsigma)\eta'd\eta', \quad (18)$$

$$I(\tau,\eta,\varsigma)=\rho_\infty(\eta,\varsigma)\varsigma e^{-\tau/\varsigma}+\int_0^1\rho_\infty(\eta,\eta')I^*(\tau,-\eta',\varsigma)\eta'd\eta', \quad (19)$$

$$I_\infty^*(\tau,-\eta,\varsigma)=\sigma(\eta,\varsigma,\tau)\varsigma+\int_0^1\rho(\eta,\eta',\tau)I_\infty(\tau,\eta,\eta')\eta'd\eta'. \quad (20)$$

Данные соотношения устанавливают связь между характеристиками полей излучения в полубесконечной и конечной средах.

Мы видим, что все приведенные нами соотношения (14)-(20) обладают достаточно простым физическим смыслом и пишутся сразу без привлечения принципа инвариантности.

4. *Соотношения Чандрасекара.* В теории переноса излучения хорошо известны нелинейные соотношения, написанные Чандрасекаром в 50-е годы прошлого столетия и названные им принципами инвариантности [12]. Как и в предыдущем разделе, здесь также мы рассматриваем указанные соотношения с точки зрения их возможной связи с принципом инвариантности.

Рассмотренная Чандрасекаром задача о диффузном отражении и пропускании излучения средой конечной оптической толщины ставилась следующим образом. На среду оптической толщины τ_0 (в оригинале τ_1) в направлении $(-\mu_0,\varphi_0)$ падает параллельный пучок излучения с потоком πF на единицу площади, перпендикулярной к направлению луча. Функции отражения S и пропускания T вводятся таким образом, что

$$I(0,\mu,\varphi)=\frac{F}{4\mu}S(\tau_0,\mu,\varphi;\mu_0,\varphi_0), \quad (21)$$

$$I^*(\tau_0, -\mu, \varphi) = \frac{F}{4\mu} T(\tau_0, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0). \tag{22}$$

Чандрасекаром были написаны четыре нелинейные соотношения, которые имеют вид

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu, \varphi) &= \frac{F}{4\mu} e^{-\tau/\mu_0} S(\tau_0 - \tau, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 S(\tau_0 - \tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') I^*(\tau, -\mu', \varphi') d\mu', \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} I^*(\tau, -\mu, \varphi) &= \frac{F}{4\mu} T(\tau, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 S(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau, \mu', \varphi') d\mu', \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{4\mu} S(\tau_0, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) &= \frac{F}{4\mu} S(\tau, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) + e^{-\tau/\mu} I(\tau, \mu, \varphi) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 T(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau, \mu', \varphi') d\mu', \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{4\mu} T(\tau_0, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) &= \frac{F}{4\mu} e^{-\tau/\mu_0} T(\tau_0 - \tau, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) + e^{-(\tau_0 - \tau)/\mu} I(\tau, -\mu, \varphi) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 T(\tau_0 - \tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') I^*(\tau, -\mu', \varphi') d\mu'. \end{aligned} \tag{26}$$

Для предельного случая полубесконечной атмосферы приводилось также соотношение, получаемое из (23) при $\tau_0 \to \infty$

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \frac{F}{4\mu} e^{-\tau/\mu_0} S(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 S(\mu, \varphi; \mu', \varphi') I^*(\tau, -\mu', \varphi') d\mu'. \tag{27}$$

Теперь зададимся целью сравнить соотношения (23)-(26) с приведенными в предыдущем разделе соотношениями (14)-(17). Для этого пренебрежем в (23)-(26) азимутальной зависимостью, положим $F=1$, перейдем к принятым ранее обозначениям и учтем легко проверяемые связи между соответствующими коэффициентами отражения и пропускания

$$(1/2) S(\tau_0, \eta, \varsigma) = \eta\varsigma\rho(\eta, \varsigma, \tau_0), \tag{28}$$

$$(1/2) T(\tau_0, \eta, \varsigma) = \eta\varsigma\sigma(\eta, \varsigma, \tau_0). \tag{29}$$

