АСТРОФИЗИКА

ТОМ 52 АВГУСТ, 2009 ВЫПУСК 3

ЭВОЛЮЦИЯ ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЛАКОВ ЧАСТИЦ ОКОЛО СОЛНЦА И ЗВЕЗД

В.А.АНТОНОВ, А.С.БАРАНОВ

Поступила 20 марта 2009
Принята к печати 29 апреля 2009

Исследована эволюция траекторий малых тел, не совсем выброшенных из Солнечной системы и испытывающих существенные возмущения со стороны регулярного поля Галактики. Такими телами могут быть отдельные пылинки, кометы или, в случае с другими звездами, крупные пылевые облака и звезды-спутники. Показана возможность осреднения движения по периоду галактического вращения. Осредненные уравнения решаются в эллиптических функциях. Эксцентриситет орбиты также эволюционирует, но периодически возвращается к первоначальному значению ~1, соответствующему выбросу, если пренебречь воздействием отдельных звезд. Наклон линии апсид к галактической плоскости испытывает два вида эволюции: либо он проходит время от времени через 90°, либо через 0°.

Ключевые слова: *Галактика:параметры Оорта-Кузмина:двойные звезды:кометы:пылевые облака*

1. *Введение.* При изучении двойных звезд, а в наше время и экзопланет, как правило, ограничиваются объектами, сравнительно близкими к основной звезде, движение которых практически кеплерово (кроме кратных систем типа Трапеции). Таким образом, пренебрегается гравитационным полем Галактики в целом, которое для более удаленных объектов существенно искажает орбиту спутника звезды. При этом подразумевается спутник произвольной природы: звездный компаньон, планета, комета или отдельная метеорная частица. Даже в случае звездной природы спутника возникают, конечно, трудности обнаружения таких удаленных объектов, поскольку при проектировании на небесную сферу они должны теряться среди множества оптических компонентов. С развитием наблюдательных средств, надо полагать, появится также возможность изучать некоторые остаточные холодные пылевые облака, сходные с известными вокруг RW Tau и η Car [1,2]. Теоретическим вопросам динамики холодных облаков в солнечной окрестности посвящены, например, работы [3,4].

2. *Регулярные силы Галактики.* Хотя приводимые далее формулы применимы к мало массивным отдаленным звездоподобным спутникам, главным образом мы имеем в виду облака пылевых частиц или небольших сгустков, не взаимодействующих между собой. То есть каждая пылевая частица движется по своей траектории, но для описания таких облаков

надлежит применять статистические методы. Типичным примером является кометное облако Оорта вокруг Солнца, но для других звезд можно, согласно наблюдениям, ожидать большей концентрации пылевого вещества в их окрестности [1]. Принадлежность пылевой частицы (или другого спутника) именно данной звезде реализуется в гораздо более широких границах, чем это обычно принимают. Например, длительное удержание частицы Солнцем длительное время возможно далеко за орбитой Нептуна, и случайные прохождения чужих звезд близко от Солнца, как правило, не нарушают эту принадлежность из-за сравнительно больших скоростей звезды и Солнца. Здесь сказывается общий для электростатических и гравитационных сил закон: чем больше относительная скорость, тем слабее взаимодействие [5,6]. Однако с течением времени должен накапливаться интегральный эффект, т.е. возмущающее действие "размазанного" поля Галактики как целого.

Мы исключаем некоторые специфические случаи, как, в частности, физику центрального района Галактики или окрестности звезд короны, для которых локальное гравитационное поле Галактики сильно меняется за время обращения звезды. Таким образом, рассматриваются, кроме Солнца, другие звезды диска нашей Галактики или находящиеся в аналогичном положении звезды внешних галактик.

Учет регулярного поля Галактики достаточно проводить в локальном, приливном приближении: структура более удаленных областей сама по себе оказывает малое влияние, вряд ли вообще доступное учету при современной точности наблюдений. Введем локальный гравитационный потенциал Галактики $\varphi(R, z)$ при обычных обозначениях цилиндрических координат R и z. Для Солнца принимаем значения координат $R=R_0$ и $z=0$, где R_0 - расстояние до центра Галактики. Численное значение R_0 нам не понадобится. Фактически Солнце находится не совсем в галактической плоскости, но этой поправкой мы пренебрегаем, поскольку на приливных силах она практически не сказывается. Традиционно производные от φ связываются с параметрами Оорта A и B и Кузмина C (в предположении, что Галактика имеет симметрию диска) посредством формул ([7], формулы (14.4.9) и (14.5.1)):

$$\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) = -2R\Omega\frac{\partial}{\partial R}(R\Omega) = 2R\left(\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2\right), \tag{1}$$

кроме того (см. [7], с. 333):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\mathrm{C}^2 \tag{2}$$

(Ω - угловая скорость Солнца, для величин в правых частях (1) и (2) подразумеваются местные значения параметров).

Далее удобнее оперировать в местной декартовой системе координат. Направим ось x вдоль радиуса Галактики, ось y в направлении ее вращения и ось z перпендикулярно к галактической плоскости.

