АСТРОФИЗИКА

ТОМ 52 ФЕВРАЛЬ, 2009 ВЫПУСК 1

**От В.А.Амбарцумяна
до наших дней**

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА: СРЕДНЕЕ ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

В.В.ИВАНОВ

Поступила 1 августа 2008

Излагаются исследования В.А.Амбарцумяна по определению среднего числа рассеяний фотона в рассеивающих средах и их продолжение и развитие, в первую очередь в петербургской школе Амбарцумяна. Кратко обсуждаются следующие вопросы: а) Традиционный способ расчета числа рассеяний по функции источников и его критика. б) Уравнение для числа рассеяний фотона $N(\tau;\tau_0)$, рождающегося на оптической глубине τ в плоском слое оптической толщины τ_0 и расчет на его основе для среды с произвольными внутренними источниками среднего по всему ансамблю фотонов числа рассеяний $\overline{N}$. Эти вопросы рассматриваются сначала для случая монохроматического рассеяния, а затем для рассеяния в линии с полным перераспределением по частотам (ППЧ). в) Средняя длина пути фотона резонансной линии $\overline{T}$ в рассеивающей среде с ППЧ и поглощением в континууме - основные уравнения, асимптотики для оптически толстого слоя. г) Обзор расчетов $\overline{N}$ и $\overline{T}$ в столь толстых средах, что приближение ППЧ отказывает и эффекты частичного перераспределения по частотам (ЧПЧ) становятся определяющими. Во многих частях статьи изложение ведется на полуколичественном уровне, с упором на физическую суть дела, а не на математику, что достигается широким использованием приближенных и асимптотических решений.

Ключевые слова: *многократное рассеяние света - среднее число рассеяний- средняя длина пути фотона - закон* $\sqrt{\varepsilon}$

1. *Введение.* В начале одной из ранних статей [1] (см. также [2]), написанных еще до появления его знаменитых работ 1940-х годов по теории многократного рассеяния света, В.А.Амбарцумян писал:

"Для некоторых задач астрофизики важно уметь дать ответ на следующие вопросы:

1. Пусть мы имеем поток световых квантов, проходящих через рассеивающую среду заданной оптической толщины. Каково среднее число рассеяний, испытываемых каждым световым квантом при диффузии через всю рассеивающую среду?

2. Каково среднее время, которое затрачивается световым квантом на диффузию через рассеивающую среду?"

Результаты, полученные в статье, начало которой мы только что процитировали, в настоящее время представляют лишь исторический интерес, и останавливаться на них мы не будем. Однако сами сформулированные вопросы не утратили своей актуальности. Хотя они и не являются центральными для современной теории многократного рассеяния света, им посвящена огромная литература. Ключевой вопрос здесь - получение оценок среднего числа рассеяний фотона $\overline{N}$ и средней длины его пути в среде $\overline{T}$ до полного расчета поля излучения. Их знание позволяет сделать важные энергетические оценки. Пусть $1-\lambda$ - вероятность гибели фотона при рассеянии и β - вероятность гибели фотона центральной частоты линии в полете (из-за поглощения в континууме) в расчете на единицу оптического пути. Очевидно, что почти вся вырабатываемая в среде энергия будет выходить наружу, только если $(1-\lambda)\overline{N} \ll 1$ и $\beta\overline{T} \ll 1$. Напротив, если $1-(1-\lambda)\overline{N} \ll 1$ или $1-\beta\overline{T} \ll 1$, роль диссипации энергии в среде велика, и лишь небольшая доля рожденных в среде фотонов будет выходить через границы. Информация о числе рассеяний и о длине траектории фотона ценна также и потому, что часто ее можно использовать для выбора рационального алгоритма и существенного ускорения расчета полного поля излучения.

В настоящей статье основное внимание уделяется результатам, полученным в обсуждаемой области В.А.Амбарцумяном и его петербургской школой. Важные результаты в этой же области, полученные в бюраканской школе В.А.Амбарцумяна, в первую очередь А.Г.Никогосяном, надеемся, найдут достойное отражение в подготавливаемой в Бюракане юбилейной статье по теории переноса излучения.

Основополагающей работой в рассматриваемой в этой статье области является сравнительно мало известная на Западе короткая заметка В.А.Амбарцумяна, опубликованная в 1948г. в Докладах Академии Наук Армении [3] и впоследствии включенная в собрание его Научных Трудов [2]. В английском переводе эта статья, по-видимому, отсутствует.

В работе получены два замечательных результата. Во-первых, из простых вероятностных соображений показано, что если I есть интенсивность в произвольном направлении в среде, занимающей произвольную выпуклую область и имеющую произвольную, возможно даже меняющуюся от точки к точке индикатрису рассеяния, то среднее число рассеяний $\overline{n}$ фотонов, дающих вклад в эту интенсивность, равно

$$\overline{n} = \lambda \frac{\partial \ln I}{\partial \lambda}. \tag{1}$$

Здесь λ - вероятность переизлучения фотона при рассеянии. Она считается во всей среде одной и той же. Фактически это единственное существенное ограничение, которое накладывается.

Второй результат можно сформулировать следующим образом. Если на границе полубесконечной среды имеется плоский источник, изотропно излучающий в сторону среды, то среднее число рассеяний $N(0)$, испытываемых фотонами до их гибели в среде или выхода из нее, составляет

$$N(0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \qquad (2)$$

Эта формула выражает так называемый "закон $\sqrt{\varepsilon}$" (в не совсем стандартной его форме). Этот закон и различные его обобщения прямо или косвенно играет важную роль во многих разделах современной теории переноса излучения - в простейшей теории изотропного монохроматического рассеяния (см., например, [4,5]), в задачах об образовании резонансных линий с полным перераспределением по частотам (ППЧ) [6,7], в теории рэлеевского и резонансного рассеяния поляризованного излучения [8], наконец, даже в задачах об образовании резонансных линий в атмосферах со слабым магнитным полем [9-11].

