АСТРОФИЗИКА

ТОМ 52 ФЕВРАЛЬ, 2009 ВЫПУСК 1

К 100-летию со дня рождения академика В.А.Амбарцумяна

МЕТОДЫ АМБАРЦУМЯНА В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 29 октября 2008

Цель настоящей статьи дать представление о методах Амбарцумяна в теории переноса излучения, их применениях и дальнейшем развитии. Большее внимание уделяется двум методам - принципу инвариантности и методу сложения слоев, предложенным Амбарцумяном в 40-е годы прошлого века. Обсуждается их различие от классического подхода решения задач переноса излучения. Из результатов, полученных в дальнейшем другими авторами, упоминается лишь небольшая часть, которая, на наш взгляд, наиболее наглядно раскрывает суть и значение методов Амбарцумяна, их эффективность при решении прикладных задач. Так, например, отдельный раздел посвящается лагранжиановскому формализму в применении к теории переноса и показывается, что принцип инвариантности является частным случаем более общего вариационного принципа, отражающего инвариантность по отношению к трансляционному преобразованию оптической глубины. При изложении метода сложения слоев подчеркивается его общность и та большая роль, которую он сыграл при создании в дальнейшем таких методов теории переноса, как метод инвариантного погружения Беллмана и метод решения задач переноса излучения в неоднородных средах. Показывается, что применение последнего метода позволяет получить ряд новых аналитических результатов. В заключительной части дается небольшая сводка результатов, полученных Амбарцумяном в нелинейной теории переноса, где он одним из первых начал изучение класса многоуровенных задач. Статья призвана также показать место и роль методов Амбарцумяна в теории переноса излучения, которые во многом предопределили развитие указанной теории на долгие годы вперед.

Ключевые слова: *теория переноса излучения:принцип инвариантности: метод сложения слоев:вариационный формализм*

1. *Введение.* Появившиеся в начале прошлого века работы Шустера, Шварцшильда, Милна и Эддингтона положили основу теории звездных атмосфер. Важное место в ней занимало изучение уравнения переноса излучения и его решений в различных формах. Разумеется, исследовались, в первую очередь, наиболее простые и потому грубые модели, в которых среда принималась плоскопараллельной, стационарной, однородной и чисто поглощающей. Последнее предположение существенно упрощает задачу об определении поля излучения в атмосфере, поскольку в этом случае состояние излучающего газа подчиняется равновесным законам Саха и Больцмана при локальных значениях температуры и плотности. В таком приближении,

получившем в дальнейшем название приближения ЛТР - локального термодинамического равновесия, входящая в уравнение переноса функция источника задается законами Кирхгофа-Планка. Положение дел сильно меняется, когда принимается в расчет рассеяние излучения, что представляет особую важность в вопросе о формировании спектральных линий в атмосфере. Теперь состояние излучающего газа зависит не только от локальных значений термодинамических параметров, но и от поля излучения в данной точке, что приводит к установлению взаимосвязи между различными объемами внутри атмосферы. Уравнение переноса излучения в этом случае является интегродифференциальным и его решение, вообще говоря, сталкивается с большими трудностями.

Первые работы в данном направлении, хотя и включали в себя грубые предположения, тем не менее во многом способствовали физическому пониманию изучаемых процессов и стимулировали развитие теории. Наиболее важные статьи в этой области были собраны Мензелом [1]. Развитый в них подход, ставший классическим, заключался в нахождении функции источника как функции от глубины в атмосфере, что позволяло определить поле излучения в ней. В простейших случаях изотропного и монохроматического рассеяния задача математически сводится к решению интегрального уравнения типа Фредгольма с ядром, являющимся интегральной показательной функцией, зависящей от модуля разности аргументов (см. ниже уравнение (16)). После ее решения можно было, в частности, определить интенсивность излучения, выходящего из атмосферы, т.е. величину, непосредственно измеряемую при наблюдениях. Таково было состояние теории в 40-х годах прошлого века, когда появились первые работы Амбарцумяна в данной области.

В противоположность описанному выше общепринятому подходу, Амбарцумяном был предложен новый метод, названный им принципом инвариантности, который позволял найти выходящую интенсивность без предварительного определения светового режима на всех глубинах. Как пишет сам Амбарцумян [2], "...теория в этом случае строится не на интегрировании локальных процессов, а на свойствах инвариантности". Под принципом инвариантности Амбарцумяном подразумевалось такое преобразование исходной атмосферы, которое не влияет на глобальные оптические характеристики среды [2-5]. Очевидно, что при таком определении термин "принцип инвариантности" может употребляться лишь в единственном числе. Применение принципа существенно облегчает решение задач переноса излучения, выявляя с самого начала структуру искомых решений, что, в свою очередь, является весомым подспорьем при определении поля излучения внутри атмосферы. Как было показано в дальнейшем (см. ниже, раздел 3, а также [6]), принцип инвариантности является частным случаем более общего вариационного принципа, связанного с трансляционным преобразованием оптической глубины. Применение данного принципа позволяет вывести для различных величин в различных задачах большое количество важных соотношений, которые иногда бывает возможно написать сразу, на основе простых физических и/или вероятностных соображений. Такие соотношения, вытекающие из принципа инвариантности, могут быть названы *соотношениями инвариантности.*

В результате исследований Амбарцумяна в 1941-1947гг. в области теории переноса излучения был предложен также другой весьма эффективный метод, названный им методом сложения слоев [7] (см. также [8]). Он дает ответ на вопрос, каким образом складываются глобальные оптические характеристики поглощающих и рассеивающих сред (коэффициенты отражения и пропускания) при их объединении. Очевидно, что это достаточно общая постановка вопроса возникает естественным образом, если отказаться от требования, чтобы оптические свойства среды оставались неизменными при добавлении к ней дополнительного слоя. Полученные соотношения выявляют функциональный вид оптических характеристик составной атмосферы, причем что важно, все параметры и функции, описывающие элементарные процессы, играют роль произвольных параметров. Вышедшая в военные годы в Изв. АН АрмССР небольшая работа, посвященная методу сложения слоев, послужила отправным пунктом для возникновения новых направлений в теории переноса, имеющих применение не только в астрофизике, но и в некоторых других разделах физики. Метод дает ключ к решению задач переноса в неоднородных атмосферах, а с другой стороны, явился основой для так называемого метода инвариантного погружения, разработанного за рубежом.

Как для принципа инвариантности, так и для развитого Амбарцумяном метода сложения слоев, характерны математическая элегантность, оригинальность подхода, простота и ясность рассуждений. Как и в других разделах астрофизики, Амбарцумян находил неординарные пути решения весьма сложных и важных проблем. Один из основоположников теории звездных атмосфер Е.А.Милн писал по этому поводу: "Я никогда не мог представить, что теория переноса излучения может достичь такого уровня развития и красоты, каким он стал в руках Амбарцумяна".

Настоящая статья ставит целью дать общее представление о методах Амбарцумяна, об их важности и последующем развитии, при этом она рассчитана на читателя, не обязательно являющегося специалистом в теории переноса излучения. Список приводимой литературы ни в коем случае не претендует на полноту. Из обширной литературы по данной тематике мы ограничились упоминанием лишь тех работ, которые, на наш взгляд, в большей мере расскрывают сущность и важность методов Амбарцумяна.

2. *Принцип инвариантности.* Принцип инвариантности был

сформулирован Амбарцумяном впервые при рассмотрении задачи о диффузном отражении света от полубесконечной атмосферы [3,4]. Соображения, лежащие в его основе, заключаются в очевидном факте, что добавление к такой среде слоя малой оптической толщины $\Delta\tau$, обладающего такими же свойствами, что и исходная атмосфера, не должно изменить ее отражающую способность. Это положение Амбарцумян назвал принципом инвариантности. Отсюда следует, что суммарный вклад процессов, связанных с добавленным слоем, должен равняться нулю.