По отношению к системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω, уравнениями движения частицы являются:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{GMx}{r^3} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2\Omega\frac{dy}{dt} + \Omega^2(R_0 + x), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{GMy}{r^3} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2\Omega\frac{dx}{dt} + \Omega^2 y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{GMz}{r^3} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{aligned} \tag{3}$$

где, кроме массы M основной звезды (в частности, Солнца), гравитационной постоянной G и времени t, введено расстояние частицы от основной звезды $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(Для спутника - звезды M надо понимать как приведенную массу, началом координат является центр тяготения пары.)

Разложим потенциал Галактики φ в ряд с точностью до квадратов координат x, y, z. Тогда, с учетом цилиндрической симметрии Галактики в целом

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial R}(R - R_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}(R - R_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}z^2 + \ldots \tag{4}$$

($\varphi_0 = \mathrm{const}$).

Разложим аналогичным образом само значение расстояния от оси Галактики:

$$R = \sqrt{(R_0 + x)^2 + y^2} \approx R_0 + x + \frac{y^2}{2R_0}. \tag{5}$$

Следовательно, (4) преобразуется как

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial R}\left(x + \frac{y^2}{2R_0}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}z^2 + \ldots$$

и система (3) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{GMx}{r^3} + \left(\Omega^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}\right)x + 2\Omega\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{GMy}{r^3} - 2\Omega\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{GMz}{r^3} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}z, \end{aligned} \tag{6}$$

или, после использования формул (1) и (2),

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{GMx}{r^3}+4A(A-B)x+2\Omega\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{GMy}{r^3}-2\Omega\frac{dx}{dt}, \tag{7}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{GMz}{r^3}-C^2z.$$

Система (6)-(7) встречается в литературе, но, например, в [8] неправомерно отбрасывается сферически симметричная часть локального галактического потенциала, хотя на самом деле она должна вызывать прецессию орбит частиц. В других работах, наоборот, Галактика считается плоским, эффективно одномерным слоем, что тоже является недостаточным приближением [9,10].

Уравнения (7), по-видимому, не допускают точного решения, кроме очень частных и предельных случаев. Для близких спутников можно оставлять только тяготение основной звезды, и тогда получается просто кеплерово движение. Для удаленных спутников, наоборот, пренебрегаем тяготением звезды и остается опять-таки хорошо известная комбинация вертикальных колебаний и эпициклического движения в галактической плоскости с частотой, исключая тривиальную нулевую,

$$\omega=2\sqrt{\Omega^2-A(A-B)}=2\sqrt{B(B-A)}. \tag{8}$$

Система (7) трактует движения частицы как происходящие, с учетом гироскопических сил, в суммарном потенциале

$$\Phi=\frac{GM}{r}+2A(A-B)x^2-\frac{C^2}{2}z^2, \tag{9}$$

представляющем сумму потенциалов тяготения основной звезды и приливных сил Галактики (включая центробежные силы).

Представим себе уровенные поверхности функции $\Phi(x,y,z)$ сначала в плоскости Oxz. Поскольку в нашей Галактике $A(A-B)>0$, на большом расстоянии уровенные линии будут практически гиперболы. На малых расстояниях, очевидно, получаются окружности. Особые точки должны удовлетворять условиям

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,$$

или

$$-\frac{GMx}{r^3}+4A(A-B)x=0,\quad -\frac{GMz}{r^3}-C^2z=0,$$

т.е. $z=0$ и

$$-\frac{GM}{x^2}+4A(A-B)=0,\quad x=x^*=\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{GM}{A(A-B)}}. \tag{10}$$

Получается определенная топологическая картина (модель Роша), встречающаяся, например, в [11]. В направлении оси y поверхность выклинивается без дополнительных особых точек.

Характерно, что по порядку величины

$$x^* \sim (GM)^{1/3}\Omega^{-2/3}\,. \tag{11}$$

С другой стороны, если ρ - средняя плотность вещества в Галактике и l - среднее расстояние между звездами, то

$$\Omega \sim \sqrt{G\rho} \sim \left(\frac{GM}{l^3}\right)^{1/2},$$

и из (11) следует:

$$x^* \sim (GM)^{1/3}\left(\frac{GM}{l^3}\right)^{-1/3} = l\,.$$

Мы получили важный вывод: суммарный объем внутри поверхности Роша отдельных звезд - того же порядка, что и объем галактики. Более того, поверхности Роша у соседних звезд должны перекрываться между собой. Как мы уже упоминали, это не должно приводить ни к какой путанице.

Известно, что при помещении частицы неподвижно относительно звезды на какую-то замкнутую уровенную поверхность S, все дальнейшее движение частицы будет происходить внутри S и что поверхность Роша является в этом смысле критической: при переходе через нее более наружные поверхности становятся разомкнутыми и частица может уходить на бесконечность (хотя это не обязательно и происходит только с некоторой вероятностью). Заметим еще, что в "аномальных" галактиках, где $A<0$, критических поверхностей Роша нет, по крайней мере при локальном рассмотрении: частица может, в принципе, уходить на расстояния значительно больше средних межзвездных, оставаясь принадлежащей определенной звезде.