На первый взгляд формула (2) кажется никак не связанной с формулой (1). Не останавливаясь на деталях, укажем лишь, что в основе ее вывода из (1) лежат идеи принципа инвариантности. В частности, ключевым является тот факт, что знаменитая функции $\varphi(\mu)$ - решение уравнения Амбарцумяна

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{\lambda}{2}\mu\varphi(\mu)\int_0^1 \frac{\varphi(\mu')d\mu'}{\mu+\mu'} \qquad (3)$$

удовлетворяет соотношению

$$1 - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \varphi(\mu)d\mu = \sqrt{1-\lambda}. \qquad (4)$$

Последняя формула - это, по-видимому, первый случай появления "таинственного" $\sqrt{\varepsilon}$ в теории переноса излучения [12,2]. По сути дела, причина коренится в нелинейности уравнения Амбарцумяна (3).

2. *Традиционный подход.* Отклонимся на время от обсуждения работ В.А.Амбарцумяна и продолжающих их исследований его школы и приведем некоторые простейшие формулы, которые позволят легче ориентироваться в последующем. Во многих работах, особенно посвященных решению модельных задач, определение среднего числа рассеяний фотонов *уже рассчитанного* поля излучения производится следующим образом. Предположим, что мы имеем дело с плоским слоем оптической толщины τ_0 и функция источников задачи $S(\tau)$ является решением интегрального уравнения

$$S(\tau) = \lambda\int_0^{\tau_0} k(\tau-\tau')S(\tau')d\tau' + S^*(\tau), \qquad (5)$$

в котором $S^*(\tau)$ - первичная функция источников. Вид ядерной функции $k(t)$ определяется тем, имеем ли мы дело с монохроматическим рассеянием или с рассеянием в частотах линии, происходящим с полным перераспределением по частоте с тем или иным коэффициентом поглощения. В настоящий момент нам нет нужды конкретизировать вид $k(t)$. Если функция источников тем или иным способом найдена, поле излучения можно считать известным. Обозначим среднее число рассеяний, которое испытывают фотоны этого поля излучения, через $\overline{N}$. Черта сверху призвана подчеркнуть, что производится усреднение чисел рассеяний, испытываемых каждым конкретным фотоном, по всей их совокупности. Очевидно, что полное число фотонов, поступающих в единицу времени от первичных источников в столбец единичного поперечного сечения, равно интегралу по этому столбцу от $4\pi\varepsilon^*$, где ε^* - первичный коэффициент излучения. Аналогичным образом, полное число излучаемых (на самом деле, главным образом переизлучаемых, т.е. рассеиваемых) фотонов является аналогичным интегралом от $4\pi\varepsilon$, где ε - коэффициент излучения. Учитывая, что $S^* = \varepsilon^*/\alpha$ и $S = \varepsilon/\alpha$, где α - коэффициент поглощения, и переходя от интегрирования по r к интегрированию по τ, получаем

$$\overline{N} = \frac{\int_0^{\tau_0} S(\tau)d\tau}{\int_0^{\tau_0} S^*(\tau)d\tau}. \tag{6}$$

Заметим, что мы говорили о плоском слое лишь потому, что эта модель будет широко использоваться в дальнейшем изложении. Понятно, что среда может занимать любой выпуклый объем, и все приведенные рассуждения останутся в силе. Интегралы в (6) должны при этом распространяться по всему (оптическому) объему среды.

Главным недостатком описанного только что подхода является то, что среднее число рассеяний находится *после* расчета поля излучения. Кроме того, он не позволяет сравнивать между собой числа рассеяний фотонов, зародившихся на разных глубинах, скажем, в середине слоя и на его границе. В принципе это сделать, конечно, можно, но заплатив за это дорогую цену. Чтобы найти число рассеяний фотонов, родившихся на некоторой конкретной глубине τ_1, придется отдельно решать уравнение (5) с первичным источником $S^*(\tau) = \delta(\tau - \tau_1)$. Ясно, что такой путь исследования того, как зависит число рассеяний от глубины зарождения фотонов, едва ли является оптимальным.

Начиная со следующего раздела мы переходим к изложению другого подхода, свободного от указанных сейчас недостатков и дающего возможность получать сведения о средних числах рассеяний фотонов той или иной степени подробности - в зависимости от обстоятельств - без необходимости предварительно рассчитывать полное поле излучения.

3. *Монохроматическое рассеяние.* В середине 1960-х годов Соболев [13-15] выполнил обширный цикл исследований проблем, связанных со средним числом рассеяний при изотропном монохроматическом рассеянии, развивающих идеи работы Амбарцумяна [3]. Во-первых, он обратил внимание

на то обстоятельство, что наряду со средним числом рассеяний фотона N (при этом акт первичного излучения фотона считается его первым рассеянием) представляют интерес также две другие величины, тесно связанные с N, - средние числа рассеяний N_a и N_e, испытываемые, соответственно, фотонами, поглощающимися в среде и выходящими из нее. Так, формула Амбарцумяна (2) для среднего числа рассеяний фотона, начавшего свои случайные блуждания с границы полубесконечной среды, дополняется следующими простыми выражениями для числа рассеяний тех фотонов, которые "гибнут" в среде:

$$N_a(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} + 1\right), \tag{7}$$

и которые ее покидают

$$N_e(0) = \frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)}. \tag{8}$$

Другое существенное обобщение фундаментальной формулы (2), полученное в [14], выглядит так:

$$N(0,\mu) = \frac{\varphi(\mu)}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{9}$$

Эта формула обобщает классический закон $\sqrt{\varepsilon}$ для изотропно рассеивающей полубесконечной атмосферы на случай, когда она освещается излучением, падающим под углом $\arccos\mu$. Заметим, что если рассматривать здесь μ как произвольный параметр, $\mu \in [0,\infty)$, мы будем иметь дело со средой с экспоненциально распределенными источниками вида $\exp(-\tau/\mu)$.

