АСТРОФИЗИКА

TOM 51

НОЯБРЬ, 2008

ВЫПУСК 4

О МОДЕЛЬНО-НЕЗАВИСИМОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЯРКОСТИ ПО ДИСКАМ ЗВЕЗД ИЗ ВЫСОКОТОЧНЫХ ЗАТМЕННЫХ КРИВЫХ БЛЕСКА

М.Б.БОГДАНОВ¹, А.М.ЧЕРЕПАЩУК² Поступила 6 мая 2008

Получены оценки точности восстановления распределений яркости по дискам звезд из анализа данных высокоточной космической фотометрии классических затменных систем и наблюдений прохождений планет по дискам звезд. Решение некорректно поставленной задачи восстановления проводилось на компактном множестве монотонно не возрастающих выпуклых вверх неотрицательных функций. Одной из проблем, с которой сталкивается эта методика в случае звезд с тонкими фотосферами, является плохая сходимость решения в точке разрыва распределения яркости на краю диска звезды. Тем не менее, применение этой методики к анализу высокоточных наблюдений представляется оправданным, так как она позволяет получать оценку потемнения к краю, не связанную с какими-либо модельными предположениями. Восстановленное распределение яркости для звезды HD 209458, прохождение планеты по диску которой наблюдалось космическим телескопом HST, хорошо согласуется с результатами подбора нелинейной модели.

Ключевые слова: звезды:восстановление распределения яркости по дискам

1. Введение. Анализ кривых блеска затменных переменных является основным источником информации о размерах звезд и распределениях яркости по их дискам. В последнее время к общирному классу затменных переменных добавились звезды, имеющие планеты, плоскости орбит которых близки к лучу зрения. Это позволяет наблюдать прохождения планеты по диску звезды, сопровождающееся падением ее блеска. Наблюдаемая глубина минимумов при прохождениях планет очень мала и регистрация кривых блеска для таких явлений (часто называемых транзитом планет) представляет собой достаточно сложную задачу. Точность наземной фотометрии (относительная погрешность $\varepsilon > 10^{-3}$), которая для ярких объектов определяется вариацией прозрачности атмосферы и атмосферным мерцанием звезд, существенно ограничивает возможности получения информации о распределениях яркости по дискам звезд из анализа их затмений. Заметного повышения точности можно ожидать только для наблюдений за пределами земной атмосферы. Первые результаты работы специализированного спутника COROT, выведенного на орбиту 27 декабря 2006г., подтвердили эти ожидания и продемонстрировали возможность фотометрии затменных явлений с

погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$ [1].

Интерпретация коивых блеска затменных переменных, частным случаем которой является транзит планет, - классическая задача астрофизики и методы ее решения хорошо разработаны. Описание этих методов можно найти в монографиях [2-4] и статьях [5.6]. Как и для любой обратной задачи их можно разделить на две группы: подбор модели затменной с заданными законами потемнения к краю дисков звезд и восстановление распределений яркости по дискам компонентов без использования жестких модельных ограничений. Оба подхода хорошо зарекомендовали себя на практике при анализе данных наземной фотометрии. Однако при повышении точности наблюдений на два порядка возникают определенные трудности применения известных методов как чисто вычислительного, так и принципиального характера. В предыдущих исследованиях [7,8] мы изучили возможности анализа данных высокоточной фотометрии на примере классической затменной с шаровыми компонентами, обращая внимание. главным образом, на метод подбора моделей. Целью настоящей работы является оценка точности восстановления распределения яркости из анализа наблюдений затмений компонент и прохождения планеты по диску звезды. а также получение распределения яркости для звезды HD 209458, транзит планеты по диску которой наблюдался космическим телескопом HST.