В число точных решений входят также описывающие падение частицы на звезду строго перпендикулярно галактической плоскости. Тогда $x=y=0$ и из системы (7) остается (при $z>0$)

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{GM}{z^2} - C^2 z\,. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) выражается, кроме упомянутого ниже особого случая, через эллиптические интегралы:

$$t = \pm\int \frac{dz}{\sqrt{2\left(\dfrac{GM}{z} - \dfrac{C^2 z^2}{2} + H\right)}}, \quad (H = \mathrm{const}). \tag{13}$$

При всяком вещественном H получается возвратное движение (подъем + падение). Особым случаем является только тот, при котором подкоренное выражение имеет кратный корень, причем при нефизическом $z=-s<0$, ($s=\mathrm{const}$).

Тогда по общему правилу

$$-\frac{GM}{s}-\frac{C^2 s^2}{2}+H=0, \quad -\frac{GM}{s^2}+C^2 s=0,$$

$$s=\left(\frac{GM}{C^2}\right)^{1/3}, \quad H=\frac{3}{2}(GM\,C)^{2/3}$$

и из (13) следует

$$t=\pm\frac{1}{C}\int\frac{\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{(z+s)^2(2s-z)}},$$

а далее, с подстановкой

$$u=\sqrt{\frac{z}{2s-z}}, \quad z=\frac{2su^2}{1+u^2} \quad (u>0)$$

имеем:

$$t=\pm\frac{2}{C}\left[\arcsin\sqrt{\frac{z}{2s}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3z}{2(z+s)}}\right].$$

Постоянная интегрирования обращается в нуль, если начальный момент совмещен с вылетом частицы из звезды или падением на звезду. Максимальная высота подъема $z=2s$ достигается за время

$$t=\frac{\pi}{C}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

3. ***Возмущения почти кеплеровых орбит.*** В данном пункте ограничимся орбитами, размер которых много меньше размеров сферы действия звезды; тогда эффект галактического поля будет малой поправкой, по крайней мере за один оборот частицы. Возмущение Галактики рассматриваем в линейном приближении. Удобно пользоваться компонентами момента по отношению к инерциальной системе координат

$$\bar{K}=\bar{r}\times\bar{v} \tag{14}$$

и вектора Лапласа

$$\bar{A}=-\frac{GM\bar{r}}{r}+\bar{v}\times\bar{K}, \tag{15}$$

где используется вектор скорости в инерциальной системе координат

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}+\bar{\Omega}\times\bar{r}. \tag{16}$$

При средних расстояниях r_m и соответствующих скоростях $\dot{r}_m\sim\sqrt{GM/r_m}$ в правых частях (7) фигурируют возмущающие члены, соответствующие по порядку величины $\sim\Omega^2 r_m$ и $\Omega\sqrt{GM/r_m}$. В нашем приближении

$$\dot{r}_m \gg \Omega r_m, \quad \Omega^2 r_m \ll \Omega\dot{r}_m \sim \Omega\sqrt{\frac{GM}{r_m}}, \tag{17}$$

т.е. члены с кориолисовыми силами в (7) существенно больше членов, линейных по x и z. В первом приближении можно было бы учитывать вообще только кориолисовы силы, что, очевидно, сводится к вращению обоих векторов $\vec{K}$ и $\vec{A}$ относительно оси z с угловой скоростью Ω. Физически это не что иное, как отраженное вращение координатной системы. Это отраженное вращение, по-видимому, удобнее сразу исключить, вернувшись от уравнений (7), записанных во вращающейся системе координат, к уравнениям для неподвижной системы координат. Координаты x_1, y_1, z_1 в ней связаны с x, y, z стандартными соотношениями

$$x_1 = x\cos\Omega t - y\sin\Omega t\,, \quad y_1 = x\sin\Omega t + y\cos\Omega t\,, \tag{18}$$

и это дает

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{GMx_1}{r} + 4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\left(x_1\cos^2\Omega t + y_1\cos\Omega t\sin\Omega t\right) - \Omega^2 x_1\,,\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{GMy_1}{r} + 4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\left(x_1\cos\Omega t\sin\Omega t + y_1\sin^2\Omega t\right) - \Omega^2 y_1\,,\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{GMz_1}{r^3} - \mathrm{C}^2 z_1\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Поправочные члены к кеплерову движению в правых частях (19), как мы видим, второго порядка малости, и сказываются они только за много периодов обращения; поэтому правые части можно осреднить, с одной стороны, по орбитальному движению, с другой стороны, по вращению Галактики. Это второе осреднение эквивалентно взятию средних от коэффициентов, которые зависят от $\cos\Omega t$, $\sin\Omega t$. Получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{GMx_1}{r^3} + 2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})x_1 - \Omega^2 x_1\,,\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{GMy_1}{r^3} + 2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})y_1 - \Omega^2 y_1\,,\\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{GMz_1}{r^3} - \mathrm{C}^2 z_1\,.
\end{aligned} \tag{20}$$

