АСТРОФИЗИКА

ТОМ 51 НОЯБРЬ, 2008 ВЫПУСК 4

РОЛЬ ФОРМЫ ПЕРЕГИБА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ДЛЯ УСТОЙЧИВОСТИ ГАЗОПЫЛЕВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПЛОСКИХ ГАЛАКТИК

В.А.АНТОНОВ, А.С.БАРАНОВ

Поступила 18 мая 2008
Принята к печати 20 августа 2008

Теоретически рассмотрен вопрос об устойчивости вращающегося газопылевого гравитирующего диска в зоне возможного перегиба угловой скорости. Получены границы устойчивости для достаточно разнообразных кривых для частной модели пылевой среды без давления, но с учетом общего гравитационного поля галактики. Обсуждено применение к реальным галактикам.

Ключевые слова: *плоские галактики:угловая скорость:перегиб: устойчивость:газопылевая среда*

1. *Введение.* В [1] нами была рассмотрена в частном случае достаточно холодной среды "слабая" неустойчивость, возникающая в зоне перегиба угловой скорости с инкрементом порядка $\sim k v_0$, где k - волновое число, соответствующее трансверсальному направлению, а v_0 - характерное изменение скорости вращения в данной узкой зоне. Указанный инкремент и сам критерий неустойчивости не выражаются достаточно простым образом через глобальные характеристики - для скольконибудь подробного исследования необходимо знать ход линейной скорости $v_\theta = \varphi(y)$, отсчитываемой по отношению к населению середины рассматриваемой зоны (x, y - как и в [1], локальные координаты, направленные соответственно по трансверсали и по радиусу). В [1] вводилась еще частота колебаний $\omega = k\nu$ и вспомогательный параметр

$$q = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \pi G \rho}, \tag{1}$$

где Ω_0 - угловая скорость вращения среды в данной зоне, а ρ - плотность среды (в пределах данной зоны полагаем плотность постоянной). Мы учитываем самогравитацию среды, но пренебрегаем эффектами давления, т.е. газопылевая среда считается достаточно холодной. Кроме того, систему считаем достаточно протяженной по третьей, вертикальной координате z, так что потенциал рассматривается в рамках цилиндрической геометрии. В предположении узости зоны перегиба кривой вращения в сравнении с радиусом галактики в [1] получено локальное линеаризованное уравнение развития возмущений

$$\eta''(y)+(q-1)\frac{\varphi''(y)}{\varphi(y)-\nu}\eta(y)=0 \qquad (2)$$

для возмущения гравитационного потенциала при надлежащем начале отсчета последнего. Граничным условием является стремление $\eta(y)$ к каким-либо постоянным на обоих концах $y\to\pm\infty$. Неустойчивость появляется, когда уравнение (2) с указанными граничными условиями допускает решение с комплексным ν.

Практический интерес представляет только случай $q>1$, так как иначе развивается быстрая джинсовская неустойчивость. В [1] указан как пограничный для неустойчивости класс возможных кривых $\varphi(y)$ именно:

$$\varphi=\begin{cases}\sqrt{h^2+y^2}\sin\left(s\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{h}\right) & (q>4),\quad s=\sqrt{\dfrac{q-4}{q-1}}\\ \sqrt{h^2+y^2}\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{h} & (q=4)\\ \sqrt{h^2+y^2}\,\mathrm{sh}\left(\sigma\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{h}\right) & (1<q<4),\quad \sigma=\sqrt{\dfrac{4-q}{q-1}}\end{cases} \qquad (3)$$

при произвольной характерной ширине зоны h. На рис.1 изображена кривая $\varphi(y)$, согласно (3), при $q=1.3$ (горизонтальный и вертикальный масштаб при этом не играют никакой роли, существенна только форма кривой). При бóльших значениях q кривые $\varphi(y)$ имеют более плавный ход.