В трехмерной задаче отражательная способность среды характеризуется функцией отражения $\rho(\eta, \varsigma)$, где ς и η косинусы углов падения и отражения, соответственно. Она вводится таким образом, что величина $r(\eta, \varsigma) = (1/2)\rho(\eta, \varsigma)\varsigma$ определяет интенсивность излучения диффузно отраженного от среды в направлении η, если последняя освещается потоком параллельных

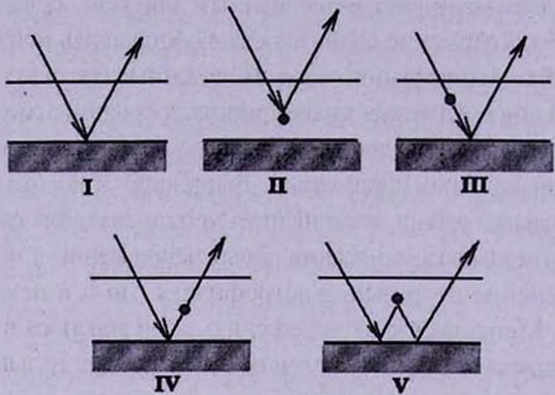

Рис.1. Пять возможных реализаций прохождения излучения через слой $\Delta\tau$.

лучей, равным π, под углом $\arccos\varsigma$. Будем считать, что вероятность переизлучения кванта при элементарном акте рассеяния равна λ. Возможные процессы, имеющие место в слое $\Delta\tau$, схематически изображены на рис.1.

I. Как при падении на среду, так и после отражения от нее, излучение проходит добавленный слой без рассеяний. Вклад такого процесса дается выражением

$$\left(1-\frac{\Delta\tau}{\eta}\right)r(\eta, \zeta)\left(1-\frac{\Delta\tau}{\varsigma}\right).$$

II. Излучение отражается от добавленного слоя. Вклад этого процесса равен

$$\frac{\lambda}{4}\frac{\Delta\tau}{\eta}.$$

III. Излучение рассеивается дополнительным слоем в сторону атмосферы и после отражения от нее проходит слой без рассеяний. Соответствующая интенсивность излучения равна

$$\frac{\lambda}{2}\Delta\tau\int_0^1 r(\eta,\eta')\frac{d\eta'}{\eta'}.$$

IV. Падающее излучение вначале отражается от исходной атмосферы и затем рассеивается дополнительным слоем в заданном направлении. Вклад, соответствующий этому процессу, равен

$$\frac{\lambda}{2}\frac{\Delta\tau}{\eta}\int_0^1 r(\eta',\varsigma)d\eta'.$$

V. Последняя возможность связана с двойным отражением от исходной атмосферы. В этом случае падающее излучение отражается от атмосферы, после чего рассеивается дополнительным слоем обратно и снова отражается от атмосферы. Для такого процесса имеем

$$\lambda\Delta\tau\int_0^1 r(\eta,\eta'')\frac{d\eta''}{\eta''}\int_0^1 r(\eta',\varsigma)d\eta'.$$

Вкладом всевозможных других процессов можно пренебречь, поскольку они являются величинами более высокого порядка малости относительно $\Delta\tau$. С учетом перечисленных процессов условие инвариантности функции отражения полубесконечной атмосферы записывается в виде

$$(\eta+\varsigma)\rho(\eta,\varsigma)=\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)\varphi(\varsigma), \qquad (1)$$

где функция

$$\varphi(\eta)=1+\eta\int_0^1\rho(\eta,\eta')d\eta' \qquad (2)$$

носит название φ - функции Амбарцумяна. Из последних двух соотношений следует, что функция φ удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$\varphi(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\varphi(\eta)\varphi(\eta')}{\eta+\eta'}d\eta', \qquad (3)$$

называемому обычно уравнением Амбарцумяна. Из соотношения (1) явствует, что $\rho(\eta,\varsigma)$ выражается через функцию одной переменной, являясь при этом симметричной функцией своих аргументов. Величина $\eta\rho(\eta,\varsigma)d\eta$ обладает вероятностным смыслом. Она дает вероятность того, что квант, падающий на среду в направлении ς, отразится от нее в интервале направлений η, $\eta+d\eta$.

В той же работе [3] Амбарцумян применяет принцип инвариантности для решения задачи о диффузном отражении и пропускании излучения для среды конечной оптической толщины. В этом случае к одной границе среды добавляется слой толщины $\Delta\tau$, а с другой границы такой же величины слой отнимается. В результате для функций отражения $\rho(\eta,\varsigma)$ и пропускания $\sigma(\eta,\varsigma)$ было получено (для удобства дальнейшего изложения мы пользуемся несколько иными обозначениями)

$$\rho(\eta,\varsigma)=\frac{\lambda}{2}\frac{\varphi(\eta)\varphi(\varsigma)-\psi(\eta)\psi(\varsigma)}{\eta+\varsigma}, \quad \sigma(\eta,\varsigma)=\frac{\lambda}{2}\frac{\psi(\eta)\varphi(\varsigma)-\varphi(\eta)\psi(\varsigma)}{\eta-\varsigma}. \tag{4}$$

Вспомогательные функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ определяются из следующей системы функциональных уравнений

$$\varphi(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\varphi(\eta)\varphi(\eta')-\psi(\eta)\psi(\eta')}{\eta+\eta'}d\eta', \tag{5}$$

$$\psi(\eta)=e^{-\tau_0/\eta}+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\psi(\eta)\varphi(\eta')-\varphi(\eta)\psi(\eta')}{\eta-\eta'}d\eta', \tag{6}$$

где τ_0 - оптическая толщина среды. Указанные функции также носят название функций Амбарцумяна. Разумеется, что как функции отражения и пропускания, так и функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, зависят также от оптической толщины среды, однако, для краткости, эта зависимость среди аргументов не указывается.

Результаты, полученные Амбарцумяном в данной основопологающей работе подкупают своей изящностью и наглядностью. Как уже указывалось, исходным для определения интенсивности выходящего из среды излучения здесь является не уравнение переноса, которое позволяет найти требуемую величину лишь после того, как световой режим найден для всех глубин в атмосфере. Очевидно, что ввиду линейности задачи знание функций отражения и пропускания позволяет определить интенсивность выходящего излучения для любого потока, падающего на среду. С другой стороны, формулы (1) и (4) дают решение не только одной частной задачи о диффузном отражении (для полубесконечной среды) или задачи о диффузном отражении и пропускании (для среды конечной оптической толщины). На самом деле они позволяют выявить структуру глобальных оптических характеристик среды, как таковую, выражая при этом искомые величины через функции одной переменной. Сам подход во многом способствовал нахождению целого ряда важных соотношений, связывающих между собой различные характеристики поля излучения, в наиболее часто встречающихся в астрофизических приложениях задачах теории переноса излучения. Некоторые из них вытекают непосредственно из свойства инвариантности. Такого рода соотношения были получены в разное время рядом авторов (см., например, [6,9-18]).

Следует отметить, что соотношения (1)-(3) Амбарцумяном были получены ранее другим способом при рассмотрении рассеяния света атмосферами планет [19]. Путь, избранный в указанной работе, заключается в формальном дифференцировании исходного интегрального уравнения для функции источника по оптической глубине. С чисто математической точки зрения предложенный путь представляет большую важность, поскольку показывает, каким образом решение интегрального уравнения Фредгольма с разностным ядром может быть сведено к решению функционального уравнения. В этой работе получен и другой важный результат при рассмотрении задачи о распределении энергии по диску Солнца. Было показано, что закон потемнения диска Солнца к его краю задается функцией $\varphi(\eta)$ при $\lambda = 1$, а именно, $I(\eta)/I(0) = \varphi(\eta)$ (см. также [20]), где $I(\eta)$ - интенсивность излучения, наблюдаемого на некотором угловом расстоянии от центра диска, косинус которого равен η.