2. Классические затменные системы. Как и ранее [7,8], мы выбрали для исследования модель классической затменной системы с шаровыми компонентами и линейными законами потемнения дисков к краю, находящимися на круговых орбитах. Кривая блеска для данной модели $l^{c}(i, r_{1}, L_{1}, x_{1}, r_{2}, L_{2}, x_{2}, \theta)$ как функция фазы блеска θ ($0 \le \theta \le 1$) зависит от семи параметров: угла наклона плоскости орбиты *i*, радиусов компонентов r_{p} измеренных в долях радиуса относительной орбиты ($r_{1} \ge r_{2}$), их блесков L_{p} связанных соотношением $L_{1}+L_{2}=1$, а также коэффициентов потемнения x_{j} в линейном законе распределения яркости $I_{j}(\vartheta)$ по дискам

$$I_{j}(\vartheta) = I_{j}(0)(1 - x_{j} + x_{j} \cos\vartheta),$$

где ϑ - угол между лучом зрения и нормалью к поверхности фотосферы звезды, $I_j(0)$ - яркость в центре диска *j*-го компонента, *j*=1, 2. Значения параметров модели затменной переменной вновь приняты равными: *i*=89°.0, r_1 =0.30, L_1 =0.30, x_1 =0.50, r_2 =0.20, L_2 =0.70, x_2 =0.30. Кривая блеска этой модели вычислялась с относительной погрешностью равной 10^{-12} (показана на рис.1 статьи [8]). В главном минимуме, в котором затмевается более яркий компонент меньшего размера, имеет место полное затмение, а во вторичном - кольцеобразное.

Нами было показано, что при использовании методики восстановления распределений яркости по дискам компонент геометрические параметры

системы і, r, и r, могут быть найдены по минимуму суммарной невязки (суммы квадратов уклонений) в обоих минимумах [8]. Поэтому при оценке погрешности восстановления распределения яркости мы будем считать эти параметры известными и совпадающими с точными значениями. Для дальнейшего анализа был выбран вторичный минимум блеска, содержащей информацию о распределении яркости по диску первого компонента системы. При заданной точности фотометрии относительно небольшая глубина этого минимума должна приводить к большей погрешности восстановления $I_1(\vartheta)$ по сравнению с распределением яркости $I_2(\vartheta)$, информация о котором содержится в главном минимуме кривой блеска. В качестве исходных данных мы брали отсчеты модельной кривой во вторичном минимуме, искаженные влиянием случайного шума с дисперсией постоянной в шкале звездных величин для различных значений относительной погрешности є. Для генерации шума использовались псевдослучайные гауссовские числа n, с нулевым средним и единичной дисперсией. При этом отсчеты искаженной кривой блеска l_j^0 получались как $l_j^o = l_j^c (1 + \varepsilon n_j)$, где l_j^c - отсчеты модельной кривой. Всего рассматривалось 100 отсчетов на равномерной сетке θ_{j} .

Как было впервые показано в работе [9], распределение яркости по диску первого компонента, для которого мы будем в дальнейшем использовать обозначение $I(\xi)$ ($0 \le \xi \le r_1$), связано с потерей блеска в минимуме уравнением

$$1 - l_1(\Delta) = \int_0^1 K_1(\xi, \Delta, r_2) I(\xi) d\xi, \qquad (1)$$

где Δ - расстояние между центрами дисков компонент, измеренное как и радиус r, в единицах радиуса относительной орбиты. Выражение для ядра K₁(ξ, Δ, r₂) приведено в работе [8]. Таким образом, задача восстановления распределения яркости $I(\xi)$ сводится к решению обратной задачи для уравнения (1). Это уравнение представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода и обратная задача для него является некорректно поставленной в смысле Адамара. При решении подобных задач необходимо использовать априорную информацию о возможном виде функции I(ξ) [10]. Распределение яркости по диску компонента нашей модели представляет собой монотонно не возрастающую выпуклую вверх неотрицательную функцию. Это утверждение также соответствует физике задачи анализа затменных систем для звезд с тонкими фотосферами при усреднении кривых блеска за достаточно большой промежуток времени, способном устранить влияние возможных пятен и факелов. Выполнение данного условия не налагает жестких модельных ограничений на вид распределения яркости, но сужает множество возможных решений до компактного множества. При поиске решения уравнения (1) на компактном множестве функций задача становится корректной и при стремлении погрешности наблюдений к нулю функция I(ξ) сходится к точному распределению яркости на интервале $0 \le \xi \le \eta$, за возможным исключением концов интервалов и точек разрыва [10].