Используем теперь интегралы движения (14) и (15), где

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_1}{dt}\,. \tag{21}$$

Вычисление дает:

$$\begin{aligned}
\frac{dK_x}{dt} &= \left[\Omega^2 - \mathrm{C}^2 - 2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]y_1 z_1\,,\\
\frac{dK_y}{di} &= -\left[\Omega^2 - \mathrm{C}^2 - 2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]x_1 z_1\,,\\
\frac{dK_z}{dt} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{d\mathrm{A}_x}{dt}=\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]\left(x_1y_1\frac{dy_1}{dt}-x_1z_1\frac{dz_1}{dt}-y_1^2\right)+\mathrm{C}^2\left(z_1^2\frac{dx_1}{dt}-2x_1z_1\frac{dz_1}{dt}\right),$$
$$\frac{d\mathrm{A}_y}{dt}=\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]\left(x_1y_1\frac{dx_1}{dt}-y_1z_1\frac{dz_1}{dt}-x_1^2\frac{dy_1}{dt}\right)+\mathrm{C}^2\left(z_1^2\frac{dy_1}{dt}-2y_1z_1\frac{dz_1}{dt}\right), \tag{23}$$
$$\frac{d\mathrm{A}_z}{dt}=\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]\left(2x_1z_1\frac{dx_1}{dt}+2y_1z_1\frac{dy_1}{dt}-\left(x_1^2+y_1^2\right)\frac{dz_1}{dt}\right)+\mathrm{C}^2\left(x_1z_1\frac{dx_1}{dt}+y_1z_1\frac{dy_1}{dt}\right).$$

Перейдем к осреднению по орбите частицы. В правых частях (22) встречаются двойные произведения координат. При обычной ориентировке орбиты (индекс "единица" для краткости не пишем) и общепринятых обозначениях для кеплеровых элементов

$$x=a(\cos E-e),\quad y=a\sqrt{1-e^2}\sin E,\quad z=0,\quad t=(E-e\sin E), \tag{24}$$

следовательно, получаем средние значения по орбите, обозначаемые угловыми скобками:

$$\left\langle x^2\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}a^2(e-\cos E)^2(1-e\cos E)dE=\frac{a^2\left(1+4e^2\right)}{2},\quad \left\langle y^2\right\rangle=\frac{a^2\left(1-e^2\right)}{2},$$
$$\langle xy\rangle=\langle xz\rangle=\langle yz\rangle=\left\langle z^2\right\rangle=0.$$

С другой стороны, при той же стандартной ориентации

$$K_x=K_y=0,\quad K_z=\sqrt{GMa\left(1-e^2\right)},$$
$$\mathrm{A}_x=GMe,\quad \mathrm{A}_y=\mathrm{A}_z=0.$$

Из написанного выше следует при цифровых обозначениях x_1, x_2, x_3 или индексах 1, 2, 3 вместо x, y, z:

$$\left\langle x_ix_j\right\rangle=\frac{a}{2GM}\left(\delta_{ij}K^2-K_iK_j\right)+\frac{5a^2}{2}\frac{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}{(GM)^2} \tag{25}$$
(δ - символы Кронекера, $i, j=1, 2, 3$).

Формула (25) носит инвариантный характер: слева и справа стоят однотипные симметричные тензоры. Следовательно, справедливость (25) не зависит от принятой системы координат. Возвращаясь к прежней системе координат, получаем, в частности, при осреднении правых частей (22):

$$\langle xz\rangle=-\frac{a}{2GM}K_xK_z+\frac{5a^2}{2}\frac{\mathrm{A}_x\mathrm{A}_z}{(GM)^2},\ \langle yz\rangle=-\frac{a}{2GM}K_yK_z+\frac{5a^2}{2}\frac{\mathrm{A}_y\mathrm{A}_z}{(GM)^2}. \tag{26}$$

В замаскированном виде формулы (26) фигурируют в классических исследованиях как задающие главные части возмущений от внутренних тел на более удаленные спутники [12,13].

Несколько более сложным оказывается осреднение правых частей (23). Имеем в результате интегрирования по частям

$$\left\langle xz\frac{dz}{dt}\right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}z^2\right\rangle,$$

и, следовательно,

$$\left\langle xz\frac{dz}{dt}\right\rangle = \frac{1}{3}\left(xz\frac{dz}{dt} - z^2\frac{dx}{dt}\right),$$

а в целом

$$\left\langle xy\frac{dy}{dt} - xz\frac{dz}{dt} - y^2\frac{dx}{dt}\right\rangle = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\langle y\rangle - \frac{1}{3}\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right)\langle z\rangle, \qquad (27)$$