Согласно (9), если почти консервативная среда ($\varepsilon \ll 1$) освещается по нормали ($\mu = 1$), среднее число рассеяний фотонов будет в $\varphi(1) \approx 2.91$ раза больше, чем при изотропном ее освещении. Таким образом, функция $\varphi(\mu)$ имеет (наряду с прочими) также такой физический смысл: $\varphi(\mu)$ показывает, во сколько раз число рассеяний фотонов при освещении полубесконечной среды под углом $\arccos\mu$ больше, чем при изотропном освещении ее внешней границы.

Наконец, самым важным результатом, полученным в указанных работах В.В.Соболева, нам представляется установление того факта, что в слое оптической толщины τ_0 среднее число рассеяний фотона $N(\tau;\tau_0)$, начинающего случайные блуждания на оптической глубине τ, удовлетворяет интегральному уравнению

$$N(\tau;\tau_0) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0} E_1(|\tau-\tau'|)N(\tau';\tau_0)\,d\tau' + 1, \tag{10}$$

где E_1 - первая интегральная показательная функция:

$$E_1(t) = \int_0^1 \exp(-t/\mu)\frac{d\mu}{\mu}. \tag{11}$$

Таким образом, *среднее число рассеяний* $N(\tau;\tau_0)$ *численно совпадает с функцией источников в слое с равномерно распределенными первичными источниками единичной мощности*. Как это ни странно, этот важный факт известен далеко не всем специалистам по теории переноса излучения.

Знание функции $N(\tau;\tau_0)$ позволяет простым интегрированием получить среднее число рассеяний $\overline{N}$ *при любом распределении первичных источников* $S^*(\tau)$:

$$\overline{N} = \frac{\int_0^{\tau_0} S^*(\tau) N(\tau;\tau_0)\, d\tau}{\int_0^{\tau_0} S^*(\tau)\, d\tau}. \tag{12}$$

Поскольку уравнение (10) изучено подробнейшим образом (см., например, [5,16,17], можно воспользоваться многими готовыми результатами.

Начнем с важнейшего случая *полубесконечной атмосферы* ($\tau_0 = \infty$). Соответствующее среднее число рассеяний $N(\tau;\infty)$ будем для краткости обозначать просто через $N(\tau)$, как, впрочем, мы это молчаливо делали и до сих пор. В наиболее интересном случае малых $1-\lambda \equiv \varepsilon$ амплитуда изменения $N(\tau)$ велика - от $N(0) = 1/\sqrt{\varepsilon}$ (это "закон корня из эпсилон") до $N(\infty) = 1/\varepsilon$. Приведем еще для полноты выражение для $N(\tau)$ через соболевскую стандартную функцию $\psi(\tau)$:

$$N(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{13}$$

Для $\psi(\tau)$ имеется явное выражение (см. [5,16,17]) в виде некоторого интеграла, правда, весьма громоздкого, почему мы его здесь и не приводим. Очевидно, что $\psi(\tau)$ изменяется от $\psi(0) = 1$ до $\psi(\infty) = 1/\sqrt{\varepsilon}$. При почти консервативном рассеянии ($\varepsilon \ll 1$) существует обширная область значений $\tau \gg 1$, где $\psi(\tau) \sim \sqrt{3}(\tau + 0.71)$. Эта область ограничена сверху значением $\tau_t \approx (3\varepsilon)^{-1/2}$. Таким образом, при $\tau_t \gg \tau \gg 1$ рост числа рассеяний фотонов $N(\tau)$ происходит пропорционально τ. Начиная с глубин $\sim \tau_t$ скорость роста замедляется и в конце концов мы приближаемся к асимптотическому значению $N(\infty) = \varepsilon^{-1}$.

Случай атмосферы *конечной оптической толщины* технически заметно сложнее. Причина в том, что здесь все решения зависят от двух параметров - оптической толщины среды τ_0 и вероятности гибели фотона при рассеянии ε. Наиболее интересен, конечно, случай оптически толстой среды ($\tau_0 \gg 1$) с почти консервативным рассеянием ($\varepsilon \ll 1$). Только тогда в полной мере проявляются характерные эффекты, вызванные многократными рассеяниями. Характер решения уравнения (10) существенно зависит от величины отношения τ_0/τ_t, где $\tau_t = (3\varepsilon)^{-1/2}$ - так называемая длина термализации. Это понятие заимствовано из теории образования линий с ППЧ и сравнительно редко используется в теории монохроматического рассеяния. При $\tau_0 << \tau_t$ среда является эффективно тонкой в том смысле, что почти все рождающиеся в ней фотоны выходят наружу, роль гибели фотонов при рассеяниях незначительна. В предельном случае $\varepsilon = 0$ гибели фотонов нет вовсе. Это так называемый консервативный случай, или случай чистого рассеяния. В противоположном предельном случае $\tau_0 >> \tau_t$ среда эффективно толстая - почти все рожденные в ней фотоны гибнут в ходе многократных рассеяний, и лишь малая их доля достигает границ и выходит наружу.