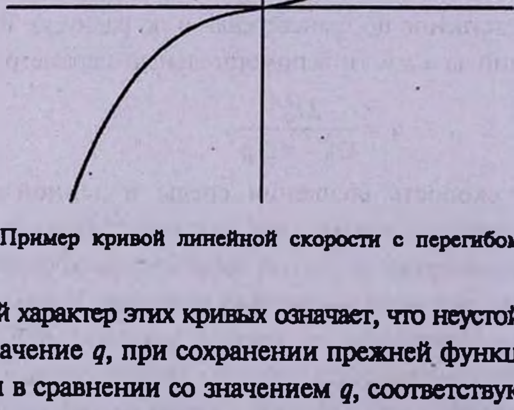

Рис.1. Пример кривой линейной скорости с перегибом, заданный в (3).

Граничный характер этих кривых означает, что неустойчивость начинается, как только значение q, при сохранении прежней функции $\varphi(y)$, несколько увеличивается в сравнении со значением q, соответствующим примечаниям к (3). Из определения (1) ясно, что увеличение q эквивалентно увеличению ρ при $\Omega_0=\mathrm{const}$.

Другим примером, рассмотренным в [1], была функция

$$\varphi(y) = y\left(y^2 + h^2\right), \tag{4}$$

ее график приведен на рис.2.

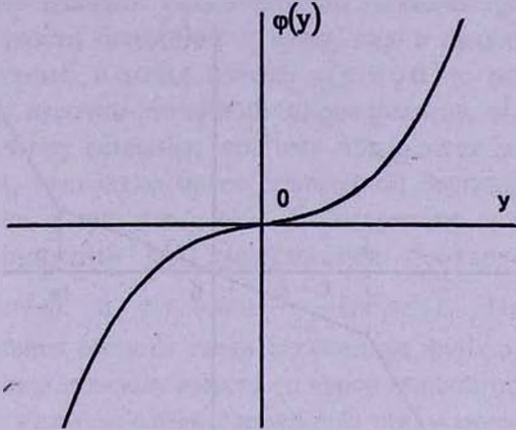

Рис.2. Другой сходный пример кривой линейной скорости, заданный в (4).

В этом случае критическое значение было

$$q = \frac{25}{24}. \tag{5}$$

2. ***Анализ задачи при резких изломах кривой вращения.*** Предыдущие примеры относились все же к достаточно гладким кривым $\varphi(y)$. Однако немалый интерес в физических задачах и в астрономии представляют модели с существенно негладким полем в исходном состоянии. В теории плазмы анализ устойчивости таких резко неоднородных структур представлен в [2]. В звездной динамике известным простым примером является линдбладовская неустойчивость круговых орбит за резким краем галактики [3]. Более изощренный вариант такой кривой неустойчивости можно усмотреть в [4]. Аналогичное исследование гидродинамической самогравитирующей модели (в цилиндрическом приближении) с резкой границей имеется в [5] и ряде последующих работ.

В нашей задаче простейшим примером может служить симметричная ломаная линия, состоящая из трех прямолинейных участков.

Как видно из рис.3, мы приписываем кривой вращения постоянный наклон α в пределах среднего интервала ($-a$, a) и другой постоянный наклон β в оставшихся полубесконечных интервалах. Таким образом,

$$\varphi(y) = \begin{cases} \alpha y & (|y| < a) \\ \alpha a + \beta(y - a) & (y > a) \\ -\alpha a + \beta(y + a) & (y < -a). \end{cases} \tag{6}$$

В отличие от предыдущих примеров, где неустойчивость начиналась как апериодическая (с чисто мнимым ν), задание кривой (6) такому механизму возникновения неустойчивости противоречит. Действительно, на прямолинейном участке кривой $\varphi(y)$ имеем $\varphi''(y)=0$ и, согласно (2), $\eta(y)$ оказывается

