АСТРОФИЗИКА

ТОМ 51 НОЯБРЬ, 2008 ВЫПУСК 4

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРИ НАЛИЧИИ КОНФОРМНО-СВЯЗАННОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Р.М.АВАКЯН, Г.Г.АРУТЮНЯН, Э.В.ЧУБАРЯН

Поступила 12 марта 2008
Принята к печати 20 августа 2008

Современные представления о Вселенной свидетельствуют в пользу предположения о наличии негравитационного источника, называемого темной энергией, для которого $\varepsilon + 3P < 0$ (ε - плотность энергии, P - давление). Это обеспечивает ускоренное расширение Вселенной. В настоящей работе рассматривается тензорно-скалярный вариант теории тяготения с конформно-связанным скалярным полем. Рассмотрены различные космологические модели, обсуждена возможность эволюционного развития Вселенной с ускоренным расширением.

Ключевые слова: *космология: модель*

1. *Введение.* Недавнее открытие ускоренного расширения Вселенной [1,2] вынуждает пересмотреть установившиеся представления о ее составе и характере эволюции. При этом, по-прежнему популярным остается предположение о необходимости включения космологической постоянной в уравнения гравитационного поля (о проблеме космологической постоянной см. обзор [3]), что, как будет показано ниже, эквивалентно рассмотрению ненулевой энергии вакуума и связанного с ней отрицательного давления [4-6]. Альтернативным объяснением наблюдаемого ускорения является гипотеза о существовании во Вселенной особой субстанции - "квинтэссенции" [7] с уравнением состояния

$$P_q = -(1-\nu)\varepsilon_q, \quad 0 < \nu < 2/3.$$

В релятивистской теории гравитации (РТГ) Логунова [8] наличие квинтэссенции приводит к интересным последствиям - ускорение Вселенной сменяется замедлением с последующей остановкой, после чего начинается сжатие до некоторого минимального значения масштабного фактора, затем следует новый цикл расширения [9]. Отметим, что идея об осциллирующем характере эволюции Вселенной выдвигалась и ранее, но преимущественно из философских соображений [10,11], поскольку в закрытой модели Фридмана осциллирующему режиму препятствует рост энтропии от цикла к циклу и переход через космологическую особенность [12].

Достаточно аргументированное введение космологической постоянной в ОТО привело к мысли о введении аналогичной величины в тензорноскалярную теорию в предположении, что новое поле является скалярным, но не динамическим, а управляемым гравитационным скаляром теории Йордана-Бранса-Дикке (ЙБД) [13-15]. В искривленном пространстве скалярные поля, удовлетворяющие требованиям общековариантности, описываются уравнением

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\psi_\beta-\left(\frac{m^2c^2}{h^2}+\gamma R\right)\psi=0, \tag{1}$$

где m -масса скалярного поля, R -скалярная кривизна, γ -безразмерная константа, при отсутствии которой получается обычное обобщение уравнения Клейна-Гордона в случае риманова пространства ($\gamma=1/6$ было предложено Пенроузом для случая конформно-инвариантного безмассового скалярного поля).

Как оказалось, теорию ЙБД конформным преобразованием можно перевести из собственного представления с самосогласованным скалярным полем ψ, подчиняющимся условию

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\psi_\beta=0 \tag{2}$$

к представлению, описываемому уравнениями ОТО с источником в виде негравитационных полей и конформно-связанного безмассового скалярного поля ψ, удовлетворяющего уравнению [16]

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\psi_\beta-\frac{1}{6}R\psi=0. \tag{3}$$

В рамках последнего представления предполагается получить решение космологической задачи сначала с доминирующим конформно-связанным безмассовым скалярным полем, а затем с учетом различных общепринятых уравнений состояния материи.

2. *Космологическая задача с конформно-связанным скалярным полем.* В случае конформно-связанного скалярного поля при наличии потенциала Хиггса действие имеет вид [17]

$$W=\int\left[-\left(\frac{1}{2k}-\frac{\psi^2}{12}\right)R+\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2-\frac{\lambda}{12}\psi^4+L_m\right]\sqrt{-g}\,d^4x. \tag{4}$$