Тогда нетрудно заключить, что соотношения (23)-(26) совпадают соответственно с приведенными в предыдущем разделе соотношениями (16), (17), (14), (15). Поэтому как те, так и другие непосредственного отношения к принципу инвариантности, связанному с трансляционным преобразованием оптической глубины, не имеют и потому не могут быть получены из соответствующего закона сохранения. Что касается формулы (27), то она, в свою очередь, совпадает с (19). Как уже указывалось, наряду с (19) связь между полями излучения в полубесконечной и конечной средах дается также формулами (18) и (20). Такого типа соотношения можно написать и для ряда других величин, описывающих поле излучения в полубесконечной и конечной средах. Например, на основе соотношений (14) и (17) можно написать

$$\eta\rho_\infty(\eta,\eta') = \eta\rho(\eta,\eta',\tau) + \int_0^1 \overline{\sigma}(\eta',\varsigma,\tau) P_\infty(\tau,-\varsigma,\eta)\varsigma d\varsigma, \tag{30}$$

$$P_\infty(\tau,\eta',\eta) = \eta\overline{\sigma}(\eta,\eta',\tau) + \int_0^1 \rho(\eta',\varsigma,\tau) P_\infty(\tau,-\varsigma,\eta)\varsigma d\varsigma, \tag{31}$$

где, во избежание недоразумений, величины, относящиеся к полубесконечной атмосфере, снабжены знаком бесконечности. Эти соотношения в операторной форме даются также в [13]. Подобные формулы, вытекающие из принципа инвариантности, намного сложнее и не могут быть сведены к приведенным выше соотношениям. Для иллюстрации покажем две из них, полученные нами в [2]

$$\eta'\rho_\infty(\eta',\eta) = -\eta\rho(\eta,\eta',\tau) + \eta\int_0^1 \overline{\sigma}(\eta,\varsigma,\tau) P_\infty(\tau,-\varsigma,\eta')d\varsigma - \\ -\frac{\lambda}{2}\psi(\eta,\tau)\int_0^1 P_\infty(\tau,\varsigma,\eta')d\varsigma - \frac{\lambda}{2}\varphi_\infty(\eta')\varphi(\eta,\tau), \tag{32}$$

$$P_\infty(\tau,\eta,\eta') = \eta\overline{\sigma}(\eta,\eta',\tau) - \eta\int_0^1 \rho(\eta,\varsigma,\tau) P_\infty(\tau,-\varsigma,\eta')d\varsigma - \\ -\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta,\tau)\int_0^1 P_\infty(\tau,\varsigma,\eta')d\varsigma - \frac{\lambda}{2}\varphi_\infty(\eta')\psi(\eta,\tau), \tag{33}$$

где мы использовали общепринятые обозначения $\varphi(\eta,\tau)$ и $\psi(\eta,\tau)$ для функций Амбарцумяна для среды оптической толщины τ. Мы видим, что одни и те же величины связаны между собой соотношениями существенно разной природы. Как эти, так и приведенные в работе другие примеры, позволяют заключить, что разобранные нами нелинейные соотношения можно подразделить на два класса. К первому из них следует отнести те формулы, которые характеризуют лишь сам процесс переноса излучения в плоскопараллельной атмосфере и обладают большой общностью. К ним относятся соотношения (9)-(12), (14)-(20), (23)-(27), (30), (31). К второму более узкому классу относятся соотношения, которые являются следствием инвариантных свойств конкретно рассматриваемой задачи переноса. Много такого рода соотношений для группы задач, сводимых к задаче для среды, свободной от источников, было получено в работах [1,2,9,10]. В данной работе к ним относятся формулы (1)-(6), (8), (32), (33).

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

AMBARTSUMIAN'S PRINCIPLE OF INVARIANCE AND SOME NON-LINEAR RELATIONS OF THE RADIATIVE TRANSFER THEORY

A.G.NIKOGHOSSIAN

The paper concerns to the one of Ambartsumian's methods in the radiative transfer theory - the principle of invariance. We discuss the problem of the possible connection of some non-linear relations well-known in the theory with variational principle formulated for translational transformation of the optical depth.

Key words: *radiative transfer:principle of invariance:non-linear relations*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.G.Nikoghossian*, Astrophys. J., **483**, 849, 1997.
2. *A.G.Nikoghossian*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **61**, 345, 1999.
3. *В.А.Амбарцумян*, ДАН СССР, **38**, 257, 1943.
4. *В.А.Амбарцумян*, Изв. АН АрмССР, №1-2, 1944.
5. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
6. *В.В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
7. *I.M.Gelfand, S.V. Fomin*, Calculus of Variations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.
8. *M.Tavel*, Transport Theory Statist. Ohys., **1**, 271, 1971.
9. *G.B.Rybicki*, Astrophys. J., **213**, 165, 1977.
10. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **23**, 612, 1978.
11. *A.G.Nikoghossian*, Astron. Astrophys, **422**, 1059, 2004.
12. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, изд. М., ИЛ, 1953.
13. *Н.Б.Енгибарян, М.А.Мнацаканян*, ДАН СССР, **217**, 533, 1974.