причем мы вынесли за знак осреднения компоненты кинетического момента, как инвариантные в невозмущенном движении. Осреднение самих x, y, z в специальной системе координат дает:

$$\langle x\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\cos E - e)(1 - e\cos E)\,dE = -\frac{3}{2}ae, \quad \langle y\rangle = \langle z\rangle = 0,$$

что в инвариантной форме записывается как

$$\langle x_i\rangle = -\frac{3a}{2GM}\mathrm{A}_i. \qquad (28)$$

Аналогично

$$\left\langle z^2\frac{dx}{dt} - 2xz\frac{dz}{dt}\right\rangle = \frac{4}{3}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\langle z\rangle,$$

$$\left\langle xy\frac{dx}{dt} - yz\frac{dz}{dt} - x^2\frac{dy}{dt}\right\rangle = \left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)\langle x\rangle - \frac{1}{3}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\langle z\rangle,$$

$$\left\langle z^2\frac{dy}{dt} - 2yz\frac{dz}{dt}\right\rangle = \frac{4}{3}\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right)\langle z\rangle,$$

$$\left\langle 2xz\frac{dx}{dt} - x^2\frac{dz}{dt}\right\rangle = -\frac{4}{3}\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right)\langle x\rangle,$$

$$\left\langle 2yz\frac{dy}{dt} - y^2\frac{dz}{dt}\right\rangle = -\frac{4}{3}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\langle y\rangle,$$

$$\left\langle xz\frac{dy}{dt}\right\rangle = \frac{1}{3}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\langle x\rangle,$$

$$\left\langle yz\frac{dy}{dt}\right\rangle = \frac{1}{3}\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right)\langle y\rangle.$$

Таким образом, осреднение (22) и (24) приводит к системе

$$\frac{dK_x}{dt} = \left[\Omega^2 - \mathrm{C}^2 - 2\mathrm{A}(\mathrm{A} - \mathrm{B})\right]\left(-\frac{a}{2GM}K_yK_z + \frac{5a^2}{2(GM)^2}\mathrm{A}_y\mathrm{A}_z\right),$$

$$\frac{dK_y}{dt} = -\left[\Omega^2 - \mathrm{C}^2 - 2\mathrm{A}(\mathrm{A} - \mathrm{B})\right]\left(-\frac{a}{2GM}K_xK_z + \frac{5a^2}{2(GM)^2}\mathrm{A}_x\mathrm{A}_z\right), \qquad (29)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = 0.$$

$$\frac{d\mathrm{A}_x}{dt}=-\frac{3a}{2GM}\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]\left(\mathrm{A}_y K_z+\frac{\mathrm{A}_z K_y}{3}\right)-\frac{2a}{GM}\mathrm{C}^2\mathrm{A}_z K_y\,,$$

$$\frac{d\mathrm{A}_y}{dt}=\frac{3a}{2GM}\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]\left(\mathrm{A}_x K_z+\frac{\mathrm{A}_z K_x}{3}\right)+\frac{2a}{GM}\mathrm{C}^2\mathrm{A}_z K_x\,, \tag{30}$$

$$\frac{d\mathrm{A}_z}{dt}=\frac{2a}{GM}\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]\left(-K_y\mathrm{A}_x+K_x\mathrm{A}_y\right)-\frac{aC^2}{2GM}\left(\mathrm{A}_x K_y-\mathrm{A}_y K_x\right).$$

Система (29)-(30) принадлежит к числу систем гидродинамического типа по Обухову [14]. Общего приема для решения таких систем нет, но в данном случае дело облегчается наличием нескольких инвариантов. Действительно, введем вспомогательные переменные

$$\mathrm{A}_*=\sqrt{\mathrm{A}_x^2+\mathrm{A}_y^2}\,,\qquad K_*=\sqrt{K_x^2+K_y^2}\,, \tag{31}$$

т.е. величины горизонтальных проекций векторов $\bar{\mathrm{A}}$ и $\bar{K}$. Из (29) и (30) получаем:

$$\frac{d}{dt}K_*^2=2\left(K_x\frac{dK_x}{dt}+K_y\frac{dK_y}{dt}\right)=$$
$$=\frac{5a^2}{(GM)^2}\left[\Omega^2-\mathrm{C}^2-2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]\mathrm{A}_z\left(K_x\mathrm{A}_y-K_y\mathrm{A}_x\right), \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{A}_*^2=\mathrm{A}_x\frac{d\mathrm{A}_x}{dt}+\mathrm{A}_y\frac{d\mathrm{A}_y}{dt}=$$
$$=\left\{\frac{2a}{GM}\mathrm{C}^2+\frac{a}{2GM}\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]\right\}\mathrm{A}_z\left(K_x\mathrm{A}_y-K_y\mathrm{A}_x\right). \tag{33}$$

Сопоставив полученное с последним уравнением (30) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{A}_z^2}{dt}=\left\{\frac{2a}{GM}\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]+\frac{a\mathrm{C}^2}{2GM}\right\}\mathrm{A}_z\left(K_z\mathrm{A}_y-K_y\mathrm{A}_y\right), \tag{34}$$