Точное аналитическое выражение для функции $\varphi(\eta)$ в случае консервативного рассеяния ранее было получено Хопфом ([21], с.105) при рассмотрении проблемы Милна. Для общего случая $\lambda \neq 1$ также было получено явное выражение (см. [22])

$$\varphi(\eta) = \exp\left\{-\frac{\eta}{\pi}\int_0^\infty \ln\left(1 - \lambda\frac{\operatorname{arctg} u}{u}\right)\frac{du}{1+\eta^2 u^2}\right\}. \tag{7}$$

Для численного вычисления функции $\varphi(\eta)$ Амбарцумян в работе [19] пользовался методом итераций применительно к уравнению

$$\varphi(\eta) = \left(\sqrt{1-\lambda} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{\eta'\varphi(\eta')}{\eta+\eta'}d\eta'\right)^{-1}, \tag{8}$$

которое получается из (3) с учетом того, что

$$\int_0^1 \varphi(\eta)d\eta = \frac{2}{\lambda}\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right). \tag{9}$$

Было показано, что при подходящем выборе нулевого приближения указанную функцию можно вычислить с большой точностью для разных значений параметра λ, включая значения, близкие к единице.

И в дальнейшем разные авторы обращались к вопросу об определении функции $\varphi(\eta)$. Простое выражение для приближенного вычисления указанной функции было получено в [9] применением метода дискретных ординат Вика-Чандрасекара

$$\varphi(\eta) = \frac{\prod_{l=1}^{n}(1+\eta/\eta_l)}{\prod_{\alpha=1}^{n}(1+k_\alpha\eta)}, \tag{10}$$

где n - порядок приближения, η_l - нули полинома Лежандра степени n, а величины k_α определяются путем решения характеристического уравнения

$$1 = \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1-k^2\eta_j^2}, \tag{11}$$

при этом a_j - веса квадратурной формулы Гаусса-Лежандра.

Отметим также линейное интегральное уравнение для функции $\varphi(\eta)$, полученное Соболевым [23-25]

$$\varphi(\eta)\left(1-\frac{\lambda}{2}\eta\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right) = 1 - \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\varphi(\eta')}{\eta-\eta'}d\eta' \tag{12}$$

Идея инвариантного поведения глобальных оптических характеристик рассеивающей и поглощающей атмосферы по отношению к добавлению слоя была применена Амбарцумяном также в задаче о диффузии излучения через среду большой оптической толщины [26,27]. Она заключается в том, что при таком изменении среды относительное угловое распределение интенсивности излучения, пропущенного ею, не должно измениться. С учетом процессов, происходящих в дополнительном слое, для интенсивности излучения, пропущенного средой при изотропном рассеянии, было получено

$$I(\eta) = C\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}, \tag{13}$$

где C - некоторая постоянная, а k определяется из уравнения

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}d\eta = 1. \tag{14}$$

При чистом рассеянии ($\lambda = 1$) уравнение (14) дает $k=0$, и тогда

$$I(\eta) = C\varphi(\eta). \tag{15}$$

Таким образом, функция $\varphi(\eta)$ допускает еще одну физическую интерпретацию, связанную с угловым распределением интенсивности излучения, пропущенного оптически толстой атмосферой в отсутствии истинного поглощения. Интересно отметить, что столь простая формула остается действительной и в случае двухчленной индикатрисы рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1\cos\gamma$ при любом значении параметра x_1.

Известно, что во многих астрофизических задачах возникает необходимость определить поле излучения внутри среды. Важным достоинством принципа инвариантности является то, что знание интенсивностей излучения, выходящего из среды, существенным образом упрощает решение задачи о нахождении режима излучения внутри нее (см., например, [23-25]). Так, например, вопрос об определении светового режима в полубесконечной среде, освещаемой извне единичным потоком параллельных лучей под углом $\arccos\varsigma$, сводится (как известно) к решению следующего интегрального уравнения

$$S(\tau,\varsigma) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty E_1(|\tau-\tau'|)S(\tau',\varsigma)d\tau' + \frac{\lambda}{4}e^{-\tau/\varsigma} \tag{16}$$

относительно функции источника. Применение принципа инвариантности позволяет свести вопрос о решении данного уравнения типа Фредгольма с разностным ядром к решению следующего уравнения типа Вольтерра для некоторой вспомогательной функции $\Phi(\tau)$, через которую выражается резольвента уравнения (16)

$$\Phi(\tau) = L(\tau) + \int_0^\tau L(\tau-\tau')\Phi(\tau')d\tau', \tag{17}$$

где

$$L(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \varphi(\varsigma)e^{-\tau/\varsigma}\frac{d\varsigma}{\varsigma}. \tag{18}$$

Для функции $\Phi(\tau)$ в [28] было получено явное выражение.

Для иллюстрации здесь мы ограничились рассмотрением простейшего случая монохроматического рассеяния, однако описанная картина и выводы остаются в силе и при гораздо более общей постановке задачи переноса. С сугубо математической точки зрения принцип инвариантности Амбарцумяна может рассматриваться как способ сведения краевой задачи, формулируемой обычно для функции источника, к решению задачи с начальными условиями (задача Коши).

Первые работы по принципу инвариантности относились к монохроматическому изотропному рассеянию. Однако было совершенно очевидно, что принцип может применяться и при более общих предположениях относительно элементарного акта рассеяния. Поэтому уже в работе [29] Амбарцумян рассматривает задачу диффузного отражения света от полубесконечной плоскопараллельной атмосферы при анизотропном рассеянии, причем индикатриса рассеяния предполагалась произвольной. В этой работе важным является применение предложенного ранее им в [30,31] разложения индикатрисы рассеяния $x(\gamma)$ (γ - угол рассеяния) в ряд по полиномам Лежандра

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\cos\gamma), \tag{19}$$

или с учетом теоремы сложения сферических функций

$$x(\eta, \eta', \varphi - \varphi') = \sum_{m=0}^{\infty}\cos m(\varphi - \varphi')\sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\eta'), \tag{20}$$

где постоянные c_{im} простым образом выражаются через коэффициенты x_i. В этом случае разложение, аналогичное (20), имеет место и для функции отражения

$$\rho(\eta, \eta', \varphi - \varphi') = \sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(\eta, \eta')\cos m(\varphi - \varphi'). \tag{21}$$

Решение задачи теперь выражается через функции $\varphi_i^m(\eta)$

$$\rho_m(\eta, \eta') = \frac{\lambda}{4}\sum_{i=m}^{\infty}(-1)^{i+m} c_{im}\frac{\varphi_i^m(\eta)\varphi_i^m(\eta')}{\eta + \eta'}, \tag{22}$$

которые определяются из системы функциональных уравнений

$$\varphi_i^m(\eta) = P_i^m(\eta) + 2\frac{(-1)^{i+m}}{2 - \delta_{0m}}\int_0^1 \rho_m(\eta, \eta') P_i^m(\eta') d\eta', \tag{23}$$

где δ_{km} - символ Кронекера.

В этой же работе в качестве иллюстрации Амбарцумян рассматривает два частных случая, двухчленной индикатрисы и релеевского закона рассеяния, представляющие особую важность для астрофизики.

