

О НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ДИСКА. I. БАРОПОДОБНАЯ И КОЛЬЦЕОБРАЗНАЯ МОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ

С.Н.НУРИТДИНОВ^{1,2}, К.Т.МИРТАДЖИЕВА^{2,1}, МАРИАМ СУЛТАНА³

Поступила 28 февраля 2008

Принята к печати 9 апреля 2008

Исследованы неустойчивости бароподобной и кольцевой мод возмущений на фоне нелинейно колеблющейся в своей плоскости дисковой модели, которая является нестационарным обобщением известной модели Бисноватого-Когана-Зельдовича. Найдены соответствующие нестационарные аналоги дисперсионного уравнения для указанных двух мод колебаний. Результаты расчетов приводятся в виде критических зависимостей начального вириального отношения от степени вращения. Выполнен также сравнительный анализ инкрементов гравитационной неустойчивости этих мод колебаний. Неустойчивость бар моды имеет место, если начальная полная кинетическая энергия диска составляет не более, чем 10.4% от начальной потенциальной энергии. Ее механизм связан с неустойчивостью радиальных движений, которая носит аperiодический характер при малых значениях параметра вращения $\Omega < 0.1$, а при других значениях - колебательный характер. Расчеты показывают, что кольцевая структура может формироваться в результате неустойчивости радиальных движений, если начальная полная энергия модели составляет не более, чем 5.2% от начальной потенциальной энергии, независимо от значения Ω .

Ключевые слова: модели:самогравитирующие диски

1. *Введение.* Известно, что одним из основных физических механизмов происхождения крупномасштабных структур в галактиках и ряде других самогравитирующих системах является гравитационная неустойчивость. Многие виды гравитационных неустойчивостей обнаружены, в основном, благодаря построению аналитически точных равновесных моделей различных гравитирующих систем (см., например, [1-4] и ссылки там). Сегодня можно утверждать, что теория устойчивости точных моделей равновесных бесстолкновительных самогравитирующих систем (БСС) в основном завершена. На повестке дня теперь стоит весьма сложная, но более интересная проблема - исследование устойчивости неравновесных, нелинейно нестационарных моделей БСС.

Цель данной работы состоит в изучении роли исходной нелинейной нестационарности в развитии неустойчивости конкретных мод возмущений, которые развиваются на фоне заданной начальной неравновесности. Ранее в [5-7] такая задача решалась для нелинейно пульсирующих сферических моделей Эйнштейна и Камма, построенных одним из авторов этой статьи

(С.Н.Н.). Здесь же мы исследуем аналогичную задачу для нестационарного обобщения известной равновесной дискообразной модели Бисноватого-Когана-Зельдовича [1]. Данное нестационарное обобщение приведено, в частности, в [8]. Ниже, на фоне радиально колеблющегося самогравитирующего диска мы изучаем две самые интересные моды колебаний: бароподобную и кольцеобразную моды возмущений. В обсуждении укажем их сравнение и возможные приложения полученных нами результатов.

2. Исходная нестационарная модель. Как известно, нестационарное уравнение Больцмана для БСС непосредственно не поддается аналитическому решению из-за наличия там нелинейного члена. С другой стороны, не всякое решение этого уравнения допускает теоретический анализ его устойчивости. Вот почему имеет смысл обобщать известные равновесные решения для конкретных БСС с учетом того или иного характерного типа глобальной нестационарности. А одним из главных видов последней являются прежде всего глобальные радиальные движения системы в целом. Именно такое обобщение модели Бисноватого-Когана-Зельдовича выполнено автором работы [8], где дана фазовая плотность этой нестационарной модели в виде

$$\Psi(r, v_r, v_\perp, t) = \frac{\sigma_0}{2\pi\Pi\sqrt{1-\Omega^2}} \left[\frac{1-\Omega^2}{\Pi^2} \left(1 - \frac{r^2}{\Pi^2} \right) - (v_r - v_a)^2 - (v_\perp - v_b)^2 \right]^{-1/2} \cdot \chi(R-r), \quad (1)$$

а соответствующая поверхностная плотность диска равна

$$\sigma(\vec{r}; t) = \frac{\sigma_0}{\Pi^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad R(t) = R_0 \Pi(t). \quad (2)$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma(0; 0)$, функция $\Pi(t)$ имеет смысл коэффициента растяжения системы и

$$\Pi(t) = \frac{1 + \lambda \cos \psi}{1 - \lambda^2}, \quad t = \frac{\psi + \lambda \sin \psi}{(1 - \lambda^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