В результате варьирования по g_{ik} и ψ получаются полевые уравнения

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=k\left(1-\frac{k\psi^2}{6}\right)^{-1}\left[\tau_{\mu\nu}+T^{mat}_{\mu\nu}\right], \tag{5}$$

$$\nabla^2\psi-\frac{R}{6}\psi+\frac{\lambda}{3}\psi^3=0, \tag{6}$$

где

$$\tau_{\mu\nu}=\frac{2}{3}\nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi-\frac{1}{6}g_{\mu\nu}(\nabla\psi)^2-\frac{\psi}{3}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi+\frac{\psi}{3}g_{\mu\nu}\nabla^2\psi+\frac{\lambda}{12}\psi^4g_{\mu\nu}, \tag{7}$$

$$T^{mat}_{\mu\nu} = (\varepsilon + P)\,U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}\,,$$

при этом свертка (5) с учетом (6) дает

$$-R = kT = \chi(\varepsilon - 3P). \tag{8}$$

Принято считать, что модели однородной и изотропной Вселенной адекватна геометрия с метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера:

$$dS^2 = dr^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin\theta\, d\varphi^2\right)\right].$$

Соответственно вышеприведенные уравнения в случае $k=0$ принимают вид

$$\frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{\chi}{3\left(1-\frac{\chi\psi^2}{6}\right)}\left[\frac{\dot\psi^2}{2} - \psi\dot\psi\frac{\dot a}{a} + \varepsilon\right], \tag{9}$$

$$-\left(\frac{2\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2}\right) = \frac{\chi}{3\left(1-\frac{\chi\psi^2}{6}\right)}\left[\frac{\dot\psi^2}{2} - 2\frac{\dot a}{a}\psi\dot\psi - \psi\ddot\psi + 3P\right], \tag{10}$$

$$\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{\chi}{6}(\varepsilon - 3P), \tag{11}$$

$$\ddot\psi + 3\frac{\dot a}{a}\dot\psi + \psi\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2}\right) + \frac{\lambda}{3}\psi^3 = 0\,, \tag{12}$$

$$\dot\varepsilon = -\frac{3\dot a}{a}(\varepsilon + P), \quad \varepsilon = \varepsilon_0/a^n, \quad n = 3(1+\alpha). \tag{13}$$

В системе уравнений одно из них не является независимым.

Из (11) получаем для коэффициента "замедления" q

$$q = -1 + \frac{\chi}{6H^2}(\varepsilon - 3P), \tag{14}$$

где $H = \dot a/a$ - параметр Хаббла, с помощью которого можно оценить возможность равномерного или ускоренного расширения Вселенной, поскольку из условия $q \ge 0$ следует

$$\varepsilon \ge 2\cdot\frac{3H^2}{8\pi G} + 3P \tag{15}$$

(напомним, что в рамках теории Эйнштейна $\varepsilon_{krit} = 3H^2/8\pi G$).

В космологических задачах состояние вещества описывается уравнением состояния $P = \alpha\varepsilon$, так что для обычных в космологии значений α, q выражается следующим образом

$$q = -1 + \frac{2\chi\varepsilon}{3H^2} \quad \text{модель вакуума} \quad (\alpha = -1),$$

$$q=-1+\frac{\chi\varepsilon}{6H^2} \quad \text{эра преобладания вещества } (\alpha=0),$$
$$q=-1 \quad \text{доминантность излучения } (\alpha=1/3),$$
$$q=-1 \quad \text{доминантность скалярного поля } (\varepsilon=0,\ P=0), \tag{16}$$
$$q=-1-\frac{\chi\varepsilon}{3H^2} \quad \text{предельно жесткое состояние } (\alpha=1).$$

Параметр Хаббла при этом может быть представлен в виде

$$H^2=\frac{\chi\varepsilon_0}{3}a^{-3(1+\alpha)}+\beta/a^4 .$$

а) При доминировании скалярного поля ($\varepsilon=0, P=0$) или в случае $P=\varepsilon/3$ скалярная кривизна обращается в нуль ($R=0$). Полевые уравнения в этих случаях имеют вид ($\lambda=0$)

$$\frac{\ddot a}{a}+\frac{\dot a^2}{a^2}=0, \quad \dot\psi=\frac{c_1}{a^3}, \quad \frac{\ddot\psi}{\dot\psi}=-\frac{3\dot a}{a},$$
$$-\frac{\ddot a}{a}=\frac{\chi\left(\frac{\dot\psi}{2}-\frac{\psi\ddot\psi}{3}+\varepsilon\right)}{3\left(1-\frac{\chi\psi^2}{6}\right)}, \tag{17}$$

откуда $a=\sqrt{2ct+b}$, $H=c/a^2$, $\psi=c_2-c_1/ca$, а из последнего уравнения системы (17) следует

$$c^2\left(3-\frac{1}{2}c_2^2\chi\right)=0 \Rightarrow c_2^2=\frac{6}{\chi}, \tag{18}$$

$$\psi=\sqrt{6/\chi}-c_1/ca , \tag{19}$$

т.е. при достаточно больших значениях a имеем $\psi\to\sqrt{6/\chi}$.