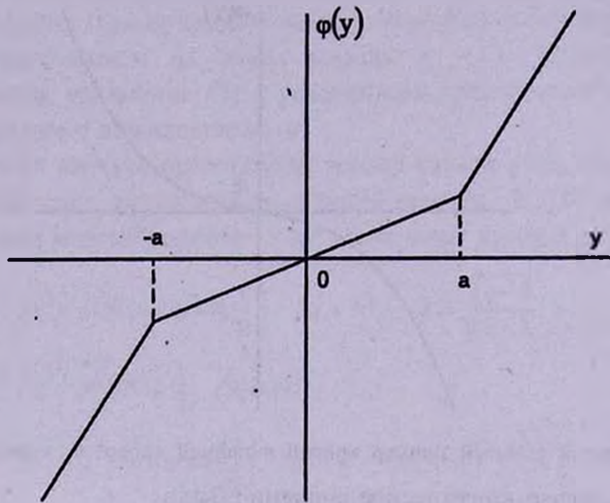

Рис.3. Задание линейной скорости при помощи ломаной.

линейной функцией. В частности, на каждом из внешних участков, в силу граничного условия, $\eta(y)=\mathrm{const}$. Вблизи самих точек $y=\pm a$ можем использовать функцию Дирака $\varphi''(y)=(\beta-\alpha)\delta(y-a)$, если $y\approx a$ или $\varphi''(y)=(\alpha-\beta)\delta(y+a)$, если $y\approx -a$. Тогда, подставив в (2) предполагаемое решение в виде

$$\eta(y)=\begin{cases} my+n & (|y|<a) \\ ma+n & (y>a) \\ -ma+n & (y<-a) \end{cases}$$

с постоянными m, n, получаем

$$-m\delta(y-a)+(q-1)\frac{(\beta-\alpha)\delta(y-a)}{\alpha a-\nu}(ma+n)=0 \quad (y\approx a)$$
$$m\delta(y+a)+(q-1)\frac{(\alpha-\beta)\delta(y+a)}{-\alpha a-\nu}(-ma+n)=0 \quad (y\approx -a).$$

После естественных сокращений остается система двух линейных однородных уравнений для m и n, а приравнивание нулю ее определителя дает $(q-1)(\alpha-\beta)a[(q-1)\beta-q\alpha]=0$, но это равенство при заданных параметрах a, α, β, q не удовлетворяется ни при каких значениях ν. Более тщательный анализ с превращением уравнения (2) в интегральное и применением, согласно Ландау, преобразования Лапласа по времени, приводит к тому же выводу: нарастающих функций $\eta(y)$ не существует. Однако этот вывод при любом подходе имеет силу с важной оговоркой: знаменатель $\varphi(y)-\nu$ не приближается к нулю в особых точках.

3. *Сглаживание излома.* Таким образом, остается принять, что ν на границе устойчивости близко не к нулю, как в предшествовавших примерах, а к значению в точке излома $\varphi(y)=a\alpha$ (с малой мнимой добавкой). В рамках кусочно-линейной аппроксимации $\varphi(y)$ не удается добиться однозначности решения; поэтому приходится заменять $\varphi(y)$ более реалистичной, несколько более сглаженной функцией. Именно, выбираем расстояние ε так, что $\varepsilon \ll a$. В интервалах $a-\varepsilon<y<a+\varepsilon$ и $-a-\varepsilon<y<-a+\varepsilon$ функция $\varphi(y)$ заменяется соответственно на $\varphi(y)=\alpha y+\dfrac{\beta-\alpha}{4\varepsilon}(y-a+\varepsilon)^2$ и $\varphi(y)=\alpha y-\dfrac{\beta-\alpha}{4\varepsilon}(y+a-\varepsilon)^2$. При прежних значениях в оставшейся области такая сглаженная функция, как легко проверить, непрерывна повсюду вместе со своей первой производной.