кроме очевидного из (29)

$$K_z=\mathrm{const}\,, \tag{35}$$

сравнением соотношения (32) с (34) получаем:

$$\left\{2\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]+\frac{\mathrm{C}^2}{2}\right\}K_*^2-\frac{5a}{2GM}\left[\Omega^2-\mathrm{C}^2-2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]\mathrm{A}_z^2=h\quad(h=\mathrm{const}), \tag{36}$$

а сравнение (33) с (34) дает:

$$\left\{2\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]+\frac{\mathrm{C}^2}{2}\right\}\mathrm{A}_*^2-\left\{2\mathrm{C}^2+\frac{1}{2}\left[2\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Omega^2\right]\mathrm{A}_z^2\right\}=h_1\quad(h_1=\mathrm{const}). \tag{37}$$

Результат суммирования (36) и (37) с некоторыми постоянными коэффициентами мы сравниваем с известным соотношением [15]

$$A^2 + \frac{GM}{a} K^2 = (GM)^2 . \tag{38}$$

Помимо проверки необходимого соответствия, убеждаемся в наличии связи между параметрами:

$$(GM)^2 = \frac{GM}{a} K_z^2 + \frac{h_1 + \frac{GM}{a} h}{2\left[2A(A-B) - \Omega^2\right] + \frac{C^2}{2}} . \tag{39}$$

Кроме того, известно равенство нулю скалярного произведения

$$A_x K_x + A_y K_y + A_z K_z = 0 . \tag{40}$$

Соотношение (40) также согласуется с нашей системой (29), в чем легко можно убедиться, дифференцируя его левую часть. За основную переменную принимаем величину A_z. Для изучения ее эволюции преобразуем правую часть (34) элементарным образом:

$$K_x A_y - K_y A_x = \pm\sqrt{\left(K_x^2 + K_y^2\right)\left(A_x^2 + A_y^2\right) - \left(K_x A_x + K_y A_y\right)^2} = \pm\sqrt{\left(K_*^2 A_*^2 - K_z^2 A_z^2\right)} .$$

Наконец, выражая в правой части A_* и K_*, согласно (36) и (37), через общий аргумент A_z, получаем:

$$K_x A_y - K_y A_x = \pm\sqrt{\frac{U}{2\left[2A(A-B) - \Omega^2\right] + \frac{C^2}{2}} \cdot \frac{U_1}{2\left[2A(A-B) - \Omega^2\right] + \frac{C^2}{2}} - K_z^2 A_z^2} ,$$

где обозначено для краткости

$$U = h + \frac{5a}{2GM}\left[\Omega^2 - C^2 - 2A(A-B)\right] A_z^2 , \quad U_1 = h_1 + \left[2C^2 + \frac{1}{2}\left[2A(A-B) - \Omega^2\right]\right] A_z^2 .$$

Тогда (34) оказывается уравнением для одной неизвестной функции $A_z(t)$:

$$\frac{dA_z}{dt} = \pm\frac{a}{GM}\sqrt{UU_1 - \left\{2\left[2A(A-B) - \Omega^2\right] + \frac{C^2}{2}\right\} K_z^2 A_z^2} . \tag{41}$$

Под знаком радикала стоит многочлен четвертой степени, поэтому $A_z(t)$ выражается через эллиптические функции. Область эволюции для A_z определяется условием положительности подкоренного выражения в правой части (41). Из (38) ясна ограниченность $A_z(t)$. Точками поворота, если оставить в стороне исключительные случаи асимптотического поведения $A_z(t)$, оказываются корни подрадикального выражения. Поскольку такие точки обязательно присутствуют, возможны лишь три основных варианта: 1) корни для A_z^2 оба положительны и положителен коэффициент при A_z^4; 2) корни для A_z^2 оба положительны, но коэффициент при A_z^4 отрицателен; 3) один корень положителен, другой отрицателен. Уравнение (41) для краткости записываем в этих трех вариантах соответственно как

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \frac{d\,A_z}{dt} = \pm\sigma\sqrt{\left(\chi_1^2 - A_z^2\right)\left(\chi_2^2 - A_z^2\right)}\,, \quad \chi_2 > \chi_1\,,\\
&2) \quad \frac{d\,A_z}{dt} = \pm\sigma\sqrt{\left(\chi_2^2 - A_z^2\right)\left(A_z^2 - \chi_1^2\right)}\,,\\
&3) \quad \frac{d\,A_z}{dt} = \pm\sigma\sqrt{\left(\chi_1^2 - A_z^2\right)\left(A_z^2 + \chi_2^2\right)}\,,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

с некоторыми положительными постоянными σ, χ_1, χ_2. Во всех случаях решение уравнений (42) записывается через стандартные эллиптические функции Якоби [16]:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad A_z = \chi_l \operatorname{sn}\left(\sigma\chi_2(t-t_0), \frac{\chi_1}{\chi_2}\right),\\
&2) \quad A_z = \pm\chi_2 \operatorname{dn}\left(\sigma\chi_2(t-t_0), \sqrt{1-\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}}\right),\\
&3) \quad A_z = \chi_1 \operatorname{cn}\left(\sigma\sqrt{\chi_1^2+\chi_2^2}(t-t_0), \frac{\chi_1}{\sqrt{\chi_1^2+\chi_2^2}}\right),
\end{aligned}
\tag{43}
$$

В (43) введена некоторая начальная фаза t_0. Подчеркнем, что мы отбрасываем как невозможные те варианты, где интервал положительности подрадикального выражения не ограничен с той или другой стороны.