Зависимость $N(\tau;\tau_0)$ в этих двух предельных случаях совершенно разная. Для эффективно тонкой среды, грубо говоря, $N(\tau;\tau_0) \propto \tau(\tau_0 - \tau)$. Это не точная формула, а так называемая крупномасштабная асимптотика, при больших τ_0 правильно описывающая поведение решения всюду, кроме окрестностей обеих границ. Для эффективно толстой среды картина совсем другая. В центральной части среды, там, где одновременно $\tau >> \tau_t$ и $(\tau_0 - \tau) >> \tau_t$, выход фотонов через границы почти не сказывается, и условия здесь почти не отличаются от того, что мы имеем в бесконечной среде. Поэтому здесь с высокой точностью $N(\tau;\tau_0) = 1/\varepsilon$. Спад числа рассеяний к обеим границам происходит симметрично. При этом, например, у верхней границы ($\tau = 0$) вплоть до глубин в несколько τ_t с хорошей точностью можно принимать, что $N(\tau;\tau_0) = N(\tau)$.

Описанная сейчас картина дает лишь самое общее качественное представление о поведении $N(\tau;\tau_0)$. Гораздо более детальную информацию можно найти в [15]. В работе Нагирнера [18] предложена следующая простая интерполяционная формула, которая в консервативном случае годится при всех τ и обеспечивает высокую точность:

$$N(\tau;\tau_0) = \frac{1}{2}\psi(\tau)\psi(\tau_0 - \tau). \tag{14}$$

Здесь ψ - это полупространственная консервативная соболевская ψ - функция. Эта формула - частный случай общей аппроксимации, справедливой при чистом рассеянии с ППЧ при произвольном профиле (в том числе и прямоугольном). Заметим еще, что число рассеяний $N_{sp}(\tau;\tau_0)$ фотона, родившегося в однородном шаре радиуса τ_0 на оптическом расстоянии τ от центра, согласно [19] дается формулой, отличающейся от (14) лишь тем, что $\psi(\tau)$ следует заменить на $\psi(\tau_0 + \tau)$, а множитель 1/2 - на 1/6.

4. *Рассеяние с ППЧ.* Вопрос об оценке числа рассеяний фотонов резонансной линии, возникающих при переходах с верхнего уровня на нижний в двухуровенном атоме и испытывающих затем многократные рассеяния в среде, впервые систематически был рассмотрен в работе Соболева [20]. В ней принималось, что рассеяние происходит с полным перераспределением по частотам (ППЧ), а поглощения фотонов в полете

нет, т.е. считалось, что поглощение в континууме отсутствует ($\beta = 0$). Это обычные предположения стандартной теории образования линий в рассеивающих атмосферах. В [20] показано, что в плоском слое оптической толщины τ_0 число рассеяний $N(\tau; \tau_0)$ фотона, который впервые излучается атомом на оптической глубине τ в центре линии, является решением уравнения

$$N(\tau; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K_1(\tau - \tau') N(\tau'; \tau_0) d\tau' + 1, \tag{15}$$

в котором ядерная функция имеет вид

$$K_1(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1(\alpha(x)|t|) dx, \tag{16}$$

где $\alpha(x)$ - коэффициент поглощения, нормированный на 1 в центре линии (при $x=0$), A - нормировочная постоянная:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 1. \tag{17}$$

Безразмерная частота x есть расстояние от центра линии, измеренное в подходящих единицах, таких как доплеровские ширины и т.п. Нормировка ядерной функции K_1 такова:

$$\int_0^{\infty} K_1(t) dt = 1. \tag{18}$$

Хотя в современной западной литературе принято пользоваться коэффициентом поглощения в линии $\phi(x)$, имеющим другую нормировку, именно, $\phi(x) = A\alpha(x)$ (что на самом деле по ряду причин предпочтительнее), мы все же решили сохранить традиционную "русскую" нормировку, принятую, в частности, в работах В.В.Соболева и в книге автора [16], на которые нам придется часто ссылаться.

На первый взгляд, между классическим монохроматическим рассеянием и рассеянием в линии больших различий нет - общая структура уравнений (10) и (15) одна и та же, различие "только" в виде ядерной функции. На самом деле, как мы сейчас убедимся, различия колоссальны. Так, для *полубесконечных атмосфер* сходство ограничивается лишь тем, что решения обоих уравнений монотонно возрастают от $N(0) = 1/\sqrt{\varepsilon}$ до $N(\infty) = 1/\varepsilon$. Формула (13) формально сохраняет свой вид, однако зависимости $\psi(\tau)$ от τ при монохроматическом рассеянии и при рассеянии в линии совершенно разные.

Развитие рафинированной аналитической асимптотической теории многократного рассеяния с ППЧ привело, в частности, к построению простой аппроксимации функции $\psi(\tau)$ для этого случая. Наряду с ядерной функцией K_1, определяемой формулой (16), введем также тесно связанную с ней так называемую вторую ядерную функцию

$$K_2(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} K_1(t) dt. \tag{19}$$

Ее можно считать известной - она детально изучена, для важнейшего случая доплеровского коэффициента поглощения имеются ее таблицы и Паде-аппроксимации высокой точности. В 1971г. было установлено [21] (см. также [16], с. 230), что с очень высокой точностью при практически любом профиле коэффициента поглощения с бесконечно протяженными крыльями

$$N(\tau) = (1-\lambda)^{-1/2}\left(1-\lambda+\lambda K_2(\tau)\right)^{-1/2} . \tag{20}$$

Эта формула впоследствии неоднократно переоткрывалась, в частности в [22]. Хотя при малых $1-\lambda$ функция $N(\tau)$ меняется на несколько порядков, погрешность формулы (20) в важнейших случаях доплеровского и фойгтовского профилей при всех τ не превышает 15-20% ([16], с. 242-243). Более того, как оказалось, эта аппроксимация имеет простой вероятностный смысл [23]. Она является обобщением на случай полубесконечной среды известного "приближения наибольшего пролета" (longest flight approximation) Райбики и Хаммера [24].