б) В случае доминантности излучения ($\alpha=1/3$) при наличии скалярного поля аналитический вид a, ψ, H остается таким же, а условие (18) принимает вид

$$c^2\left(3-\frac{1}{2}c_2^2\chi\right)=\chi\varepsilon_0 , \tag{20}$$

так что теперь $c_2=\sqrt{\frac{6}{\chi}-\frac{2\varepsilon_0}{c^2}}$.

в) Эра преобладания вещества соответствует $P=0$, $\varepsilon=\varepsilon_0/a^3$. Из (11), вводя обозначение $H(a)=\dot a/a$, получим

$$a\frac{d\left(H^2\right)}{da}+4H^2-\frac{\chi}{3}\frac{\varepsilon_0}{a^3}=0,$$

откуда

$$H^2=\frac{1}{a^4}\left(\frac{\chi\varepsilon_0}{3}a+\beta\right)=\frac{\chi\varepsilon}{3}+\frac{\beta}{a^4}, \tag{21}$$

и соответственно

$$q = -1 + \frac{\frac{\chi\varepsilon_0 a}{6}}{\frac{\chi\varepsilon_0}{3}a + \beta}. \tag{22}$$

Из (22) следует, что $q \to -1/2$ при $a \to \infty$ (как в ОТО), а требование $q \geq 0$ с учетом положительности (21) и при условии $\beta < 0$ сводится к неравенству

$$1 \leq y \leq 2. \tag{23}$$

Здесь $y \equiv \frac{\chi\varepsilon_0}{3|\beta|}a(t)$.

Таким образом, временная эволюция масштабного фактора определяется из уравнения

$$0 < H = \left(\frac{\dot{y}}{y}\right) = \frac{A\sqrt{y-1}}{y^2}, \tag{24}$$

где $A \equiv (\chi\varepsilon_0/3)^2|\beta|^{-3/2}$.

В результате интегрирования получается кубическое уравнение

$$\frac{2z^3}{3} + 2z = A(t-t_0), \quad z = \sqrt{y-1}. \tag{25}$$

Решение кубического уравнения $z^3 + pz + q = 0$ ($p = 3$, $q = -(3/2)A(t-t_0)$) можно получить с помощью формулы Кардано [18]. Если

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 1 + A^2(t-t_0)^2 > 0, \quad p > 0 \quad \text{и} \quad R = \operatorname{sign} q\sqrt{|p|/3} = -1,$$

то

$$\operatorname{sh}\varphi = \frac{q}{2R^3} = \frac{3A}{4}(t-t_0) \quad \left(\varphi = \operatorname{ars}h\frac{3A}{2}(t-t_0)\right)$$

и решение имеет вид

$$z = 2\operatorname{sh}\left[\frac{1}{3}\operatorname{ars}h\frac{3A}{4}(t-t_0)\right]. \tag{26}$$

Имея в виду область изменения z

$$0 \leq z \leq 1, \tag{27}$$

получаем область изменения t

$$0 \leq \frac{1}{3}\operatorname{ars}h\frac{3A}{4}(t-t_0) \leq 0.48; \quad 0 \leq \frac{3A}{4}(t-t_0) \leq 2$$

и, следовательно,

$$t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{24|\beta|^{3/2}}{(\chi\varepsilon_0)^2}. \tag{28}$$

Для определения временной эволюции скалярного поля ψ рассмотрим (12) в случае $\lambda = 0$. Подстановка $U = a\psi$ в (12) сводится к уравнению

$$\ddot{U}-\dot{U}\frac{\dot{a}}{a}=0\,, \tag{29}$$

и далее $\dot{U}a=\mathrm{const}=c'$.