Полученные Амбарцумяном результаты развивались в дальнейшем многими авторами. Так, например, в упомянутых выше двух частных задачах Чандрасекар использовал отличающееся от (21) представление искомой функции отражения, в результате чего вопрос сводился к решению уравнений типа (см. [9])

$$H(\eta)=1+\eta\int_0^1\frac{H(\eta)H(\eta')}{\eta+\eta'}\Psi(\eta')d\eta'. \tag{24}$$

Например, в случае двухчленной индикатрисы рассеяния

$$x(\cos\gamma)=1+x_1\cos\gamma \tag{25}$$

(γ - угол рассеяния), или

$$x(\eta,\varphi;\eta',\varphi')=1+x_1\left[\eta\eta'+\left(1-\eta^2\right)^{1/2}\left(1-\eta'^2\right)^{1/2}\cos(\varphi-\varphi')\right] \tag{26}$$

Чандрасекаром было показано, что искомую функцию отражения можно представить в виде

$$\rho(\eta,\varphi;\eta_0,\varphi_0)=\rho^{(0)}(\eta,\eta_0)+x_1\left(1-\eta^2\right)^{1/2}\left(1-\eta_0^2\right)^{1/2}\rho^{(1)}(\eta,\eta_0)\cos(\varphi-\varphi_0), \tag{27}$$

причем для вспомогательных функций $\rho^{(0)}(\eta,\eta_0)$ и $\rho^{(1)}(\eta,\eta_0)$ получаются раздельные уравнения. Последние, в свою очередь, сводятся к решению уравнений типа (24). Уравнение (24), как нетрудно видеть, отличается от (3) лишь тем, что под знаком интеграла входит так называемая характеристическая функция $\Psi(\eta)$, представляющая собой некоторый полином четной степени. Здесь мы воспользовались обозначением $H(\eta)$, введенным Чандрасекаром для функции Амбарцумяна. Аналогичным образом в случае среды конечной оптической толщины для функций φ и ψ Чандрасекаром были введены обозначения X и Y, которые используются в основном в зарубежной литературе (см. [9]).

Очевидно, что сформулированный Амбарцумяном принцип является достаточно общим, поскольку его применимость не зависит от исходных предположений относительно элементарного акта рассеяния, геометрии среды и т.д. Хорошо известно, что многократное рассеяние света в частотах линий, образующихся в различных средах, изучаемых в астрофизике, сопровождается перераспределением излучения по частотам и направлениям. В общем случае частичного перераспределения возникаемая задача переноса во многом аналогична задаче анизотропного рассеяния, рассмотренной Амбарцумяном в [29]. Особенно отчетливо эта аналогия прослеживается, когда применяются билинейные разложения функций перераспределения. Так, например, как было показано в [33], в простейшем случае чисто допплеровского закона перераспределения r_1 [32,20], имеет место разложение

$$r_1(x',x,\gamma)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sin\gamma}\exp\left(-\frac{x^2+x'^2-2xx'\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\cos^k\gamma\,\alpha_k(x)\alpha_k(x'), \tag{28}$$

где x, x' - так называемые безразмерные частоты падающего и рассеянного квантов, измеряемые смещением от центральной частоты линии в единицах допплеровской ширины, и $\alpha_k(x) = \left(2^k \pi^{1/2} k!\right)^{-1/2} \exp\left(-x^2\right) H_k(x)$ - ортонормированная с весом $\exp\left(x^2\right)$ система функций, выражающаяся через полиномы Эрмита $H_k(x)$. Для усредненного по направлениям закона перераспределения Хаммером было получено

$$r_I(x', x) = \int\limits_{\max(|x'|,\,|x|)}^{\infty} \exp\left(-u^2\right) du = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \alpha_{2k}(x') \alpha_{2k}(x), \tag{29}$$

где $A_k = 1/(2k+1)$. В последнем случае применением принципа инвариантности одномерная задача о диффузии излучения в линии сводится к решению системы функциональных уравнений относительно функций $\varphi_k(x)$

$$\varphi_k(x) = \alpha_{2k}(x) + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(x')}{\alpha(x) + \alpha(x')} \alpha_{2k}(x') dx', \tag{30}$$

где $\alpha(x)$ - профиль коэффициента поглощения. Она является естественным обобщением уравнения Амбарцумяна на случай частичного перераспределения по частотам. Использование разложений типа (29) и (30), полученные и для других законов перераспределения, во многом облегчают решение соответствующих задач переноса [34-38]. Квазианалитические и численные методы решения таких задач были разработаны в [39,40]. Заметим, что если в разложениях (28) и (29) ограничиться одним лишь первым слагаемым, то приходим к весьма распространенному в астрофизических приложениях приближению полного перераспределения по частотам. Аналитическая теория вместе с асимптотическими и численными методами для этого случая была развита Ленинградской школой астрофизики во главе с В.В.Соболевым [8,41,42].

В астрофизических задачах часто возникает необходимость в оценке различных статистических средних величин, описывающих процесс диффузии излучения в атмосфере. Особенно важно составить представление о среднем числе рассеяний, испытываемых квантом в результате многократного рассеяния. В одной из своих ранних работ Амбарцумян [43] (см. также [4]) для определения указанной величины получил формулу

$$N = \lambda \frac{\partial \ln I}{\partial \lambda}, \tag{31}$$

где I - интенсивность излучения.

В серии работ [44-47] (см. также [48]) было показано, что применение принципа инвариантности Амбарцумяна является эффективным способом для определения среднего числа рассеяний, а также среднего времени пребывания кванта в среде. В частности, было получено, что формула (31) справедлива при оценке среднего числа рассеяний лишь "движущихся" квантов, т.е. тех, которые не подверглись истинному поглощению.

Из других применений принципа инвариантности следует отметить также рассмотренную Амбарцумяном в [49,50] задачу о флуктуациях яркости Млечного Пути при допущении, что поглощающие облака образуют однородный слой. В дальнейшем теория в данном направлении получила свое развитие в ряде работ других авторов.

Предложенный Амбарцумяном принцип инвариантности сыграл важную роль в теории переноса излучения. Особенно эффективным оказывалось его применение при рассмотрении относительно сложных задач теории переноса излучения. Выдвигалась идея о том (см. [11]), что указанную теорию можно построить таким образом, чтобы она основывалась на принципе инвариантности, а уравнение переноса и соотношения инвариантности непосредственно вытекали из нее. В дальнейшем по мере развития теории возможность такого подхода стала очевидной, применение же самого подхода оказалось в некоторых случаях более предпочтительным. Его преимущество обусловлено глубоким интуитивным содержанием принципа инвариантности и существованием тесной связи с характерными особенностями рассматриваемой физической задачи, свойством симметрии, граничными и начальными условиями. Помимо того из физики хорошо известна связь между принципами инвариантности и законами сохранения. Ввиду важности данного вопроса, рассмотрим его более подробно на примере задачи переноса излучения в плоскопараллельной атмосфере [6].

3. ***Вариационный формализм.*** Для удобства введем в рассмотрение функцию $P(\tau,\eta,\mu)$, характеризующую вероятность того, что фотон, движущийся на глубине τ в направлении η, выйдет из среды под углом $\arccos\mu$ (углы отсчитываются от внешней нормали). Уравнения переноса для данной величины могут быть записаны в виде.

$$\pm\eta\frac{dP(\tau,\pm\eta,\mu)}{d\tau}=-P(\tau,\pm\eta,\mu)+\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}P(\tau,\eta',\mu)d\eta'. \tag{32}$$

Из уравнений (32) легко получить

$$\eta^2\frac{d^2\Phi}{d\tau^2}=-\Phi(\tau,\eta,\mu)-\lambda\int_{0}^{1}\Phi(\tau,\eta',\mu)d\eta', \tag{33}$$

где введено обозначение $\Phi(\tau,\eta,\mu)=P(\tau,+\eta,\mu)+P(\tau,-\eta,\mu)$..