В случаях 1) и 3) функция $A_z(t)$ знакопеременна. В случае 2) она знакопостоянна для каждого конкретного объекта, но в принципе может иметь любой знак, т.е. конечные орбиты этих классов разделяются на имеющие афелий (или апоастрий) все время выше или все время ниже галактической плоскости.

4. ***Применение к условиям нашей Галактики.*** Параметры A, B, C для Галактики много раз оценивались различными авторами. Для первых двух параметров мы принимаем сравнительно новые оценки из критического обзора [17]: $A = 11.3 \pm 1.1$, $B = -13.9 \pm 09$ км/с кпк. В тех же единицах км/с и кпк получаем:

$$A^2 - B^2 = -65.52\,.$$

Определение же параметра C носит несколько иной характер. Мы опираемся на работы [18,19]. При пересчете приведенных там значений градиента вертикального галактического ускорения (в частном случае $z = 0$), в наши единицы

$$C^2 = 758\,, \quad C = 27.53\,.$$

Отсюда следуют значения наших коэффициентов:

$$\Omega^2 - C^2 - 2A(A-B) \approx B^2 - A^2 - C^2 = -692.48\,,$$

$$2\left[2A(A-B) - \Omega^2\right] + \frac{C^2}{2} = 2\left(A^2 - B^2\right) + \frac{C^2}{2} = 247.96\,,$$

$$2C^2+\frac{1}{2}\left[2A(A-B)-\Omega^2\right]=\frac{A^2-B^2}{2}+2C^2=1483.24\,.$$

Следовательно, в (36) оба слагаемых для всех частиц положительны и $h>0$. В (37), напротив, A_*^2 и A_ζ^2 стоят с разными знаками, знак h_1 может быть любым.

Рассмотрим частный случай, когда комета или любое другое малое тело выбрасывается из солнечной системы почти прямолинейно, тогда можно принять $K_\zeta=0$, так что последний член под радикалом в (41) исчезает. При $h_1<0$ имеет место второй случай в (42) и (43), а при $h_1>0$ - третий случай. Соответственно, при $h_1<0$ согласно свойствам функций Якоби, величина A_ζ все время остается больше некоторого положительного значения. Максимальное значение $A_2=\chi_2$ достигается тогда, когда $A_*=0$, т.е. периодически наступают моменты, когда линия апсид направлена в галактический полюс. Напротив, при $h_1>0$ фигурирует знакопеременная функция cn, причем величина $|A_\zeta|$ ограничена сверху и $A_\zeta(t)$ колеблется со средним положением $A_\zeta=0$, т.е. орбита периодически проходит через положения, когда линия апсид лежит в галактической плоскости. Границу между обоими случаями определяем по условию обращения правой части (37) в нуль, что можно раскрыть как $247.96\cos^2 i-1483.24\sin^2 i=0$, $\operatorname{tg} i=0.4088$, $i=22°14'$. По существу аналогичные результаты были получены несколько иными методами в [20].

Итак, при угле выброса (по отношению к галактической плоскости) $i>22°14'$ последующая орбита будет всегда направлена афелием (апоастрием) вверх, а при $i<22°14'$ будут колебания линии апсид вверх-вниз через галактическую плоскость. Одновременно при этом меняется значение K_*, так что точное возвращение собственно в солнечную систему имеет место не при каждом обороте, а через определенные бóльшие интервалы времени. Если $K_\zeta\neq 0$, картина становится более сложной в смысле зависимости от начальных условий, но разделение на два типа поведения, согласно (43), сохраняется (хотя направление на афелий или апоастрий не достигает полюса); трудность может доставить только определение параметров χ_1 и χ_2. Все сказанное согласуется, с соответствующими изменениями численных оценок, к малым телам, обращающимся на значительном расстоянии вокруг звезд в других областях диска Галактики. И сходным образом к членам внешних галактик при условии достаточной их сплюснутости. Напротив, в экзотических условиях вытянутости основного тела Галактики вдоль оси, получить определенный ответ на вопрос о той или иной зависимости характера орбиты от начальных условий в общем виде не удается, хотя три типа поведения орбиты, указанные в (43), остаются.

5. *Выводы*. Малые тела, выбрасываемые из солнечной системы или окрестности другой звезды, но не оторвавшиеся окончательно, испытывают возмущение со стороны регулярного гравитационного поля Галактики.