Восстановление распределения яркости проводилось нами с использованием той же компьютерной программы, что и в работе [8], путем минимизации функционала невязки, представляющего собой расстояние в метрике пространства *L*, вычисленных отсчетов потерь блеска от соответствующих отсчетов искаженной шумом кривой во вторичном минимуме

$$\Phi_1[I(\xi), r_1, r_2, i] = \left\| \int_0^1 K_1(\xi, \Delta, r_2) I(\xi) d\xi - [1 - l_1(\Delta)] \right\|_{L_2}.$$
 (2)

Минимизация осуществляется методом проекции сопряженных градиентов на заданное компактное множество функций. Поиск функции $I(\xi)$ проводился на равномерной сетке из N=1001 значений с аппроксимацией интеграла (1) формулой Симпсона. Как было показано ранее [8], при таком числе точек сетки обеспечивается погрешность вычисления кривой блеска менее 10^{-6} .

В ходе численных экспериментов мы провели оценку точности восстановления распределения яркости для трех значений погрешности задания кривой блеска $\varepsilon = 10^{-3}$, 10^{-4} и 10^{-5} . В каждом случае использовалось по 100 различных реализаций случайного шума и выбирались нулевые начальные приближения к решению. Найденные для каждой реализации шума решения соответствовали либо точному минимуму функционала (2), либо случаю, когда на очередном шаге итерации невязка не уменьшалась. В среднем, для получения решения по каждой реализации входных данных было необходимо выполнить около 3000 итераций метода проекции сопряженных градиентов. Кривые блеска, соответствующие восстановленным распределениям яркости, удовлетворяют исходным данным в пределах заданной погрешности.

Точность восстановления может быть охарактеризована двумя значениями погрешности: стандартным уклонением точек распределения яркости от их среднего значения σ_0 . и стандартным уклонением точек от точного распределения яркости σ_0 . Первая величина характеризует случайную погрешность восстановления, а вторая - полную погрешность, с учетом возможных систематических ошибок.

На рис.1 приведено среднее из восстановленных распределений яркости $I(\xi)$ при уровне случайного шума $\varepsilon = 10^{-3}$. Сплошной линией на рисунке показано также точное распределение яркости $I_0(\xi)$. На рис.2 для этого же уровня шума показан коридор погрешностей $\pm 3\sigma_0$, построенный относительно разности среднего восстановленного и точного распределений яркости $I(\xi) - I_0(\xi)$. Эти рисунки хорошо иллюстрируют проблему, возникающую из-за разрыва распределения яркости на краю диска звезды в точке $\xi = r_1$. Как уже указывалось выше, сходимость решения в данной точке не гарантируется. Разрыв приводит не только к большому отклонению решения $I(\xi)$ от точного на самом крае диска, но и вызывает своеобразное

"явление Гиббса", при котором восстановленное распределение яркости начинает осциллировать относительно точного распределения. Подобные осцилляции проявляются также в величине погрешности восстановления



Рис.1. Восстановленное распределение яркости по диску для модели звезды с линейным законом потемнения при погрешности задания кривой блеска 10⁻³ (линия с кружками). Точное распределение яркости показано сплошной линией.



Рис.2. Коридор погрешностей ± 3σ₀ восстановления распределения яркости, построенный относительно разности среднего из восстановленных и точного распределений яркости $I(\xi) - I_0(\xi)$ для погрешности задания кривой блеска 10⁻³.