Современные методы функционального анализа позволяют установить, что для системы уравнений (32) или уравнения (33) существует вариационный принцип [51,52]. Вывод законов сохранения опирается на теорему Нетера [53] и ее обобщении на случай интегродифференциальных уравнений, данном в [54]. Выражение для плотности Лагранжиана L, соответствующей уравнению (33), было получено в [55]

$$L(\Phi,\Phi',\tau,\eta,\mu)=\Phi^2+(\eta\Phi')^2-2\Phi U, \tag{34}$$

где

$$U(\tau,\mu)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1\Phi(\tau,\eta',\mu)\,d\eta'. \tag{35}$$

В соответствии с [54] уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial\Phi}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\Phi'}+\lambda\int_0^1\frac{\partial L}{\partial U}\,d\eta'=0. \tag{36}$$

Легко убедиться, что подставляя выражение для Лагранжиана (34) в (36), приходим к уравнению переноса (33).

Весьма существенно, что как уравнение переноса (33), так и плотность Лагранжиана (34), не зависят явным образом от τ. Другими словами, их форма инвариантна относительно инфинитезимального преобразования

$$\tau\to\tau'=\tau+\delta\tau,\quad \eta=\eta',\quad \mu=\mu', \tag{37}$$

где $\delta\tau$ является произвольно малой функцией от τ. Отсюда вытекает, что преобразование (37), т.е. трансляция оптической глубины, является преобразованием симметрии для системы (32) и потому допускает закон сохранения вида

$$\int_0^1\left[L-\frac{\partial L}{\partial\Phi}\Phi'\right]d\eta=\text{const}, \tag{38}$$

который ввиду (34) принимает вид

$$\int_0^1\left[\Phi^2(\tau,\eta,\mu)-\eta^2\Phi'^2(\tau,\eta,\mu)-2U(\tau,\mu)\Phi(\tau,\eta,\mu)\right]d\eta=\text{const}, \tag{39}$$

или

$$\int_0^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau,-\varsigma,\mu)\,d\varsigma=\frac{\lambda}{4}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)\,d\varsigma\right)^2+\text{const}. \tag{40}$$

Это соотношение является, по сути дела, прототипом Q - интеграла, полученного Райбики в [56]. В данной работе высказывалось предположение о наличии связи указанного интеграла с принципом инвариантности, однако в ней она не была установлена. Были также попытки выявить физический смысл подобных соотношений [57].

Из вышеизложенного нетрудно заключить, что интеграл (40) по своему содержанию является аналогом закона сохранения импульса в механике, вытекающего из трансляционного преобразования осей.

Для полубесконечной атмосферы $P(\tau,\pm\varsigma,\mu)\to 0$ при $\tau\to\infty$, так что $\text{const}=0$. Для этого же случая легко вывести более общее соотношение, если рассмотреть две проблемы, различающиеся друг от друга лишь значением параметра μ

$$\int_0^1 P(\tau,\varsigma,\mu)P(\tau,-\varsigma,\mu')\,d\varsigma=\frac{\lambda}{2}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu)\,d\varsigma\right)\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\varsigma,\mu')\,d\varsigma\right). \tag{41}$$

Данное соотношение впервые было получено в [17] двумя путями, в частности, на основе несложных физических рассуждений. Там же показано, что если положить в (41) $\tau = 0$, то приходим к уравнению (1), полученному Амбарцумяном на основе сформулированного им принципа инвариантности. Такого типа соотношения принято называть билинейными (см., [56], а также [6,17], [43]). Полученный интеграл (41), очевидно, может рассматриваться как обобщение уравнения Амбарцумяна (1) на случай всех глубин. Он имеет место всюду, где λ не меняется с глубиной. Более общее по сравнению с (41) соотношение может быть получено, если рассматривать две различные глубины ([6,13])

$$\int_0^1 P(\tau, \varsigma, \mu) P(\tau', -\varsigma, \mu') d\varsigma = \frac{\lambda}{2}\left(\int_{-1}^{1} P(\tau, \varsigma, \mu) d\varsigma\right)\left(\int_{-1}^{1} P(\tau', \varsigma, \mu') d\varsigma\right). \qquad (42)$$

Билинейные интегралы такого типа называются двуточечными.

Применение вариационного формализма позволяет не только прояснить физическую суть принципа инвариантности Амбарцумяна, но и получить наряду с многими известными результатами, большое количество новых соотношений, имеющих важное теоретическое и прикладное значение. Оно позволяет выявить ряд статистических закономерностей, описывающих процесс диффузии излучения в атмосфере ([17,58]).

Некоторые из ранее полученных соотношений обладают достаточно очевидным физическим или вероятностным смыслом и, как уже указывалось, были записаны непосредственно на основе простых соображений. Однако они все являются следствием одного и того же вариационного принципа (или принципа инвариантности), отражающего инвариантность по отношению к трансляционному преобразованию оптической глубины, и потому сами не могут быть признаны принципами инвариантности.

Используя вариационный формализм, можно вывести квадратичные и билинейные интегралы для различных наиболее часто встречающихся в астрофизике задач теории переноса в однородной атмосфере. Как было показано в [6], существует группа задач, которые могут быть сведены к так называемой задаче без источников (source-free problem). В эту группу входят: задача Милна, задача о диффузном отражении (и пропускании, в случае среды конечной толщины), а также задачи при экспоненциальном и полиномиальном законах распределения источников энергии внутри атмосферы. Частным и важным случаем последнего типа задач является задача о переносе излучения в изотермической атмосфере (или в атмосфере с равномерным распределением источников энергии). Указанная группа задач характеризуется по крайней мере следующими тремя особенностями. Во-первых, принцип инвариантности позволяет вывести билинейные соотношения, связывающие между собой решения вышеперечисленных задач. Если задача может быть сформулирована и для атмосферы конечной оптической толщины, то ее решение удается связать с решением соответствующей задачи в полубесконечной атмосфере. Наконец важной особенностью данной группы задач является тот факт, что знание φ - функции Амбарцумяна позволяет свести их решение к уравнению типа Вольтерра (или к задаче с начальными условиями) [6]

$$S(\tau) = \int_0^\tau L(\tau - t) S(t) dt + \psi(\tau), \tag{43}$$

где S - функция источников и

$$L(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\eta) e^{-\tau/\eta} d\eta . \tag{44}$$

Что касается функции $\psi(\tau)$, то она равна $(\sqrt{3}/4)F$ для задачи Милна, $(\lambda/2)\varphi(\mu)\exp(-\tau/\mu)$ - для задачи о диффузном отражении от полубесконечной атмосферы, $\varphi(1/m)\exp(-m\tau)$ - для экспоненциальных источников типа $\exp(-m\tau)$, $B\sqrt{1-\lambda}$ - для изотермической атмосферы. Явные выражения для $\psi(\tau)$ могут быть записаны и в случае первичных источников энергии, меняющихся с глубиной по полиномиальному закону. Отметим также, что если источники меняются по произвольному закону $g(\tau)$, то функция $\psi(\tau)$ находится из уравнения

$$\psi(\tau) = \int_\tau^\infty L(t - \tau) \psi(t) dt + g(\tau), \tag{45}$$

и тем самым задача переноса излучения сводится к решению системы уравнений (43), (45) (см., например, [59,60]).

В заключение настоящего раздела следует отметить попытку применения принципа инвариантности к неоднородным атмосферам [61]. В этом случае приходится ввести новый параметр, появляющийся, при "усечении" неоднородной атмосферы, как это предсказывает теория композитных вариационных принципов [62].