Подстановка $V=a^2$ в (11) дает

$$\ddot{V}=V\cdot\frac{\chi\varepsilon_0}{3a^3}=\frac{\chi\varepsilon_0}{3a}\,. \tag{30}$$

Сравнивая (29) и (30),

$$\ddot{V}=\frac{\chi\varepsilon_0}{3c'}\frac{c'}{a}=\frac{\chi\varepsilon_0}{3c'}\dot{U} \tag{31}$$

и в результате

$$\psi=\gamma\dot{a}-\frac{\delta}{a}\,, \tag{32}$$

где $\gamma=\mathrm{const},\ \delta=\mathrm{const}$.

г) Уравнению состояния $P=-\varepsilon$ соответствует система

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}=\frac{2\chi\varepsilon}{3}\,, \tag{33}$$

$$\ddot{\psi}+3\sqrt{\frac{\chi\varepsilon_0}{3}+\frac{\beta}{a^4}}\dot{\psi}+\frac{2\chi\varepsilon_0}{3}\psi=0\,. \tag{34}$$

Подстановкой $y=a^2$ (33) сводится к

$$\ddot{y}-\frac{4\chi\varepsilon}{3}y=0\,. \tag{35}$$

Или после умножения на $2\dot{y}$

$$\dot{y}^2-\frac{4\chi\varepsilon}{3}y^2=\beta\,, \tag{36}$$

и в результате решение принимает вид

$$y=a^2=c_1\,\mathrm{ch}\,2\sqrt{\frac{\chi\varepsilon}{3}}\,t+c_2\,\mathrm{sh}\,2\sqrt{\frac{\chi\varepsilon}{3}}\,t= \tag{37}$$

$$=c\,\mathrm{ch}\left(2\sqrt{\frac{\chi\varepsilon}{3}}\,t+\alpha\right),\quad \text{если}\quad c_1>c_2 \tag{38}$$

$$=c\,\mathrm{sh}\left(2\sqrt{\frac{\chi\varepsilon}{3}}\,t+\alpha\right),\quad \text{если}\quad c_1<c_2\,. \tag{39}$$

(38) можно представить в виде

$$\frac{a^2(t)}{a^2(0)}=\mathrm{ch}\,2\sqrt{\frac{\chi\varepsilon}{3}}\cdot t+\sqrt{\frac{3}{\chi\varepsilon}}\,H(0)\,\mathrm{sh}\left(2\sqrt{\frac{\chi\varepsilon}{3}}\cdot t\right). \tag{40}$$

Соответственно (34) приводится к виду

$$\psi''_{\tau\tau}+\frac{3}{2}f(\tau)\psi'_{\tau}+\frac{1}{2}\psi=0\,, \tag{41}$$

где производные берутся по $\tau = 2\sqrt{\frac{\chi\varepsilon}{3}}(t-t_0)$, а $f = th\tau$ или $f = cth\tau$ в зависимости от выбора начальных условий. Решение (41) выражается через гипергеометрическую функцию. В частном случае при достаточно больших значениях $a(t)$ или при $\beta = 0$ (41) сводится к

$$y^2\psi''_{yy} + \frac{5}{2}y\psi'_y + \frac{1}{2}\psi = 0 \tag{42}$$

или

$$\ddot{\psi} + 3\sqrt{\frac{\chi\varepsilon_0}{3}}\dot{\psi} + \frac{2\chi\varepsilon_0}{3}\psi = 0, \tag{43}$$

и в результате ψ оказывается равным соотвественно

$$\psi = \frac{c_1}{a^2} + \frac{c_2}{a} \quad \text{или} \quad \psi = c_1 e^{-2\sqrt{\frac{\chi\varepsilon_0}{3}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\chi\varepsilon_0}{3}}t}, \tag{44}$$

так что $a = e^{\sqrt{\frac{\chi\varepsilon_0}{3}}t}$, а $q = 1$, поскольку

$$q = -1 + \frac{\frac{2\chi\varepsilon_0}{3}}{\frac{\chi\varepsilon_0}{3} + \frac{\beta}{a^4}}. \tag{45}$$