 σ_0 (рис.2) и прослеживаются довольно далеко от края диска звезды. При меньших погрешностях задания кривой блеска отклонения решений от точного трудно проиллюстрировать графически. Однако о них можно судить по средним погрешностям восстановления σ_s и σ_0 , вычисленным по первым 500 отсчетам распределения яркости на интервале [0, $0.5r_1$] и приведенным в табл.1. Анализ этой таблицы показывает, что при $\varepsilon \leq 10^{-4}$ полная погрешность заметно превышает чисто случайную. Это говорит о том, что в данном случае превалируют систематические погрешности восстановления распределения яркости, вызванные разрывом решения. Относительно небольшое уменьшение σ_s в последней строке таблицы

Таблица 1

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ СТАНДАРТНЫХ УКЛОНЕНИЙ ОТ СРЕДНЕГО ИЗ ВОССТАНОВЛЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЯРКОСТИ о, И ОТ ТОЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЯРКОСТИ о ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОГРЕШНОСТИ ЗАДАНИЯ КРИВОЙ БЛЕСКА в

8	σ,	σ₀
10-3	0.0078	0.0085
10-4	0.0026	0.0042
10-5	0.0023	0.0041

возможно связано с неточностью аппроксимации интеграла (1). Попытка простого увеличения числа узлов сетки задания распределения яркости до N=2001 не привела к уменьшению погрешности, что свидетельствует о проявлении процесса накопления ошибок округления.

С целью уменьшения влияния разрыва функции $I(\xi)$ мы провели численные эксперименты по минимизации функционала (2), используя значение яркости на краю диска $I(r_1)$ в качестве свободного параметра задачи. Учитывая, что чувствительность задачи к влиянию распределения яркости максимальна при равных радиусах компонентов [2], была выбрана модель затменной с $r_1 = 0.20$, $r_2 = 0.19$ и $i = 89^\circ.99$. Остальные параметры оставались неизмененными. В соответствии с заданным компактным множеством функций начальные приближения выбирались как $I(\xi) = I(r_1)$. Эти эксперименты показали, что получаемая по минимуму невязки величина $I(r_1)$ оказывается достаточно близкой к точному значению. Однако найденные



Рис.3. Восстановленное распределение яркости по диску при погрешности задания кривой блеска 10⁻³. Значение яркости на краю диска использовалось в качестве свободного параметра и определялось по минимуму невязки. Точное распределение яркости показано тонкой линией. решения отклонялись от заданного распределения яркости в других областях диска звезды. В качестве иллюстрации на рис.3 приведено восстановленное распределение яркости при погрешности задания кривой блеска 10⁻³. Полученные результаты говорят о том, что погрешность решения определяется точностью задания кривых блеска и не может быть уменьшена без увеличения объема используемой априорной информации.

Таким образом, отсутствие сходимости решения на краю диска и ограниченность объема используемой априорной информации ставят предел достигаемой точности восстановления распределения яркости. Тем не менее, применение этой методики к анализу высокоточных наблюдений затменных переменных представляется оправданным, так как она позволяет получать независимую оценку закона потемнения к краю, не связанную с какимилибо предположениями о строении атмосферы звезды и механизмах переноса энергии. Особое значение методика восстановления распределения яркости имеет для звезд с протяженными атмосферами, для которых отсутствуют параметрические модели потемнения. Кроме того, для этих звезд распределение яркости $I(\xi)$ является непрерывной функцией и можно ожидать, что точность восстановления будет характеризоваться значением чисто случайных погрешностей σ_s , приведенными в таблице.