Из уравнения (2) в данном случае следует, что $\eta(y)$ - линейная функция как в среднем интервале $(-a+\varepsilon, a-\varepsilon)$ так и крайних $|y|>a+\varepsilon$, причем в последних $\eta(y)$ просто постоянна. В интервале же сглаживания $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ получается уравнение

$$\left[\alpha y+\frac{\beta-\alpha}{4\varepsilon}(y-a+\varepsilon)^2-\nu\right]\eta''(y)+(q-1)\frac{\beta-\alpha}{2\varepsilon}\eta(y)=0. \tag{7}$$

При подстановке, согласно вышесказанному, $\nu=\alpha a+\varepsilon\mu$, где μ - некоторый новый параметр, и замене аргумента $y=a+\varepsilon\left(u-\dfrac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right)$ получаем из (7):

$$\left[u^2-\frac{4\mu}{\beta-\alpha}-\frac{4\beta\alpha}{(\beta-\alpha)^2}\right]\frac{d^2\eta}{du^2}+2(q-1)\eta=0 \tag{8}$$

в интервале

$$\frac{2\alpha}{\beta-\alpha}<u<\frac{2\beta}{\beta-\alpha}.$$

Введем еще обозначение

$$u_0^2=\frac{4\mu}{\beta-\alpha}-\frac{4\alpha\beta}{(\beta-\alpha)^2}$$

и положим $u=u_0w$. Тогда уравнение (8) приобретает более простую форму

$$\left(w^2-1\right)\frac{d^2\eta}{dw^2}+2(q-1)\eta=0 \tag{9}$$

и остается сделать подстановку $\chi=d\eta/dw$, чтобы привести (9) к стандартному виду Лежандра

$$\frac{d}{dw}\left[\left(1-w^2\right)\frac{d\chi}{dw}\right]+2(1-q)\chi=0. \tag{10}$$

Граничным условием на правом конце

$$w = \bar{w} = \frac{2\beta}{(\beta-\alpha)u_0} \tag{11}$$

является $\eta'(\bar{w}) = 0$, или $\chi = 0$. Общее решение (10) записывается в виде

$$\chi(w) = c_1 P(w) + c_2 Q(w),$$

где c_1 и c_2 - пока произвольные постоянные, а $P(w)$ и $Q(w)$ - функции Лежандра, но при специальной, удобной для нас нормировке: $P(w) = 1$, $P'(w) = 0$, $Q(w) = 0$, $Q'(w) = 1$, т.е. мы разлагаем общее решение в суперпозицию четного и нечетного. Тогда на правом конце получается просто $c_1 P(\bar{w}) + c_2 Q(\bar{w}) = 0$ и можно взять для дальнейшего

$$c_1 = Q(\bar{w}), \quad c_2 = -P(\bar{w}). \tag{12}$$

Сформулируем условие на левом конце в терминах функции $\eta(y)$. Из (9) следует:

$$\eta = \frac{(w^2-1)\frac{d^2\eta}{dw^2}}{2(1-q)} = \frac{(w^2-1)\frac{d\chi}{dw}}{2(1-q)}.$$

Вместе с $d\eta/dw = \chi$, это дает

$$\left[\frac{d\eta}{dw}\Big/\eta\right]_{w=-\bar{w}} = \left[\frac{2(1-q)\chi}{(w^2-1)\frac{d\chi}{dw}}\right]_{w=-\bar{w}} = \frac{A}{B}, \tag{13}$$

где $A = 4(1-q)P(\bar{w})Q(\bar{w})$, $B = (1-\bar{w}^2)[P(\bar{w})Q'(\bar{w}) + Q(\bar{w})P'(\bar{w})]$.

Если дифференцировать η не по w, а по первоначальному аргументу y, то в правую часть (13) войдет постоянный делитель εu_0, а само равенство (13) будет относиться к точке $y = a - \varepsilon$, т.е.

$$\left[\frac{d\eta}{dy}\Big/\eta\right]_{y=a-\varepsilon} = \frac{A}{B\varepsilon u_0}. \tag{14}$$

В другом промежуточном интервале картина несколько иная, так как сингулярность отсутствует и y можно просто заменить на $-a$ и точно так же допустить $\varphi(y) \approx -\alpha a$. Получаем уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\eta''(y) - \frac{q-1}{2\alpha a}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2\varepsilon}\eta(y) = 0. \tag{15}$$