ψ - вспомогательная переменная, величина Ω - безразмерный параметр [1], характеризующий степень твердотельного вращения диска $0 \leq \Omega \leq 1$, а параметр $\lambda = 1 - (2T/U)_0$ точно выражается через значения вириального отношения в момент времени $t=0$, т.е. при $\lambda = 0$ мы имеем равновесный диск авторов работы [1]. В нестационарной модели (1) $0 \leq \lambda \leq 1$, v_r и v_\perp - радиальная и тангенциальная компоненты скорости "частицы" с координатой $\vec{r}(x, y)$, модуль которой просто выражается с соответствующей равновесной координатой r_0 в виде $r = \Pi(t) \cdot r_0$. Наконец, в (1)

$$v_a = -\lambda \sqrt{1 - \lambda^2} \frac{r \sin \psi}{\Pi^2}, \quad v_b = \frac{\Omega r}{\Pi^2}, \quad (4)$$

причем принята известная нормировка $\pi^2 G \sigma_0 = 2 R_0$, где радиус равновесного диска R_0 везде принимаем равным 1. Отметим также, что

нелинейно нестационарная модель (1) совершает строгие радиальные колебания с периодом

$$P(\lambda) = \frac{2\pi}{(1 - \lambda^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Из (1) также видно, что диаграммы скоростей равновесной и неравновесной моделей являются изотропными. Дисперсии скоростей в радиальном и трансверсальном направлениях одинаковы и равны $(1 - \Omega^2)(\Pi^2 - r^2)/3\Pi^4$. Согласно теории [4] гравитирующего диска с массой M и радиусом R , его потенциальная энергия U и кинетическая энергия вращения W , соответственно, равны

$$U = -\frac{3\pi GM^2}{10R}, \quad W = \frac{\omega^2 R^2 M}{5}. \quad (6)$$

Здесь ω - угловая скорость вращения диска. Согласно (1), $\omega = \Omega/\Pi^2(t)$. С учетом этого из (6) находим выражение для параметра Острикера-Пиблса

$$\frac{W}{|U|} = \frac{\Omega^2(1 - \lambda^2)}{2(1 + \lambda \cos\psi)}. \quad (7)$$

Из (7) нетрудно установить, что критерий устойчивости Острикера-Пиблса в данном случае не выполняется.

Нелинейная нестационарность модели (1) существенно затрудняет анализ ее устойчивости, чем соответствующего равновесного диска, так как сильно усложняет вывод нестационарного аналога дисперсионного уравнения (НАДУ) в общем случае (напомним, что устойчивость соответствующей равновесной модели изучена параллельно рядом авторов [3,9,10] из-за сложности даже случая $\lambda = 0$). Вот почему наиболее интересные моды возмущения целесообразно исследовать отдельно.

3. Вывод НАДУ секториальных мод: анализ бар-моды.

Поскольку бар-мода относится к классу секториальных возмущений, попытаемся сначала вывести НАДУ для них в общем случае.

Налагая малое возмущение на нелинейно нестационарную модель (1), из бесстолкновительного уравнения Больцмана можно получить следующее характеристическое уравнение, которое с учетом малого возмущения имеет вид

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\frac{\bar{r}}{\Pi^3(t)} + \text{grad}(\delta\Phi), \quad (8)$$

где учтена нормировка $\pi^2 G \sigma_0 = 2$, $\delta\Phi$ - возмущение потенциала, являющееся функцией от возмущенных компонент вектора $\bar{r} + \delta\bar{r}$. Следовательно, в (8) возмущение $\delta\Phi$ пока представляет собой нелинейную функцию от $\delta\bar{r}$. Линеаризуем (8) и перейдем от времени t к вспомогательному аргументу ψ (см. (3)). Тогда (8) примет вид

$$\Lambda \delta \bar{r} = \left[(1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2}{d\psi^2} + \lambda \sin \psi \frac{d}{d\psi} + 1 \right] \delta \bar{r} = \Pi^3(\psi) \frac{\partial(\delta \Phi)}{\partial \bar{r}}, \quad (9)$$

причем теперь $\delta \Phi$ берется в невозмущенной точке $\bar{r}(x, y, z)$. Поскольку отклонение частицы в возмущенном состоянии в текущий момент времени зависит от состояния поля в предыдущие моменты $\psi_1 \in [-\infty, \psi]$ и наша цель состоит в поиске неустойчивости, можно считать, что при $\psi_1 = -\infty$, $\delta x = \delta y = 0$. В текущий момент ψ в каждой точке находятся частицы с различными скоростями, поэтому для расчета возмущения плотности или деформации границы возмущенной системы следует перейти к смещению центра тяжести $(\overline{\delta x}, \overline{\delta y})$, усредняя (9) по пространству скоростей. Следовательно, из (9) мы находим

$$\overline{\delta \bar{r}} = \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) \left[\frac{\partial(\delta \Phi)}{\partial \bar{r}} \right] d\psi_1, \quad (10)$$