3. Прохождения планет по дискам звезд. В настоящее время известно уже свыше 150 планет, обращающихся вокруг других звезд. Абсолютное большинство из них обнаружено и исследуются спектроскопическими методами. Однако в ряде случаев плоскости планетных орбит оказываются достаточно близкими к лучу зрения, позволяя наблюдать прохождения планет по дискам звезд, сопровождающиеся уменьшением блеска звезды. Первый объект, для которого наблюдалось подобное прохождение - HD 209458 [11], является в настоящее время и наиболее исследованной системой. Фотометрические наблюдения прохождений этой планеты выполнялись как наземными инструментами, так и космическим телескопом HST [12-15]. Во всех случаях анализ кривых блеска проводился методом подбора нелинейных параметрических моделей распределения яркости по диску звезды. Один из вариантов этой методики приведен также в работе [16].

Мы выполнили анализ наблюдений прохождения планеты по диску HD 209458 методом восстановления распределения яркости. Высокоточные кривые затмений были получены с использованием спектрографа STIS космического телескопа HST путем интегрирования потока в диапазоне от 582 до 638 нм [12]. Средняя величина относительной погрешности этих наблюдений $\varepsilon = 1.1 \times 10^{-4}$, но глубина минимума очень мала и составляет приблизительно 0.016. Таким образом, соотношение точности наблюдений и глубины минимума в данном случае оказывается даже хуже, чем при наземной фотометрии затменных переменных. С другой стороны, малый размер

планеты повышает чувствительность кривой блеска к влиянию распределения яркости. Отсчеты сводной кривой затмения $l(\theta)$, построенной с использованием уточненных элементов Min JD_ы = 2452854.82545 + 3.52474554 Е [13], показаны кружками на рис.4 в зависимости от фазы блеска θ .



Рис.4. Наблюдаемые отсчеты сводной кривой изменения блеска при прохождении планеты по диску звезды HD 209458 как функция фазы (кружки) и кривая блеска, соответствующая восстановленному распределению яркости (сплошная линия).

При восстановлении распределения яркости использовались уточненные в работе [13] геометрические параметры системы: угол наклона орбиты $i=86^{\circ}.668$, радиус звезды $r_1 = 1.444 R_{\odot}$, радиус планеты $r_2 = 1.349$ радиусов Юпитера, радиус орбиты 0.047 а.е. Так как угол наклона заметно отличается от 90°, то кривая блеска не содержит информации о распределении яркости вблизи центра диска звезды. Решение уравнения (1), как и в предыдущем



Рис.5. Восстановленное распределение яркости по диску звезды HD 209458. Тонкой линией показано распределение яркости для нелинейной модели потемнения с оптимальными значениями параметров.

случае, находилось путем минимизации функционала (2) на компактном множестве монотонно не возрастающих выпуклых вверх неотрицательных функций. Было выполнено 3595 итераций метода проекции сопряженных градиентов и достигнут точный минимум невязки. Полученное распределение яркости $I(\xi)$ приведено на рис.5, на котором также показано распределение яркости для нелинейной модели

$$I(\mu) = I(1) \left[1 - x_1(1-\mu) - x_2(1-\mu)^2 \right], \qquad (3)$$

где $\mu = \cos(\vartheta)$, а x_1 и x_2 - параметры закона потемнения. По данным работы [12], оптимальные значения этих параметров равны $x_1 = 0.292$ и $x_2 = 0.348$. Кривая блеска, соответствующая восстановленному распределению яркости, показана сплошной линией на рис.4 и удовлетворяет наблюдательным данным в пределах оцененной погрешности. Рассчитанное нормированное значение $\chi^2_N = 1.16$.

Как видно из рис.5, по-прежнему проявляют себя разрыв распределения яркости на краю диска и ограниченность объема используемой априорной информации. Кроме того, относительно невысокая (сравнительно с глубиной минимума) точность задания кривой блеска приводит к еще одной особенности, свойственной поиску непараметрического решения на компактных множествах функций - распределение яркости приобретает вид ломанной, составленной из отрезков прямых линий. Тем не менее, решение, полученное без использования каких-либо жестких модельных предположений, достаточно хорошо согласуется с независимыми данными метода подбора моделей.