Точное решение для уравнения (15) показывает, что при малых ε функция $\eta(y)$ в интервале $(-a-\varepsilon, -a+\varepsilon)$ не успевает существенно измениться. Это легко проверяется: интегрирование (15) по интервалу малой длины 2ε дает

$$\eta(y)\Big|_{y=-a-\varepsilon}^{y=-a+\varepsilon} \approx \frac{q-1}{2\alpha a}(\alpha-\beta)\eta(-a)$$

и изменение самой функции $\eta(y)$ - порядка ε. Таким образом, внутри левого промежуточного интервала достаточно брать

$$\eta(y) = \eta(-a) + \frac{q-1}{2\alpha a}(\alpha-\beta)\eta(-a)(y+a) \tag{16}$$

(первые два члена формулы Тейлора). Ввиду отмеченной выше линейности функции $\eta(y)$ в среднем интервале, формула (16) распространяется и на него, так что должно быть

$$\left[\frac{d\eta}{dy}\Big/\eta\right]_{y=a-\varepsilon} = \frac{\frac{q-1}{2\alpha a}(\alpha-\beta)}{1+\frac{q-1}{\alpha}(\alpha-\beta)}. \tag{17}$$

Нас интересует предельный случай $\varepsilon \to 0$. Но тогда сравнение (14) и (17) показывает, что в пределе совместимость этих соотношений достигается, когда либо $P(\overline{w}) = 0$, либо $Q(\overline{w}) = 0$.

4. *Критерии неустойчивости*. Вопрос об устойчивости или неустойчивости системы свелся к анализу комплексных корней функций $P(\nu)$ и $Q(\nu)$. (Непосредственно соответствующие указания в математической литературе найти не удалось). Обратим сначала внимание на случай, когда коэффициенты в члене без производной в (10) представляются стандартным для полиномов Лежандра образом:

$$2(1-q) = n(n+1), \tag{18}$$

через вещественные n.

При целочисленном четном $n \geq 0$ наша функция P отличается от обычного полинома Лежандра P_n только нормировкой на единицу при $w = 0$. Хорошо

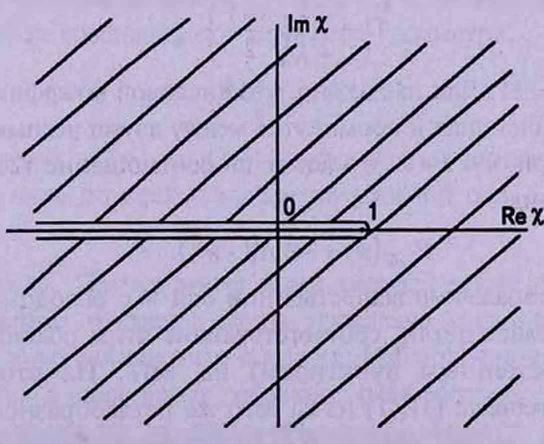

Рис.4. Конформное преобразование, осуществляемое функцией $P_2(\nu)$.

известно, что у полинома Лежандра комплексных корней нет - все они вещественны. В терминах конформных преобразований мы говорим, что, например, $P_2(w)$ при нашей нормировке отображает верхнюю полуплоскость ν на плоскость другой комплексной переменной χ с вырезанным полубесконечным вещественным интервалом $(-\infty, 1)$ (см. рис.4).