где $S(\psi, \psi_1)$ - аналог функции Грина, которая составляется стандартным образом из решения однородного уравнения в (9) и равна

$$S(\psi, \psi_1) = [\sin \psi (\cos \psi_1 + \lambda) - \sin \psi_1 (\cos \psi + \lambda)] (1 + \lambda \cos \psi_1)^{-2}. \quad (11)$$

Отметим, что пределы интеграла в (10) можно взять также и от 0 до ψ , полагая включение малого возмущения лишь на мгновения $t=0$. Но тогда надо добавить к нему решение однородного уравнения. Поэтому удобно пользоваться записью в виде (10).

Секториальные моды относятся к классу возмущений, которые развиваются только в плоскости диска (x, y) и не зависят от z . Учитывая природу исследуемой модели, по аналогии с теорией устойчивости стационарных моделей [3,10], секториальные возмущения будем описывать в виде

$$\delta \Phi = A(\psi)(x + iy)^m, \quad (12)$$

где $A(\psi)$ - искомая функция времени, m - азимутальное волновое число. Из (10), с учетом (12), имеем

$$\overline{\delta x} = -i \overline{\delta y} = m \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A(\psi_1) \overline{(x + iy)^{m-1}} d\psi_1. \quad (13)$$

По определению [5,6]

$$x_1 + iy_1 = (x + iy) H_\alpha + (u + i\vartheta) H_\beta, \quad (14)$$

причем

$$H_\alpha = \frac{\cos \psi (\lambda + \cos \psi_1) + \sin \psi \sin \psi_1}{1 + \lambda \cos \psi}, \quad (15)$$

$$H_\beta = (1 - \lambda^2)^{-3/2} [\sin \psi_1 (\lambda + \cos \psi) - \sin \psi (\lambda + \cos \psi_1)],$$

$$u + i\vartheta = (v_r + i v_\perp) \frac{x + iy}{r}. \quad (16)$$

Следовательно, согласно биному Ньютона,

$$\overline{(x_1 + iy_1)^{m-1}} = (x + iy)^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)! H_\alpha^{m-1-k}}{k!(m-1-k)!} \left(\frac{1}{r} H_\beta\right)^k \overline{(v_r + i v_\perp)^k}, \quad (17)$$

здесь

$$\overline{(v_r + i v_\perp)^k} = \frac{1}{\sigma(r, t)} \iint (v_r + i v_\perp)^k \Psi d v_r d v_\perp = (v_a + i v_b)^k, \quad (18)$$

что получено путем перехода к интегрированию по пекулярным скоростям $v'_r = v_r - v_a$ и $v'_\perp = v_\perp - v_b$.

Вычислим отклик плотности

$$\delta\sigma = -\frac{\partial(\overline{\delta x})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\delta y})}{\partial y}. \quad (19)$$

Подставляя сюда (13) и (17) и опуская члены низшей степени по координатам, с учетом (18), находим

$$\delta\sigma = \frac{m\sigma_0}{\Pi^4(\psi)} \xi^{-1} (x + iy)^m \int_{-\infty}^{\infty} C_{m-1}(\psi, \psi_1) \cdot \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A(\psi_1) d\psi_1, \quad (20)$$

где $\xi = (1 - r^2/R^2)^{1/2}$, а через $C_{m-1}(\psi, \psi_1)$ обозначена сумма в (17).

Из теории потенциала диска известно, что возмущению плотности

$$\delta\sigma = \sigma_0 R(\xi)^{-1} \cdot P_N^m(\xi) e^{im\varphi} \quad (21)$$

соответствует возмущение потенциала [3,10]

$$\delta\Phi = 2R^2 \cdot \frac{(N+m-1)!!(N-m-1)!!}{(N+m)!!(N-m)!!} \cdot P_N^m(\xi) \cdot e^{im\varphi}. \quad (22)$$

Сопоставляя (21) при $m=N$ с вычисленным результатом (20) и учитывая выражения для $\delta\Phi$, получим НАДУ секториальных мод в виде

$$\Pi^3(\psi) A(\psi) = \frac{(2m-1)!!}{(2m-2)!!} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A(\psi_1) C(\psi, \psi_1) d\psi_1. \quad (23)$$