Представляет интерес оценить погрешность восстановления $I(\xi)$ в случае, когда точность регистрации кривой блеска будет соответствовать величине $\varepsilon = 10^{-5}$, достигнутой спутником COROT. Хотя HD 209458 (GOV, V=7.64, B - V = 0.58) является достаточно ярким объектом, малая длительность затмения препятствует увеличению времени накопления числа фотонов. Несмотря на это, указанная точность может быть реализована путем усреднения отдельных отсчетов для достаточно близких значений фазы.

Для решения данной задачи мы провели численный эксперимент. Была вычислена кривая затмения, соответствующая нелинейной модели распределения яркости (3) с оптимальными значениями параметров. Число отсчетов кривой и их фазы соответствовали данным наблюдений. На полученную кривую накладывался гауссовский случайный шум с нулевым средним и стандартными уклонениями равными реальным погрешностям наблюдений уменьшенным в десять раз. Восстановление распределения яркости проводилось для ста различных реализаций шума, после чего были оценены средние значения $I(\xi)$ и их стандартные уклонения σ_0 от заданной модели (3). На рис.6 показан коридор оцененных погрешностей $\pm 3\sigma_0$, построенный относительно разности среднего восстановленного и точного распределений яркости $I(\xi)$. Полученные результаты оказываются качественно близкими к

М.Б.БОГДАНОВ, А.М.ЧЕРЕПАЩУК

случаю классических затменных (рис.2). За исключением самого края диска звезды центр коридора погрешностей проходит по нулевому значению. Разрыв функции $I(\xi)$ на краю диска также вызывает резкое увеличение погрешности и приводит к осцилляциям ее значения. На интервале изменения радиуса ξ от 0.05 до 0.09 относительная погрешность восстановления распределения яркости оказывается меньше 0.5%.



Рис.6. Коридор погрешностей $\pm 3\sigma_0$ восстановления распределения яркости для модели затмения HD 209458, построенный относительно разности среднего из восстановленных и точного распределений яркости $I(\xi) - I_0(\xi)$ для погрешности задания кривой блеска 10^{-5} .

4. Выводы. Проведенные исследования показывают, что методика восстановления распределения яркости может быть успешно использована для анализа данных высокоточной космической фотометрии классических затменных систем и наблюдений прохождений планет по дискам звезд. Одной из трудностей, с которой сталкивается ее применение в случае звезд с тонкими фотосферами, является наличие разрыва распределения яркости на краю диска звезды. Отсутствие сходимости решения в точке разрыва и ограниченность объема используемой априорной информации ставят предел достигаемой точности восстановления распределения яркости. Тем не менее, применение этой методики к анализу высокоточных наблюдений представляется оправданным, так как в отличие от подбора моделей она позволяет получать оценку потемнения к краю, не связанную с какими-либо предположениями о строении атмосферы звезды и механизмах переноса энергии.

Из анализа полученных нами результатов следует еще один важный вывод. Несмотря на большие различия восстановленных распределений яркости вблизи края диска звезды, соответствующие им кривые удовлетворяют исходным данным в пределах заданной погрешности. Это свидетельствует о слабой чувствительности задачи к изменениям яркости диска в краевой зоне. В последнее время при решении кривых блеска затменных методом подбора моделей часто используются нелинейные законы потемнения к краю, отличия которых от линейных проявляются только вблизи лимба.Поэтому возникает вопрос о правомерности применения нелинейных законов потемнения. По нашему мнению, статистическая значимость таких законов должна быть обоснована в каждом конкретном случае.