При всяком другом n, кроме четного $n \geq 0$, вблизи точек $\nu = \pm 1$ появляется логарифмическая особенность типа $\ln(1 - w^2)$. Для оценки стремления коэффициента при логарифме можно, например, воспользоваться известным разложением по степеням w^2. В нашей нормировке

$$P_n(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k - \frac{n}{2}\right)\Gamma\left(k + \frac{n+1}{2}\right)}{(2k)!\,\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}(2w)^{2k}. \tag{19}$$

Стремление этой функции к бесконечности при $w \to 1$ связано с асимптотикой типа $1/n$ коэффициентов в правой части (19) при больших k. Эта главная составляющая коэффициентов находится обычным путем посредством применения формулы Стирлинга. Таким образом, получается асимптотический вид

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}k^{-1}.$$

коэффициентов при $(w)^{2k}$ и в силу тождества

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{2k}}{k} = -\ln(1 - w^2)$$

искомое асимптотическое представление

$$P_n(w) \approx -\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\ln(1 - w^2) \tag{20}$$

вблизи точек $w = \pm 1$. Для нас важно, что числовой коэффициент в правой части (20) сохраняет знак в промежутке между двумя четными значениями n. Например, при $n = 2 + \varpi$ с малым ϖ соотношение (20) приобретает очень простой вид

$$P_{2+\varpi}(w) \approx -\varpi \ln(1 - w^2). \tag{21}$$

На рис.5 отображение вещественной оси w с обходом особых точек $w = \pm 1$ сверху делает петли, соответствующие этим обходам со скачком (условно изображенным пунктиром) на $\pi\varpi i$. На отображении же внутреннего интервала (-1, 1) из-за того же петлеобразного хода образа появляется нуль для $P_{2+\varpi}(w)$, но только для вещественных w, близких к ± 1. Комплексные же корни $P_{2+\varpi}(w)$ отсутствуют: их проникновение с бесконечности исключено из-за степенной асимптотики $P_n(w)$ при больших $|w|$. Это рассуждение без особого труда распространяется на все иррациональные $n > 1/2$. Точно так же рассуждаем в отношении нечетных функций

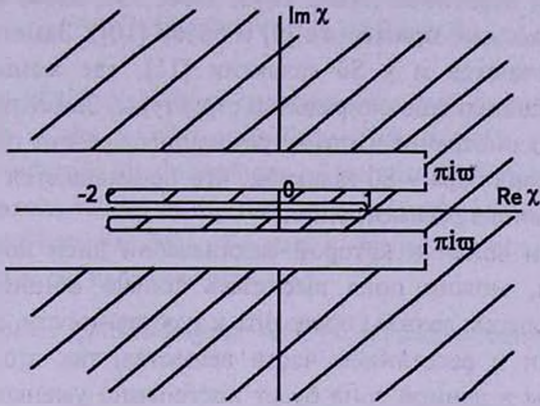

Рис.5. Конформное преобразование, осуществляемое функцией Лежандра с индексом, близким к 2.

$Q_n(w)$. Изменяются только некоторые детали. В частности, асимптотика при w, близких к $w = \pm 1$, имеет вид

$$Q_n(w) \approx -\frac{\sqrt{\pi}}{n\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} w \ln\left(1 - w^2\right).$$

Итак, при $n > -1/2$, или, согласно (18)

$$q < \frac{9}{8} \tag{22}$$

излом кривой $\varphi(y)$ не вызывает неустойчивости. Напротив, неустойчивость наблюдается в противоположном случае $q > 9/8$, так как асимптотика при больших $|w|$ из-за комплексного характера параметра

$$n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{8(q-1) - \frac{1}{4}}$$

у наших функций $P_n(w)$ и $Q_n(w)$ оказывается колебательной и они обращаются в нуль по крайней мере на мнимой оси ν в бесконечном множестве точек.

5. *Заключение.* Проведенные нами теоретические расчеты должны давать определенное основание судить, насколько близки к неустойчивости диски тех или иных конкретных галактик. Наблюдения кривых вращения плоских галактик в наше время собраны в ряде обзоров, например в [6]; недавнее обсуждение тех же самых объектов - галактик см. в [7]. Резкие перегибы кривых вращения, по-видимому, наблюдаются у NGC 3456, UGC

210 и других объектов, хотя при интерпретации таких кривых возникают, кроме инструментальных неточностей, помехи, с нашей точки зрения, из-за спиральной структуры и других локальных неоднородностей. Другие примеры резких перегибов (NGC 2273, 3898, 338, 5289) можно найти в [8] (см. также сходные примеры в [9] и обзор [10]). Заметим, что резкие перегибы встречаются и у S0 галактик [11], где меньше оснований подозревать вмешательство спиральной структуры. Заметим также, что мы исключаем из рассмотрения часто встречающиеся резкие перегибы кривой вращения на краях бара у S0 галактик, что не вмещается в нашу модель и требует отдельного рассмотрения.