Если пренебречь возмущениями от отдельных проходящих мимо звезд, эффект которых также накапливается, но нерегулярно [21-25], орбита выброшенной частицы может быть охарактеризована как оскулирующий кеплеров эллипс, претерпевающий изменения с некоторым "большим" периодом. При этом периодически колеблется как эксцентриситет, так и наклонность линии апсид к галактической плоскости. Выделены два типа поведения орбит выброшенных частиц: линия апсид колеблется либо в окрестности галактического полюса, либо вокруг галактической плоскости смотря по тому, оказывается первоначальный угол выброса больше или меньше критического значения 22°14′.

В данной публикации мы ограничивались гравитационными силами. Лучистое давление часто существенно для частиц пыли, но это учитывается редукцией массы центральной звезды. Исключение составляют случаи, когда лучистое давление сильнее тяготения звезды: тогда задача принимает уже совсем иной характер. Также мы не учитываем существенного во внутренних частях Солнечной системы влияния планет, по поводу которого сейчас накопилась огромная литература, например [26-28].

Работа выполнена при поддержке Гранта РФФИ 07-02-00061 (В.А.Антонов, А.С.Баранов) и программы Президиума РФ по поддержке ведущих школ России (Грант НШ-1323.2008.2, В.А.Антонов).

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория,
Россия, e-mail: baranov@gao.spb.ru

THE EVOLUTION OF THE LENGTHY CLOUDS OF PARTICLES AROUND THE SUN AND STARS

V.A.ANTONOV, A.S.BARANOV

The evolution of trajectories of small bodies, which are not entirely rejected from the Solar System and undergo the essential disturbances from the regular field of the Galaxy, has been investigated. Among such bodies are individual dust particles, comets or, in the case of other stars, large dust clouds and stars-satellites. The possibility of the motion averaging along the period of the galactic rotation has been shown. The averaged equations have been solved in the elliptic functions. The excentricity of the orbit evolves as well, but if one neglects the action of individual stars it returns periodically to the initial value ~1, corresponding to the rejection. The inclination of the line of apsides to the galactic plane undergoes two types of the evolution: it passes either through 90° or 0°.

Key words: *Galaxy:the Oort-Kuzmin parameters:double stars:comets:dust clouds*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д.Я.Мартынов*, Курс общей астрофизики, М., Наука, 1979.
2. *K.E.Nilsen, T.R.Gull, G.V.Kober*, Astrophys. J., Suppl. Ser., **157**, 138, 2005.
3. *S. van den Bergh*, J. Roy. Astron. Can., **70**, 303, 1982.
4. *J.A.Fernandez*, Astron. Astrophys., **96**, 26, 1981.
5. *Л.А.Арцимович, Р.З.Сагдеев*, Физика плазмы для физиков, М., Атомиздат, 1979.
6. *J.H.Jeans*, Astronomy and Cosmogony, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1928.
7. *К.Ф.Огородников*, Динамика звездных систем, М., ГИФМЛ, 1958.
8. *S.Breiter, M.Fouchard, R.Ratajaczak*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **383**, 200, 2008.
9. *D.E.Morris, R.A.Muller*, Icarus, **65**, 1, 1986.
10. *J.Heisler, S.Tremaine*, Icarus, **65**, 13, 1986.
11. *С.Чандрасекар*, Принципы звездной динамики, М., ИЛ, 1948.
12. *К.Шарлье*, Небесная механика, М., Наука, 1966.
13. *М.Ф.Субботин*, Введение в теоретическую астрономию, М., Наука, 1968.
14. *Ф.В.Должанский, В.И.Кляцкин, А.М.Обухов, М.А.Чусов*, Нелинейные системы гидродинамического типа, М., Наука, 1974.
15. *Г.Н.Дубошин*, Небесная механика, Основные задачи и методы, М., ГИФФЛ, 1963.
16. *Г.Бейтмен, А.Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, Т.3, Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье, М., Наука, 1967.
17. *R.P.Olling, M.R.Merrifield*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **297**, 943, 1998.
18. *K.Kuijken, G.Gilmore*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **239**, 577, 1989.
19. *K.Kuijken, G.Gilmore*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **239**, 605, 1989.
20. *J.Byl*, Earth, Moon and Planets, **36**, 263, 1986.
21. *H.Scholl, A.Cazenave, A.Brahic*, Astron. Astrophys., **112**, 157, 1982.
22. *P.Barge et al.*, Astron. Astrophys., **115**, 8, 1982.
23. *В.А.Антонов, З.П.Тодрия*, Письма в АЖ, **10**, 394, 1984.
24. *M.Duncan, T.Quinn, S.Tremaine*, Astron. J., **94**, 1330, 1987.
25. *О.А.Мазеева*, Астрон. Вестн., **41**, 130, 2007.
26. *Е.Эверхарт*, Происхождение Солнечной системы (сборник статей), М., Мир, 1976.
27. *Е.И.Казимирчак-Полонская*, Проблемы исследования Вселенной, вып. 7, М.-Л., Наука, 340, 1978.
28. *J.A.Fernandez, W.-H.Ip*, Icarus, **54**, 377, 1983.