Особое значение методика восстановления распределения яркости имеет для звезд с протяженными атмосферами, для которых отсутствуют параметрические модели потемнения диска к краю. Для этих звезд распределение яркости является непрерывной функцией, что устраняет проблему разрыва решения и позволяет ожидать существенного повышения точности восстановления. Кроме того, возможно увелечение объема используемой априорной информации. Так, в работе [17] при восстановлении распределения яркости по диску звезды WR предполагалось, что оно является неотрицательной функцией выпуклой вверх в начале интервала определения и выпуклой вниз на остальные части интервала. Это позволило получить надежные оценки характеристик затменной системы даже при сравнительно невысокой точности наблюдательных данных.

Авторы благодарны доктору У.Уэлшу (William F.Welsh) за предоставление наблюдательных данных. Выполнение исследований поддерживалось грантом программы "Университеты России".

² Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга, Москва, Россия

ON THE MODEL-INDEPENDENT RESTORATION OF BRIGHTNESS DISTRIBUTION ACROSS THE DISKS OF STARS FROM THE HIGH-PRECISION ECLIPSE LIGHT CURVES

M.B.BOGDANOV', A.M.CHEREPASHCHUK²

We estimated the accuracy of the restoration of brightness distributions across the disks of stars from the analysis of high-precision space photometry of classical eclipse systems and observations of the transits of planets. The solution of the ill-posed problem of restoration was carried out on the compact

Университет им. Н.Г.Чернышевского, Саратов,

Россия, e-mail: BogdanovMB@info.sgu.ru

set of the non-negative, monotonically non-increasing, convex upward functions. One of the problems, with which encounters this method in the case of stars with the thin photospheres, appears in the poor convergence of the solution at the point of the discontinuity of brightness distribution on the edge of the stellar disk. Nevertheless, the application of this method to the analysis of high-precision observational data is justified, since it makes it possible to obtain the estimation of limb darkening, not connected with any model assumptions. The restored brightness distribution for star HD 209458, the transit of planet across disk of which was observed by the space telescope HST, agrees well with the results of the nonlinear model fitting.

Key words: stars.restoration of brightness distribution across the disks

ЛИТЕРАТУРА

- 1. D. Proust, Bull. Associat. Franc. Observ. Etoiles Variables, N120, 20, 2007.
- 2. Затменные переменные звезды, ред. В.П.Цесевич, Наука, М., 1971.
- 3. Z.Kopal, Language of the stars, Dordrecht: D.Reidel, 1979.
- J.Kallrath, E.F.Milone, Eclipsing binary stars: modeling and analysis, Springer, 1999.
- 5. М.И.Лавров, Астрон. ж., 48, 951, 1971.
- 6. А.И.Халиуллина, Х.Ф.Халиуллин, Астрон. ж., 61, 393, 1984.
- 7. M.B.Bogdanov, A.M.Cherepashchuk, Astron. Astrophys. Transactions, 26, 151, 2007.
- 8. М.Б.Богданов, А.М.Черепащук, Астрон. ж., 84, 627, 2007.
- 9. А.М.Черепащук, А.В.Гончарский, А.Г.Ягола, Астрон. ж., 45, 1191, 1968.
- А.М. Черепащук, А.В.Гончарский, А.Г.Ягола, Некорректные задачи астрофизики, Наука, М., 1985.
- 11. G.W.Henry, G.W.Marcy, R.P.Butler, S.S.Vogt, Astrophys. J., 529, L41, 2000.
- 12. T.M.Brown, D.Charbonneau, R.L.Gilliland et al., Astrophys. J., 552, 699, 2001.
- 13. R.A. Wittenmyer, W.F. Welsh, J.A. Orosz et al., Astrophys. J., 632, 1157, 2005.
- 14. H.Knutson, D.Charbonneau, R.W.Noyes et al., Astrophys. J., 655, 564, 2007.
- 15. G.E.Ballester, D.K.Sing, F.Herbert, Nature, 445, 511, 2007.
- 16. A. Gimenez, Astrophys. Space Sci., 304, 21, 2006.
- 17. И.И.Антохин, А.М.Черепащук, Астрон. ж., 84, 542, 2007.

606