Аналитическая оценка среднего числа рассеяний фотона в *слое конечной оптической толщины* является значительно более трудной задачей. Решения уравнения (15) в замкнутой форме неизвестны. Однако не составляет труда, отправляясь от аппроксимации (20), сконструировать приближенное выражение для $N(\tau;\tau_0)$ [25], которое, правда, не обладает столь высокой точностью, как формула (20) и едва ли имеет физический смысл. Эта формула имеет вид

$$N(\tau;\tau_0) = \left(1-\lambda+\lambda K_2(\tau)\right)^{-1/2}\left(1-\lambda+\lambda K_2(\tau_0-\tau)\right)^{-1/2} . \tag{21}$$

Эта интерполяционная формула обладает свойствами, которые редко встречаются вместе - простотой, высокой точностью и широкой областью применимости. Так, при $1-\lambda = 10^{-6}$, когда при достаточно больших τ_0 число рассеяний в середине слоя на три порядка превосходит число рассеяний фотонов, стартующих с границы, при доплеровском и фойгтовском коэффициентах поглощения значение $N(\tau;\tau_0)$, даваемое формулой (20), при любых τ и τ_0 отличается от численно точного не более чем вдвое ([16], с. 242-243).

Специально обсудим один важный частный случай формулы (20). При $\tau = 0$ из нее следует, что

$$N(0;\tau_0) = \left(1-\lambda+\lambda K_2(\tau)\right)^{-1/2} \approx N(\tau_0). \tag{22}$$

Эта формула есть фактически (приближенная!) версия закона $\sqrt{\varepsilon}$ для слоя конечной толщины τ_0. Если $1-\lambda \ll \lambda K_2(\tau_0)$, то среду принято называть эффективно толстой, в противном случае - эффективно тонкой. Предельный случай эффективно тонкой среды - консервативная среда ($\lambda = 1$). В ней гибели фотонов при рассеянии нет вовсе, все рождающиеся в среде фотоны выходят через границы.

Воспользуемся консервативным случаем (он для аналитической теории самый простой), чтобы сделать наше изложение, имеющее, возможно, слишком общий характер, более конкретным. Примем, во-первых, что коэффициент поглощения доплеровский:

$$\alpha(x) = e^{-x^2}, \tag{23}$$

а во-вторых, что оптическая толщина слоя велика: $\tau_0 >> 1$. Тогда, как известно (см., например, [16], [17])

$$K_2(\tau) \sim \frac{1}{2\pi^{1/2}\tau(\ln\tau)^{1/2}}, \quad \tau \to \infty. \tag{24}$$

Поэтому при консервативном рассеянии ($\lambda = 1$) фотон, "стартующий" с границы слоя, согласно (22) совершит примерно

$$N(0;\tau_0) = \sqrt{2}\pi^{1/4}\tau_0^{1/2}(\ln\tau_0)^{1/4} \tag{25}$$

рассеяний. Строгая асимптотическая теория дает для $N(0;\tau_0)$ значение, лишь в $\sqrt{2}$ раз меньшее этой оценки. Отметим,что в работе Соболева [20] также обсуждался вопрос о получении численного коэффициента в формуле (25), но были получены лишь его верхняя и нижняя оценки, различающиеся примерно в два с половиной раза. Получение точного значения коэффициента потребовало развития довольно сложной и громоздкой асимптотической теории [16,17] (применимой для произвольного, а не только доплеровского коэффициента поглощения). Не имея возможности останавливаться здесь на этом подробнее, упомянем о том, что были получены различные строгие асимптотики, а также предложены и другие приближенные выражения для $N(\tau)$ и $N(\tau;\tau_0)$. Все это подробно обсуждается в двух только что упомянутых книгах и в обзоре Нагирнера [26].

Приведем еще выражение для среднего числа рассеяний фотона резонансной линии в среде с равномерно распределенными первичными источниками ($S^* = \mathrm{const}$). Формула (12) принимает вид

$$\overline{N} = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} N(\tau;\tau_0)\,d\tau. \tag{26}$$

Можно показать, что

$$\overline{N} = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} N^2(0;\tau)\,d\tau. \tag{27}$$

Подставив сюда $N(0;\tau)$ из (25) (без множителя $\sqrt{2}$, т.е. асимптотически точное значение), получаем, что при консервативном рассеянии

$$\overline{N} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\tau_0\sqrt{\ln\tau_0}. \tag{28}$$

Любопытно,что $\overline{N}$ по порядку совпадает с $N^2(0;\tau_0)$. Это общее правило, справедливое при любом коэффициенте поглощения в линии.

Заканчивая этот раздел, приведем еще красивую формулу [18] для среднего квадрата числа рассеяний при равномерном распределении источников в слое:

$$\overline{N^2} = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} \overline{N}(\tau)\left[\overline{N}(\tau)-1\right]d\tau . \qquad (29)$$

Она позволяет найти дисперсию числа рассеяний. Заметим, что эта формула справедлива как при ППЧ, так и при монохроматическом рассеянии.

5. *Средняя длина пути фотона.* Из приведенных в начале статьи слов В.А.Амбарцумяна ясно, что нахождение среднего времени, проводимого фотоном в среде в ходе его случайных блужданий, или, что по сути дела есть то же самое - средней длины пути, проходимой фотоном, представляет собой важную задачу. Пока астрофизиками рассматривалось лишь монохроматическое рассеяние, отдельной проблемы здесь, собственно, не было. Чтобы найти длину траектории, достаточно было число рассеяний умножить на среднюю длину свободного пробега между рассеяниями. Ситуация резко изменилась, когда в астрофизику вошли задачи о рассеянии в линии с перераспределением по частотам. Поступать как прежде было невозможно, так как при ППЧ ввести среднюю длину свободного пробега фотона линии, усредненную по частотам, невозможно. Задача о нахождении средней длины траектории фотона спектральной линии, совершающего случайные блуждания в среде с ненулевым поглощением в континууме, стала актуальной. Как это ни странно, до 1970г. [27], в течение более чем двух десятилетий с момента широкого внедрения задач с ППЧ, вопрос о нахождении среднего пути резонансного фотона в рассеивающей среде поставлен не был, хотя это было бы естественным продолжением цикла исследований В.В.Соболева о числе рассеяний фотонов.