4. *Метод сложения слоев.* Как уже указывалось, ключевым условием при сложении (или вычитании) слоев в формулировке принципа инвариантности являлось то, что совершаемое преобразование исходной среды не должно менять ее глобальных оптических характеристик. Если отказаться от этого условия, то возникает естественный вопрос об установлении правила, которому должны подчиняться данные характеристики при таком преобразовании среды. Ответ на него был дан Амбарцумяном в его основополагающей работе [7] (см. также [8]), в которой был предложен метод, известный как метод сложения слоев. Значение данной работы исключительно велико, ибо, как мы убедимся ниже, многие методы, предложенные в разное время разными авторами, так или иначе опираются на ее результаты.

Говоря о предпосылках метода, следует отметить, что идея сложения слоев, насколько нам известно, впервые использовалась Стоксом в [63] при изучении оптических свойств связки одинаковых стеклянных пластин (сравнительное обсуждение указанной работы дается в [64]). Из последующих работ в разных областях науки следует отметить работу [65], где были получены дифференциальные уравнения для коэффициентов отражения и пропускания среды конечной толщины (см. ниже уравнения (49), (52)).

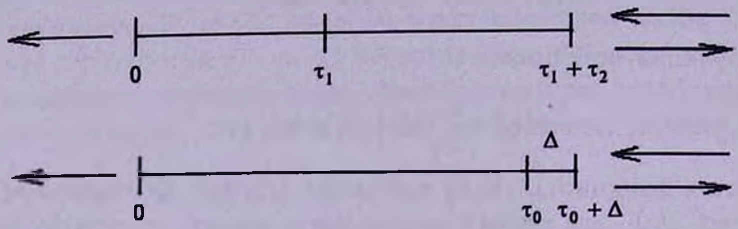

Рис.2. Перенос излучения в атмосфере, состоящей из двух компонентов.

В вышеупомянутой работе [7] Амбарцумяном рассматривается составная однородная рассеивающая и поглощающая атмосфера с оптической толщиной τ_0, которая образуется в результате сложения двух сред, каждая из которых имеет толщину, соответственно τ_1 и τ_2 (см. рис.2). На основе несложных рассуждений для одномерной задачи им были получены функциональные соотношения, связывающие между собой коэффициенты пропускания q и отражения r суммарной атмосферы, с теми же коэффициентами составляющих ее сред

$$q(\tau_1+\tau_2)=\frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{1-r(\tau_1)r(\tau_2)}, \tag{46}$$

$$r(\tau_1+\tau_2)=r(\tau_2)+\frac{r(\tau_1)q^2(\tau_2)}{1-r(\tau_1)r(\tau_2)}. \tag{47}$$

Указанные соотношения принято называть законами сложения для коэффициентов отражения и пропускания. Заметим, что величины q и r обладают вероятностным смыслом и могут быть истолкованы, соответственно, как вероятности прохождения и отражения фотона, падающего на среду.

Если заменить τ_2 бесконечно малой величиной Δ (рис.2, внизу) и перейти к пределу при $\Delta\to 0$, будем иметь

$$\frac{dq}{d\tau_0}=-\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)q(\tau_0)+\frac{\lambda}{2}q(\tau_0)r(\tau_0), \tag{48}$$

$$\frac{dr}{d\tau_0}=\frac{\lambda}{2}-(2-\lambda)r(\tau_0)+\frac{\lambda}{2}r^2(\tau_0). \tag{49}$$

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений удовлетворяет начальным условиям $q(0)=1$, $r(0)=0$. Отсюда вытекает интересная зависимость между коэффициентами отражения и пропускания

$$1+r^2(\tau_0)+\frac{2(2-\lambda)}{\lambda}r(\tau_0)=q^2(\tau_0), \tag{50}$$

поэтому альтернативная форма уравнения (49) типа Риккати имеет вид

$$\frac{dr}{d\tau_0}=\frac{\lambda}{2}q^2(\tau_0). \tag{51}$$

Система уравнений (48), (49) или (48), (51) решается без труда:

$$r(\tau_0) = r_0 \frac{1 - e^{-2k\tau_0}}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau_0}}, \quad q(\tau_0) = \left(1 - r_0^2\right) \frac{e^{-k\tau_0}}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau_0}}, \tag{52}$$

где $k = (\lambda/4)\left(1 - r_0^2\right)/r_0$, а r_0 представляет собой коэффициент отражения от полубесконечной атмосферы, значение которого определяется из уравнения (50) при $q=0$. Идея данной работы затем была использована Амбарцумяном при рассмотрении более общей задачи о переносе излучения в одномерной анизотропной среде [66].

Таким образом, в этих работах впервые было рассмотрено сложение слоев произвольной оптической толщины и установлен закон, позволяющий определить глобальные оптические свойства составной атмосферы по известным характеристикам составляющих слоев. Благодаря своей общности данный закон явился основой не только для различного рода обобщений, но и положил начало развитию ряда новых методов в теории переноса излучения. Некоторые исследования, проведенные в этой области, являются, по сути дела, не чем иным, как разработкой частных случаев закона сложения слоев. Так, если в качестве одного слоя взять полубесконечную атмосферу, а другого - бесконечно тонкий слой, то приходим к рассмотренной в предыдущем разделе задаче, позволяющей сформулировать принцип инвариантности. Если бесконечно тонкий слой добавляется к слою конечной оптической толщины, то искомые оптические характеристики указанного слоя находятся как функции оптической толщины. Тем самым задача оказывается как бы "погруженной" в семейство аналогичных задач, различающихся друг от друга лишь значением оптической толщины. Такой подход на случай трехмерной атмосферы был обобщен Чандрасекаром в [9]. Он лежит в основе метода "инвариантного погружения", развитого Беллманом и его сотрудниками (см., например, [67,68]).

Наконец, метод сложения слоев Амбарцумяна играет важную роль при решении задач переноса излучения в неоднородных атмосферах. В этом случае среда дробится на такое количество слоев, чтобы каждый из них мог считаться однородным, и многократно примененяются формулы сложения (46), (47) (см., например, [69,18,70]). Обращает на себя внимание тот факт, что при выводе формул для коэффициентов отражения и пропускания потоки излучения, появляющиеся на стыке смежных слоев, исключаются. Тем самым при каждом применении формул сложения приходится иметь дело лишь с интенсивностями на границах составной атмосферы. Эта особенность отмечается в некоторых работах [71-73], в которых формулы сложения Амбарцумяна рассматриваются в случае, когда составляющие слои могут быть неоднородными. В них закон сложения поглощающих и рассеивающих слоев называется "звездочным произведением" (star product).

Как было показано в работах [70,74], в случае изотропной, но неоднородной атмосферы вступает в силу, так называемый, закон полярности, заключающийся в том, что теперь среда характеризуется не двумя, а тремя глобальными оптическими параметрами - одним коэффициентом пропускания и двумя коэффициентами отражения (для каждого из границ). Если складываются такие атмосферы, то вместо (46), (47) имеет место

$$q(\tau_1+\tau_2)=\frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{1-r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)}, \tag{53}$$

$$r(\tau_1+\tau_2)=r(\tau_2)+\frac{r(\tau_1)q^2(\tau_2)}{1-r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)}, \tag{54}$$

где $\bar{r}$ - коэффициент отражения от соответствующего слоя со стороны, противоположной направлению падающего излучения (на рис.2 - слева). При написании формул (53), (54) учтено, что $q=\bar{q}$. Формула сложения для величины $\bar{r}(\tau_1+\tau_2)$ получается из (54) простой перестановкой индексов.