3. *Заключение.* Среди существующих в настоящее время подходов к решению проблемы ускоренного расширения Вселенной особое внимание уделяется космологическим моделям при наличии различных скалярных полей (квинтэссенция, K-эссенция, тахионы, фантоны, дилатоны [19]), т.е. исследуются свойства различных динамических систем, включающих сопровождающую их темную энергию. В предлагаемой работе скалярное поле удовлетворяет требованиям общековариантности, что на уровне действия (4) проявляется как возникновение дополнительного по сравнению с ОТО интерференционного члена типа $\psi^2 R$ плотности лагранжиана [20,21]. В результате построения космологической модели выяснилось, что коэффициент "замедления" $q = \ddot{a}a/\dot{a}^2$ в случае доминантности рассматриваемого скалярного поля, при наличии излучения ($P = \varepsilon/3$), а также в случае предельно жесткого уравнения состояния ($P = \varepsilon$) является существенно отрицательным. Только для моделей вакуума ($P = -\varepsilon$) и в эпоху преобладания вещества (пыль с $P = 0$) возможно расширение Вселенной с ускорением при плотностях энергии $\varepsilon \geq \frac{1}{2}\frac{3H^2}{8\pi G}$ в первом случае и при $\varepsilon \geq 2 \cdot \frac{3H^2}{8\pi G}$ в случае пыли.

Что касается роли потенциала Хиггса, то его наличие прежде всего интересно тем, что при нарушении конформной симметрии он способен генерировать гравитационное поле [14]. В рамках же поставленной задачи влияние хиггсовского потенциала сводится только к воздействию на поведение $\psi(t)$ (см. (12)), и в проблеме ускоренного расширения Вселенной практически не проявляется.

Работа выполнена в рамках бюджетной темы 119 "Некоторые вопросы теории гравитации и квантовой теории поля и их космологические приложения", финансируемой министерством Образования и Науки РА.

Кафедра теоретической физики им. академика Г.С.Саакяна, ЕГУ, Армения, e-mail: rolavag@freenet.am
ghar@freenet.am

COSMOLOGICAL MODELS IN THE PRESENCE OF THE CONFORM-CONNECTED SCALAR FIELD

R.M.AVAGYAN, G.H.HARUTYUNYAN, E.V.CHUBARYAN

Modern vision of the Universe gives evidence for the assumption that there exists non-gravitational source called dark energy, for which $\varepsilon + 3P < 0$ (ε - density of energy, P-pressure). It provides the accelerated expansion of the Universe. In the present work the tensor-scalar variant of the theory of gravitation with the conform-connected scalar field is considered. Various cosmological models are considered, the possibility of evolutionary development with the accelerated expansion of the Universe is discussed.

Key words: *cosmology: model*

ЛИТЕРАТУРА

1. *R.M.Garnvich*, Astrophys. J., 509, 74, 1998.
2. *S.Perlmutter*, *G.Alderiug*, *G.Goldhaber et. al.*, Astrophys. J., 517, 565, 1999.
3. *S.Weinberg*, Rev. Mod. Phys., 61, 1, 1989.
4. *A.H.Guth*, Phys. Rev., D23, 347, 1981.
5. *A.D.Linde*, Phys. Lett., B108, 389, 1982.
6. *A.A.Starobinski*, Phys. Lett., B117, 175, 1982.
7. *R.R.Caldwell*, *P.J.Steinhardt*, Phys. Rev., D57, 6057, 1998.
8. *А.А.Логунов*, Теория гравитационного поля, Наука, М., 2001.

9. *С.С.Герштейн, А.А.Логунов, М.А.Местверишвили, Н.П.Ткаченко*, препринт ИФВЭ, 2003-13, 2003.
10. *А.Д.Сахаров*, ЖЭТФ, 83, 1253, 1984.
11. *Э.Г.Аман, М.А.Марков*, ТМФ, 58, 163, 1984.
12. *Р.Толмен*, Относительность, термодинамика и космология, Наука, М., 1974.
13. *Р.МАвакян, Г.Г.Арутюнян, В.В.Папоян*, Астрофизика, 48, 455, 2005.
14. *Р.М.Авакян, Г.Г.Арутюнян*, Астрофизика, 51, 151, 2008.
15. *Р.М.Авакян, Г.Г.Арутюнян*, Астрофизика, 48, 633, 2005.
16. *J.D.Bekenshtein*, Ann. Phys., (N.Y.) 82, 535, 1974.
17. *К.П.Станюкович, В.Н.Мельников*, Гидродинамика поля и константы в теории гравитации, М., Энергоатомиздат, 1983.
18. *И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев*, "Справочник по математике", М., с.220, 1980.
19. *E.J.Copeland, M.Sami, S.Tsujikawa*, Int. J. Mod. Phys., D15, 1753, 2006.
20. *Н.А.Зайцев, В.Н.Мельников*, Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, Атомиздат, М., 1979, вып. 10, с.131.
21. *В.Н.Мельников, Г.Д.Певцов*, Известия вузов, N4, 45, 1985.