Начнем с совсем простых вещей. Рассмотрим *бесконечную среду*. Нетрудно показать, что в этом случае средняя длина пути фотона равна

$$\overline{T} = \frac{\delta(\beta)}{1-\lambda+\lambda\beta\delta(\beta)}, \qquad (30)$$

где

$$\delta(\beta) = A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\beta}dx . \qquad (31)$$

Рассмотрим подробнее, что дает эта формула. При $\lambda = 1$ гибели фотонов при рассеянии нет, и $\overline{T} = 1/\beta$, как это и должно быть по смыслу величины β. В противоположном предельном случае $\lambda = 0$ имеем из (30) $\overline{T} = \delta(\beta)$. Следовательно, $\delta(\beta)$ есть средний оптический путь, проходимый фотоном в бесконечной среде в расчете на одно рассеяние. Функция $\delta(\beta)$ детальнейшим образом изучена и табулирована для коэффициентов поглощения важнейших видов - доплеровского, фойгтовского и лоренцевского [16], разд. 7.3, [24]. Упомянем, что при доплеровском коэффициенте поглощения

$$\delta(\beta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\ln\frac{1}{\beta}\right)^{1/2}, \quad \beta \to 0. \tag{32}$$

Очевидно, что полный средний путь фотона в среде $\overline{T}$ равен произведению пути в расчете на одно рассеяние $\delta(\beta)$ на среднее число рассеяний $\overline{N}$:

$$\overline{T} = \delta(\beta)\overline{N}. \tag{33}$$

Сравнение с (30) дает

$$\overline{N} = \frac{1}{1-\lambda+\lambda\beta\delta(\beta)}. \tag{34}$$

Наконец последнее замечание. Если из (30) и(33) исключить $\delta(\beta)$, то мы придем к соотношению, выражающему тот очевидный факт, что в бесконечной среде сумма вероятностей гибели фотона при рассеяниях и в полете равна единице:

$$(1-\lambda)\overline{N}+\lambda\beta\overline{T} = 1. \tag{35}$$

Перейдем теперь к более сложным, или, правильнее сказать, более громоздким вещам, связанным с рассмотрением *плоского слоя конечной толщины*. Как и в случае определения среднего числа рассеяний, возможны два подхода. Первый, который мы в разд.2 назвали традиционным, состоит в том, что искомая величина - в данном случае средняя длина траектории - рассчитывается по предварительно найденному полю излучения. Формула, заменяющая здесь (6), практически очевидна и имеет вид

$$\overline{T} = \frac{\int_0^{\tau_0} J(\tau)\,d\tau}{\int_0^{\tau_0} S^*(\tau)\,d\tau}, \tag{36}$$

где $J(\tau)$ - интегральная средняя интенсивность излучения в линии

$$J(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1}^{1} I(\tau, \mu, x)\,d\mu. \tag{37}$$

Заметим, что так как поглощение в континууме β теперь отлично от нуля, несколько меняется вид ядерной функции K_1 интегральных уравнений для функции источников $S(\tau)$ и для среднего числа рассеяний (15). Именно, вместо (16) теперь

$$K_1(t, \beta) = A\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1((\alpha(x)+\beta)|t|)\,dx. \tag{38}$$

Заметим, что величину $J(\tau)$ можно представить не только непосредственно как интеграл от интенсивности I (формула (37)), но и выразить в виде некоторого интеграла от функции источников $S(\tau)$, именно

$$J(\tau)=\frac{1}{2A}\int_0^{\tau_0}K_0(\tau-\tau',\beta)S(\tau')d\tau', \tag{39}$$

где

$$K_0(\tau,\beta)=A\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)E_1((\alpha(x)+\beta)\tau)dx\,;\quad \int_0^{\infty}K_0(\tau,\beta)d\tau=\delta(\beta). \tag{40}$$

Другой путь, в определенном смысле более информативный, состоит в получении уравнения, непосредственно определяющего средний путь $T(\tau;\tau_0)$ фотона как функцию глубины τ, с которой он начинает свои случайные блуждания в слое толщины τ_0. Можно показать [27], [16], разд. 8.10, что

$$T(\tau;\tau_0)=\frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0}K_1(\tau-\tau',\beta)T(\tau';\tau_0)d\tau'+T^*(\tau;\tau_0), \tag{41}$$

где

$$T^*(\tau;\tau_0)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau}K_0(\tau,\beta)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0-\tau}K_0(\tau,\beta)d\tau. \tag{42}$$

Полагая $\lambda=0$ в (41), находим,что $T(\tau;\tau_0)=T^*(\tau;\tau_0)$. Поэтому T^* представляет собой средний оптический путь первого свободного пролета фотона, рожденного на оптической глубине τ. К сожалению, каких-либо простых аппроксимаций решения уравнения (41) предложено не было.

Если уравнение (41) решено, то нахождение средней по ансамблю фотонов длины пути при любом распределении первичных источников $S^*(\tau)$ сводится к вычислению одного интеграла (ср. с аналогичной формулой (12) для $\overline{N}$)

$$\overline{T}=\frac{\int_0^{\tau_0}S^*(\tau)T(\tau;\tau_0)d\tau}{\int_0^{\tau_0}S^*(\tau)d\tau}. \tag{43}$$

Подчеркнем одну специфическую особенность зависимости $\overline{T}$ от τ_0 при рассеянии в линии по сравнению с классическим монохроматическим рассеянием. В последнем случае в консервативной среде ($\lambda=1$, $\beta=0$) с равномерно распределенными источниками при больших τ_0, как хорошо известно, $\overline{T}\propto\tau_0^2$. При доплеровском же профиле в той же ситуации, как можно показать, $\overline{T}\propto\tau_0\ln\tau_0$, а при фойгтовском профиле $\overline{T}\propto\tau_0$. Это различие в виде зависимости от τ_0 отражает принципиальное отличие сильно изломанных броуновских траекторий при монохроматическом рассеянии от траекторий при рассеянии с ППЧ, где главный вклад в смещение дает один наибольший по длине пролет. Наглядную графическую иллюстрацию этого см. в [28].