В работах Амбарцумяна [7,66] было обращено внимание на правило сложения величины, обратной коэффициенту пропускания. В дальнейшем им пользовались и в других разделах физики [75,76]. В последней из этих работ было показано, что нелинейную систему уравнений типа (48), (49) для неоднородной атмосферы можно свести к решению системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, если помимо величины $P(\tau_0)=1/q(\tau_0)$ ввести в рассмотрение величину $S(\tau_0)=r(\tau_0)/q(\tau_0)$. Применительно к неоднородной атмосфере, в которой от глубины зависит вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния, это дает (см. [70,74])

$$\frac{dP}{d\tau_0}=\left[1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right]P(\tau_0)-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}S(\tau_0), \tag{55}$$

$$\frac{dS}{d\tau_0}=\frac{\lambda(\tau_0)}{2}P(\tau_0)-\left[1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right]S(\tau_0), \tag{56}$$

с начальными условиями $P(0)=1$, $S(0)=0$. В указанных работах [70,74] показано, что, как это следует из (55), (56), функции P и S могут быть определены из отдельных уравнений

$$\frac{d^2P}{d\tau_0^2}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{dP}{d\tau_0}-\left(1-\lambda+\frac{\lambda'}{\lambda}\right)P(\tau_0)=0, \tag{57}$$

$$\frac{d^2S}{d\tau_0^2}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{dS}{d\tau_0}+\left(1-\lambda+\frac{\lambda'}{\lambda}\right)S(\tau_0)=0 \tag{58}$$

при начальных условиях $P(0)=1$, $P'(0)=1-\lambda(0)/2$ и $S(0)=0$, $S'(0)=\lambda(0)/2$. Если явный вид функциональной зависимости λ от τ_0 известен, то система уравнений (55), (56) (или уравнения (57), (58)) легко решается с помощью одной из вычислительных схем, существующих для задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений. В некоторых частных случаях уравнения (57), (58) превращаются в уравнения известных типов, решения которых записываются в явном виде и выражаются через элементарные и специальные функции. Знание функций P и S, а следовательно и коэффициентов отражения и пропускания, для семейства атмосфер с различными оптическими толщинами позволяет легко, не решая каких-либо новых уравнений, определить режим излучения внутри той или иной среды фиксированной толщины. Очевидно, что описанный подход пригоден и в трехмерной задаче, в которой, однако, роль $P(\tau_0)=1/q(\tau_0)$ будет играть оператор $q^{-1}(\tau_0)$.

Спустя много лет, в середине 60-х годов, Амбарцумян вновь обращается к теории переноса излучения. Предметом его исследований стали нелинейные задачи, в которых учитывалось влияние поля излучения в среде на оптические свойства среды. Это весьма сложные и вместе с тем важные с точки зрения астрофизики задачи. Эффект нелинейности проявляется уже в случае одной спектральной линии, когда плотность излучения сравнительно велика и важную роль начинают играть процессы вынужденного излучения. В простейшем случае чистого рассеяния в одномерной атмосфере для коэффициента пропускания вместо обычного выражения $q=1/[1+(\tau/2)]$ было получено [77-80]

$$q=\frac{1+\alpha F}{1+\dfrac{\tau}{2}+\alpha F}, \tag{59}$$

где F - интенсивность потока, падающего на среду, $\alpha=(1/a)(1+g_2/g_1)$, g_1 и g_2 - статистические веса, соответственно, нижнего и верхнего уровней, $a=8\pi h\nu^3/c^2$ - планковский множитель. Величина τ представляет собой предельное значение оптической толщины среды, соответствующее случаю, когда все атомы находятся в нижнем состоянии. Введение предельной оптической толщины в нелинейных задачах обусловлено тем, что значения реальных оптических толщин зависят от падающих на среду потоков излучения и должны быть определены в результате решения задачи.

В упомянутых выше работах Амбарцумян исследует возможность обобщения метода сложения слоев на случай нелинейных задач. Было показано, в частности, что вопрос о нахождении интенсивности излучения, выходящего из конечной среды, сводится теперь к решению квазилинейного уравнения в частных производных, в котором помимо производной по предельной оптической толщине участвует также производная по интенсивности падающего на среду потока.

Важное место в нелинейной теории переноса занимают так называемые многоуровенные задачи, когда в процессе диффузии излучения в среде происходит перераспределение излучения между различными линиями. Одна простейшая такая задача была рассмотрена Амбарцумяном в [81] (см. также [78-80]). Полагалось, что среда состоит из атомов, обладающих тремя уровнями, причем переходы между нижними двумя уровнями пренебрегались. Было показано, что в зависимости от величин падающих на среду потоков, в одной из линий возможно просветление среды. Подход примененный при рассмотрении данной задачи заключался в том, что поле излучения, а следовательно и степень возбуждения в среде, сначала определяется в рамках обычной линейной теории для любого значения реальной оптической толщины, а затем последняя находится как функция от предельной оптической толщины и падающего излучения. Этот подход был назван Амбарцумяном методом самосогласованных оптических глубин. Что касается самой задачи, то при более общих предположениях она была рассмотрена в [82,83], однако применением принципа инвариантности. Позднее для решения многоуровенных задач применялся метод сложения слоев (см. [84,85]), в результате чего был разработан удобный алгоритм для численных расчетов.

5. *Заключение.* Методы Амбарцумяна сыграли большую роль в развитии теории переноса излучения. Обладая глубоким физическим содержанием, принцип инвариантности и метод сложения слоев оказались чрезвычайно гибкими в применениях и эффективными при численных расчетах. Они с успехом применялись не только в астрофизике, но и в других разделах физики (теория переноса нейтронов, теория газов и т.д.) и математики (дифференциальные уравнения, теория ветвящихся процессов, стохастическая геометрия, динамическое программирование), стимулируя при этом появление новых методов. В астрофизических задачах выгода от применения методов Амбарцумяна оказывалась тем внушительнее, чем сложнее были рассматриваемые задачи (анизотропное рассеяние, рассеяние с частичным перераспределением излучения по частотам и направлениям, комптоновское рассеяние на свободных электронах, нестационарные задачи, рассеяние излучения в средах со сложной геометрией и т.д.). Вместе с тем, как отмечал сам Амбарцумян, предложенные им методы являются лишь приемами для решения трудных задач теоретической астрофизики и потому могут плодотворно развиваться в тесном взаимодействии с другими приемами и способами решения [2]. На наш взгляд методы Амбарцумяна будут продолжать развиваться, расширяя одновременно сферу своего применения.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

AMBARTSUMIAN'S METHODS IN THE RADIATIVE TRANSFER THEORY

A.G.NIKOGHOSSIAN

The goal of the paper is to gain some insight into Ambartsumian's methods in the radiative transfer theory, into their applications and further development. More attention is given to two methods - the principle of invariance and the method of addition of layers, proposed by Ambartsumian in the 40-ies of the last century. The difference of these methods from the classical ones for solving the transfer problems is discussed. From the results obtained later by other authors, we mention only a small part which more visually, in our opinion, reveal the essence and importance of Ambartsumian's methods as well as their efficiency in applications. For instance, separate section is devoted to application of the Lagrangian formalism to the transfer theory, in which the invariance principle is shown to be a special case of the more general variational principle stating the invariance with respect to the translational transformation of the optical depth. Discussing the method of addition of layers, we indicate its generality and the large role it played in developing in future other methods of the transfer theory such as Bellman's invariant imbedding and the method for solution of the radiation transfer problems in inhomogeneous media. It is shown that application of the last of these methods allows to derive a number of new analytical results. In the final part we summarize Ambartsumian's results in the non-linear transfer theory where he was one of the pioneers in studying the class of the multilevel problems. The paper is aimed also at showing the place and the role of Ambartsumian's methods in the radiative transfer theory which in many respects predetermine the progress of this theory for many long years afterwards.