О поведении зоны, в которой газопылевой диск достиг состояния неустойчивости, можно пока высказать только общие соображения. Нелинейные процессы должны приводить к турбулентности, сопровождаемой потерей энергии и рассеянием части вещества, так что, скорее всего, плотность среды в данной зоне будет постепенно уменьшаться, пока не достигнет критического состояния, когда неустойчивость исчезает. С этими соображениями согласуется, вероятно, тот факт, что вышеупомянутые перегибы угловой скорости отмечаются в основном в радионаблюдениях или по звездным линиям, а имеющиеся кривые вращения по межзвездным линиям $H\alpha$, что означало бы достаточную массу газа, не вытесненную неустойчивостями, показывают более плавный ход [12]. Заметим как следствие из предыдущих расчетов, что для довольно широкого класса умеренно изогнутых кривых вращения критическая плотность (при $q=9/8$) составляет $\sim \Omega_0^2/(9\pi G)$. Этот результат получен в рамках цилиндрической геометрии. В случае, если толщина диска существенно меньше зоны перегиба угловой скорости, больше соответствует истине приближение бесконечно тонкого слоя, что приводит к несколько иному математическому аппарату. При дальнейших исследованиях надо будет также принимать во внимание упругость газа, которая, очевидно, несколько стабилизирует систему.

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория,
Россия, e-mail: baranov@gao.spb.ru

THE ROLE OF THE INFLECTION FORM OF THE ANGULAR VELOCITY FOR THE STABILITY OF THE GAS-DUST COMPONENT OF PLANE GALAXIES

V.A.ANTONOV, A.S.BARANOV

The problem of the stability of a rotating gas-dust component gravitating disc in the zone of the possible inflection of the angular velocity has been theoretically considered. The boundaries of the stability for sufficiently various curves for the special model of the dust medium without pressure, but regard to the general gravitational field of a galaxy, have been obtained. The application to real galaxies has been discussed.

Key words: *plane galaxies:angular velocity:inflection:stability:gas-dust medium*

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Антонов, А.С.Баранов*, Астрон. ж., 75, 467, 1998.
2. *А.Б.Михайловский*, Теория плазменных неустойчивостей, т.2. Неустойчивости неоднородной плазмы, Атомиздат, М., 1977.
3. *С.Чандрасекар*, Принципы звездной динамики, ИЛ, М., 1948.
4. *A.J.Kalnajs*, Astrophys. J., 175, 63, 1972.
5. *А.Г.Морозов, А.М.Фридман*, Астрон. ж., 50, 1028, 1973.
6. *D.S.Mathewson, V.L.Ford, M.Buchhorn*, Astrophys. J., Suppl. Ser., 81, 413 1992.
7. *M.S.Seigar, D.L.Block, I.Pierou, N.E.Chomey, P.A.Jamess*, Non. Notic. Roy. Astron. Soc., 356, 1065, 2005.
8. *E.Noordermeer, J.M. van derHulst, R.Sanasi, R.S.Swaters*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 376, 1513, 2007.
9. *S.Casertano, J.H.Gorkom*, Astron. J., 101, 1231, 1991.
10. *Д.И.Макаров, А.Н.Биранков, Н.В.Тюрина*, Письма в АЖ, 25, 813, 1999.
11. *D.Fisher*, Astron. J., 113, 950, 1997.
12. *R.A.Swaters, B.F.Madore, M.Frewhella*, Astrophys. J. Lett., 531, L107, 2000.