Отметим еще, что для средней длины пути в консервативной оптически толстой среде справедливо соотношение, аналогичное отмечавшемуся ранее для числа рассеяний, именно $T^2(0;\tau_0)$ зависит от τ_0 так же, как $\overline{T}$ для среды с равномерным распределением первичных источников.

Первыми расчетами $\overline{T}$, основанными на использовании формулы (36), были расчеты Хаммера и Кунаша [29]. Поскольку, однако, в этих и в многочисленных других расчетах $\overline{T}$ основное внимание уделялось обсуждению влияния эффектов частичного перераспределения по частотам (ЧПЧ) на зависимость $\overline{T}$ (и $\overline{N}$) от τ_0, мы отложим обсуждение этих работ до следующего раздела.

6. *Рассеяние с ЧПЧ.* Говорить о рассеянии с частичным перераспределением по частотам "вообще", без конкретизации функции перераспределения R, не имеет смысла. Мы будем придерживаться общепринятой классификации функций R_N (N=I, II, ..., V) по Хаммеру [30]; см. также [7]. Многочисленные расчеты разных авторов показали, что существенные отличия от результатов, которые дает ППЧ, для разреженных оптически *очень толстых* сред появляются лишь тогда, когда функцией перераспределения является R_{II}.

Еще в начале 1960-х годов Остерброк [31], обсуждая проблему переноса лайман-альфа излучения в туманностях, высказал предположение, что в области крыльев затухания при функции перераспределения R_{II} изменение частоты фотона в ходе многократных рассеяний должно иметь характер диффузии по частоте. По сути дела именно эта идея определила все последующее развитие аналитики в этой области. Дж.Харрингтон в серии статей [32-34] получил и исследовал уравнение диффузии фотонов в пространстве частот. Его техника была в дальнейшем усовершенствована Нюфелдом [35]. Адамс [36] в замечательной работе 1975г. получил асимптотическое выражение для средней длины пути фотона в консервативно рассеивающей среде предельно большой оптической толщины (см. ниже), опираясь на полуколичественные соображения, развитые в его предыдущей статье [37] и в работе Харрингтона [33]. Упомянутая только что работа Нюфелда [35] позволила учитывать наличие поглощения в континууме. Результаты развитой в указанных работах теории прекрасно согласовались с полученными к этому времени численными данными.

Согласно Адамсу [37], отношение к толщине слоя средней длины пути фотона в слое настолько большой оптической толщины, что приближение ППЧ заведомо неприменимо, асимптотически равно

$$\overline{T}/\tau_0 \sim \left(36\,a\,\tau_0/\pi^{1/2}\right)^{1/3}, \tag{44}$$

где a - фойгтовский параметр. Это соотношение известно под названием "закона $\tau_0^{1/3}$", хотя на самом деле $\overline{T} \propto \tau_0^{4/3}$.

Из численных расчетов $\overline{N}$ и $\overline{T}$, как уже упоминалось, наиболее подробные принадлежат Хаммеру и Кунашу [29]. Расчеты велись методом Фотрие. Авторы рассматривали слой как с равномерным распределением источников, так и с плоским источником в середине слоя. По оптической толщине расчеты проводились вплоть до 10^9, фойгтовский параметр a варьировался от $a \sim 5 \cdot 10^{-1}$ до $a \sim 5 \cdot 10^{-5}$. Оказалось, что в консервативной среде с $\beta = 0$ при $\tau_0 > 10^2$ средняя длина пути с высокой точностью представляется в виде $\overline{T} = C(a\tau_0)(a\tau_0)^{1/3}\tau_0$, где $C(a\tau_0)$ - медленно меняющаяся поправочная функция порядка единицы. При $\tau_0 > 5 \cdot 10^3$ отношения $\overline{N}/\overline{T}$ практически постоянны, причем значения этих постоянных согласуются с полученными теоретически в [33]. Более подробные данные об имеющихся расчетах см. в обзоре [38].

В заключение отметим, что старая, хочется сказать - вечная проблема переноса лайман-альфа излучения в сильно разреженных средах переживает в последние годы буквально второе рождение. Достаточно привести заголовки двух-трех недавних статей: "Scattered Lyα radiation around sources before cosmological reionization" [39]; "Polarization of the Lyman-alpha line from an anisotropically expanding HI shell in primeval galaxies" [40]; " Lyα line formation in starbursting galaxies: extremely thick, dustless and static HI media" [41].

7. *Заключение.* Настоящей статьей мы пытались принести дань уважения выдающимся достижениям В.А.Амбарцумяна и его школы на примере одной довольно частной задачи из теории многократного рассеяния света. Целью было нарисовать общую картину вклада петербургской школы Амбарцумяна, а не давать исчерпывающий обзор всех полученных ею результатов, не говоря уже о всех результатах, полученных в этой области в мире.