Key words: *radiative transfer theory:invariance principle:method of addition of layers:variational formalism*

ЛИТЕРАТУРА

1. *D.Menzel*, (Ed.), Selected Papers on the Transfer of Radiation, New York, Dover, 1966.
2. *В.А.Амбарцумян*, Тр. симпоз. "Принцип инвариантности и его приложения", Изд. АН АрмССР, стр.9, 1980.
3. *В.А.Амбарцумян*, ДАН СССР, **38**, 257, 1943.
4. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
5. *V.A.Ambartsumian*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., **18**, 1, 1980.
6. *A.G.Nikoghossian*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **61**, 345, 1999.

7. *В.А.Амбарцумян*, Изв. АН АрмССР, №1-2, 1944.
8. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
9. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, изд. ИЛ, М., 1953.
10. *Н.Б.Енгибарян*, *М.А.Мнацаканян*, ДАН СССР, **217**, 533, 1974.
11. *R.W.Preisendorfer*, Hydrologic Optic, vol. IV, U.S. Dept. of Commerse, Honolulu, Hawaii, 1976.
12. *G.B.Rybicky*, Astrophys. J., **213**, 165, 1977.
13. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **23**, 612, 1978.
14. *О.В.Пикичян*, Тр. симп. "Принцип инвариантности и его приложения", Изд. АН АрмССР, стр.88, 1980.
15. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **38**, 577, 1995.
16. *R.A.Krikorian*, *A.G.Nikoghossian*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, **56**, 465, 1996.
17. *A.G.Nikoghossian*, Astrophys. J., **483**, 849, 1997.
18. *E.G.Yanovitskij*, Light Scattering in Inhomogeneous Atmospheres, Springer, 1997.
19. *В.А.Амбарцумян*, Астрон. ж., **19**, 30, 1942.
20. *D.Mihalas*, Stellar Atmospheres, Freeman & Co., San-Francisco, 1970.
21. *E.Hopf*, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge Univ. Press, 1934.
22. *В.А.Фок*, Мат. сб., **14**, №1,2,3, 1944.
23. *В.В.Соболев*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, **11**, 39, 1958.
24. *В.В.Соболев*, АЖ, **36**, 573, 1959.
25. *В.В.Соболев*, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1985.
26. *В.А.Амбарцумян*, Уч. Зап. ЛГУ, вып. 11, 1941.
27. *В.А.Амбарцумян*, ДАН СССР, **43**, 106, 1944.
28. *И.Н.Минин*, ДАН СССР, **120**, 63, 1958.
29. *В.А.Амбарцумян*, ЖЭТФ, **13**, 323, 1943.
30. *В.А.Амбарцумян*, Труды астрон. обс. ЛГУ, **12**, 64, 1941.
31. *В.А.Амбарцумян*, Изв. АН СССР, сер. Геогр и геофиз., N3, 97, 1942.
32. *D.G.Hummer*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **145**, 95, 1969.
33. *А.Г.Никогосян*, ДАН СССР, **235**, 786, 1977.
34. *А.Г.Никогосян*, *Г.А.Арутюнян*, Астрофизика, **14**, 393, 1978.
35. *A.G.Nikoghossian*, *H.A.Haruthyunian*, Astrophys. Space Sci., **64**, 285, 1979.
36. *А.Г.Никогосян*, *Г.А.Арутюнян*, Тр. симп. "Принцип инвариантности и его приложения", Изд. АН АрмССР, 232, 1980.
37. *Г.А.Арутюнян*, *А.Г.Никогосян*, Тр. симп. "Принцип инвариантности и его приложения", Изд. АН АрмССР, 431, 1980.
38. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **50**, 392, 2007.
39. *А.Г.Никогосян*, *Г.А.Арутюнян*, ДАН СССР, **229**, 583, 1976.
40. *H.A.Haruthyunian*, *A.G.Nikoghossian*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, **19**, 135, 1978.
41. *В.В.Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
42. *Д.И.Нагирнер*, в "Итоги науки и техники", с. Астрономия, с.220-260, М., 1983.
43. *В.А.Амбарцумян*, ДАН АрмССР, **8**, 101, 1948.
44. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **21**, 323, 1984.
45. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **21**, 595, 1984.
46. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **24**, 149, 1986.

47. *А.Г.Никогосян*, *Г.А.Арутюнян*, Астрофизика, **27**, 335, 1987.
48. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **47**, 289, 2004.
49. *В.А.Амбарцумян*, ДАН СССР, **44**, 244, 1944.
50. *V.A.Ambartsumian*, Transactions of IAU, 7,452, 1950.
51. *M.M.Vainberg*, Variational Methods for the Study of Non-Linear Operators, Holden Day, San-Francisco, 1964.
52. *E.Tonti*, Acad. Roy. Belg., **55**, 137, 1969.
53. *I.M.Gelfand, S.V. Fomin*, Calculus of Variations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.
54. *M.Tavel*, Transport Theory Statist. Phys., **1**, 271, 1971.
55. *D.Anderson*, J. Inst. Math. Applic., **12**, 551, 1973.
56. *G.B.Rybicky*, Astrophys. J., **213**, 165, 1977.
57. *I.Hubeny*, Astron. Astrophys., **185**, 332, 1987 (а,б).
58. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **43**, 463, 2000.
59. *Н.Б.Енгибарян*, ДАН СССР, **203**, 4, 1972.
60. *N.B.Yengibarian*, *A.G.Nikoghossian*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, **13**, 787, 1973.
61. *В.В.Соболев*, ДАН СССР, **111**, 1000, 1956.
62. *R.W.Atherton*, *G.M.Homsy*, Studies in Appl. Math., **54**, 31, 1975.
63. *G.G.Stokes*, Proc. Roy. Soc., **11**, 545, 1862.
64. *О.В. Пикичян*, Сообщ. Бюракан. обс. **57**, 5, 1984.
65. *H.W.Schmidt*, Ann. der Phys., **23**, 697, 1907.
66. *В.А.Амбарцумян*, ДАН АрмССР, **7**, 199, 1947.
67. *R.Bellman*, *R.Kalaba*, *M.Wing*, J. Math. Phys., **1**, 280, 1960.
68. *R.Bellman*, *R.Kalaba*, *M.Prestrud*, Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness, American Elsevier, New York, 1963.
69. *H.C.Van de Hulst*, Multiple Light Scattering Tables, Formulas and Applications, v.1, Acad. Press, New York, 1980.
70. *A.G.Nikoghossian*, Astron. Astrophys., **422**, 1059, 2004.
71. *R.Redheffer*, J. Math. Phys., **41**, 1, 1962.
72. *I.P.Grant*, *G.E.Hrant*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **141**, 27, 1968.
73. *A.Peraiah*, Sp. Sci. Rev., **87**, 465, 1999.
74. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **47**, 123, 2004.
75. *В.В.Бабиков*, Метод фазовых функций в квантовой механике, Наука, М., 1976.
76. *Д.М.Седракян*, *А.Ж.Хачатрян*, Астрофизика, **42**, 419, 1999.
77. *В.А.Амбарцумян*, ДАН АрмССР, **39**, 159, 1964.
78. *В.А.Амбарцумян*, О некоторых нелинейных задачах теории переноса излучения, в Сб. Теория звездных спектров, с.91, Наука, М,, 1966.
79. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды т.3, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1988.
80. *V.A.Ambartsumian*, in "A Life in Astrophysics, Selected papers of Victor Ambartsumian", Allerton press, New York, 1998.
81. *В.А.Амбарцумян*, ДАН АрмССР, **38**, 225, 1964.
82. *А.Г.Никогосян*, ДАН АрмССР, **39**, 227, 1964.
83. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **1**, 285, 1965.
84. *M.Gros*, *C.Magnan*, Astron. Astrophys., **93**, 150, 1981.
85. *C.Magnan*, Astron. Astrophys., **271**, 543, 1993.