Вопросы, которые мы обсуждали, служат предметом интенсивных исследований вот уже более полувека. Естественно думать, что главные проблемы уже решены. Но это не так. Можно указать два важных вопроса, к решению которых, по-видимому, даже не приступали. Первый вопрос - это оценки числа рассеяний при анизотропном рассеянии. Многочисленные имеющиеся программы расчета полей излучения при анизотропном монохроматическом рассеянии могут дать богатый численный - фактически экспериментальный - материал. Это может облегчить выявление и теоретическое объяснение основных закономерностей. Второй, по-видимому, совершенно не обсуждавшийся пока вопрос, - статистика рассеяний поляризованного излучения, например, при монохроматическом рэлеевском и при резонансном рассеянии в спектральной линии с ППЧ.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта НШ-1318.2008.2 по поддержке ведущих научных школ РФ.

Астрономический институт им. В.В.Соболева
Санкт-Петербургского государственного университета,
Россия, e-mail: viva3419@yandex.ru

MULTIPLE LIGHT SCATTERING: MEAN NUMBER OF SCATTERINGS AND RELATED PROBLEMS

V.V.IVANOV

A review is given of the investigations by V.A.Ambartsumian on the estimates of the mean number of scatterings of a photon in scattering media and the continuation and further development of these investigations, primarily by the St.Petersburg scientific school of V.A.Ambartsumian. The following problems are briefly discussed. a) A traditional method of calculating the mean number of scatterings using the source function and its critics. b) The equation for the number of scatterings $N(\tau; \tau_0)$ of a photon born at an optical depth τ in a plane layer of optical thickness τ_0 and use of this equation as a basis for calculating the mean number of scatterings $\overline{N}$ averaged over the whole ensėble of photons produced by an arbitrary distribution of primary inner sources. These problems are first considered for the case of monochromatic scattering and then for the case of scattering in a spectral line with the complete frequency redistribution (CFR). c) Mean path length of a resonance line photon $\overline{T}$ in a scattering medium with CFR and continuum absorption: basic equations and asymptotic solutions for an optically thick layer. d) A review of calculations of $\overline{N}$ and $\overline{T}$ in layers so thick that the CFR approximation breaks down and the effects of partial frequency redistribution (PFR) become dominant. The presentation of the material in some parts of the paper is given on semiquantitative level, with emphasis on physics rather than mathematics. This is achieved by a wide use of approximate and asymptotic solutions.

Key words: *multiple light scattering - mean number of scatterings - mean photon path length -* $\sqrt{\varepsilon}$ *law*

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Амбарцумян*, Ученые Записки ЛГУ, **22**, 14, 1938.
2. *В.А.Амбарцумян*, Научные Труды, т. **1**, Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1960.
3. *В.А.Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, **8**, 101, 1948.
4. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, Изд-во Иностр. лит-ры, М., 1953.
5. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
6. *E.Y.Avrett, D.G.Hummer*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **130**, 295, 1965.

7. *Д.Михалас*, Звездные атмосферы, т. 2, Мир, М., 1982.
8. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **67**, 1233, 1990.
9. *E.Landi degl'Innocenti*, *V.Bommier*, Astron. Asrtophys., **284**, 865L, 1994.
10. *С.И.Грачев*, Астрофизика, **44**, 455, 2001.
11. *J.Stepan*, *V.Bommier*, Astron. Asrtophys., **468**, 797, 2007.
12. *В.А.Амбарцумян*, Астрон. ж., **19**, 30, 1942.
13. *В.В.Соболев*, Астрофизика, **2**, 135, 1966.
14. *В.В.Соболев*, Астрофизика, **2**, 239, 1966.
15. *В.В.Соболев*, Астрофизика, **3**, 5, 1967.
16. *V.V.Ivanov*, Transfer of Radiation in Spectral Lines, NBS Special Publication #385, US Government Printing Office, Washington DC, 1973.
17. *Д.И.Нагирнер*, Лекции по теории переноса излучения, Изд-во СПбГУ, СПб, 2001.
18. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, **8**, 353, 1972.
19. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, **5**, 507, 1969.
20. *В.В.Соболев*, Астрофизика, **3**, 137, 1967.
21. *В.В.Иванов*, в сб. "Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света", под ред. Б.И.Степанова и А.П.Иванова, Изд-во "Наука и Техника", Минск, 1971.
22. *U.Frisch*, *H.Frisch*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **173**, 167, 1975.
23. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **62**, 283, 1985.
24. *G.D.Rybicki*, *D.G.Hummer*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **144**, 313, 1969.
25. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **49**, 115, 1972.
26. *Д.И.Нагирнер*, Итоги Науки и Техники, сер. Астрономия, **22**, 220, Изд-во ВИНИТИ, М., 1983.
27. *В.В.Иванов*, Астрофизика, **6**, 643, 1970.
28. *В.В.Иванов*, в сб.: "Астрономия: традиции, настоящее, будущее", под ред. В.П.Решетникова и Н.Я.Сотниковой, Изд-во СПбГУ, СПб, 2007.
29. *D.G.Hummer*, *P.BKunasz*, Astrophys. J., **236**, 609, 1980.
30. *D.G.Hummer*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **125**, 21, 1962.
31. *D.E.Osterbrock*, Astrophys. J., **135**, 195, 1962.
32. *J.H.Harrington*, Astrophys. J., **176**, 127, 1972.
33. *J.H.Harrington*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **162**, 43, 1973.
34. *J.H.Harrington*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **166**, 173, 1974.
35. *D.A.Neufeld*, Astrophys. J., **350**, 216, 1990.
36. *T.F.Adams*, Astrophys. J., **201**, 350, 1975.
37. *T.F.Adams*, Astrophys. J., **174**, 439, 1972.
38. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, **26**, 157, 1987.
39. *A.Loeb*, *G.Rybicki*, Astrophys. J., **524**, 527, 1999.
40. *H.W.Lee*, *S.-Y.Ahn*, Astrophys. J., **504L**, 61L, 1998.
41. *S.-H.Ahn*, *Y.-W.Lee*, *Y.M.Lee*, Astrophys. J., **554**, 604, 2001.