Частный случай $\lambda = 0$ соответствует задаче об устойчивости равновесной модели, построенной в [1]. Полагая при этом $A(\psi) \sim \exp(i\omega\psi)$ и обозначая $\psi - \psi_1 = \zeta$, из (23) получим соответствующее дисперсионное уравнение задачи об устойчивости равновесной модели относительно секториальных мод колебаний

$$\int_0^{\infty} \sin\zeta (\cos\zeta - i\Omega\sin\zeta)^{m-1} e^{-i\omega\zeta} d\zeta = \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}. \quad (24)$$

Отсюда легко вытекает известное дисперсионное соотношение, полученное рядом авторов [3,9,10] независимо друг от друга.

Анализ устойчивости при произвольном λ удобно выполнить, переходя от (23) к дифференциальной форме записи НАДУ. С этой целью выносим знак суммы в $C_{m-1}(\psi, \psi_1)$ за знак интеграла в (23) и после некоторых

упрощений введем обозначение

$$L_{\tau}(\psi) = \int_{-\infty}^{\psi} \Pi^3(\psi_1) A(\psi_1) S(\psi, \psi_1) (\lambda + \cos \psi_1)^{m-1-\tau} (\sin \psi_1)^{\tau} d\psi_1. \quad (25)$$

Тогда, используя способ перехода от (9) к (10) в обратном порядке, имеем НАДУ в форме системы дифференциальных уравнений:

$$\Delta L_{\tau}(\psi) = \frac{2(2m-1)!!}{(2m)!!} (\lambda + \cos \psi)^{m-1-\tau} (\sin \psi)^{\tau} B(\psi), \quad (26)$$

где

$$B(\psi) = \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{m! \left(\cos \psi + \lambda - i \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} \sin \psi \right)^{m-1-\tau}}{\tau! (m-1-\tau)! (1 + \lambda \cos \psi)^{2m-2}} Q^{\tau} \cdot L_{\tau}(\psi), \quad (27)$$

причем $Q = (1 - \lambda^2) \sin \psi + i \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} (\cos \psi + \lambda)$.

В случае бар-моды $m=2$ НАДУ (26) примет вид

$$\Delta L_{\tau}(\psi) = \frac{3(\lambda + \cos \psi)^{1-\tau} (\sin \psi)^{\tau}}{2(1 + \lambda \cos \psi)^2} B(\psi), \quad \tau = 0; 1, \quad (28)$$

где $B(\psi) = \left(\cos \psi + \lambda - i \Omega \sqrt{1 - \lambda^2} \sin \psi \right) L_0(\psi) + Q \cdot L_1(\psi)$.

Если разделить функции L_{τ} на вещественные и мнимые части из-за наличия членов с $i \Omega$, то получим систему дифференциальных уравнений восьмого порядка.

Для невращающейся модели, когда $\Omega = 0$, система уравнений (28) может быть сведена к одному уравнению

$$\frac{d}{d\psi} \left\{ \frac{\frac{dB(\psi)}{d\psi} + 2[\sin \psi \cdot L_0(\psi) - (1 - \lambda^2) \cos \psi \cdot L_1(\psi)]}{1 + \lambda \cos \psi} \right\} = \frac{3B(\psi)}{2(1 + \lambda \cos \psi)^2}, \quad (29)$$

причем можно показать, что

$$\sin \psi \frac{dL_0}{d\psi} - (\lambda + \cos \psi) \frac{dL_1}{d\psi} = \sin \psi \cdot L_1 + \cos \psi \cdot L_0. \quad (30)$$

Используя (30), уравнение (29) приводим к виду

$$(1 + \lambda \cos \psi) \frac{d^2 B}{d\psi^2} + 3\lambda \sin \psi \frac{dB}{d\psi} + \left(\frac{5}{2} - 2\lambda \cos \psi \right) B = 0. \quad (31)$$

Применяя к (31) метод определения критического состояния, приведенного нами в [5, 7], находим искомые критические значения λ и начального вириального отношения

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{5}{8}} \cong 0.7906, \quad \left(\frac{2T}{|U|} \right)_0 = 1 - \sqrt{\frac{5}{8}} \cong 0.2094. \quad (32)$$

При произвольном $\Omega \neq 0$ мы решаем (28) численно методом устойчивости периодических решений [11] и находим зависимость критического значения начального вириального отношения от степени вращения модели Ω (рис.1). Как видно из рисунка, в области $0.209 < (2T/U)_0 < 0.430$, $0 \leq \Omega < 0.12$ имеется остров устойчивости. Вращение модели играет всегда

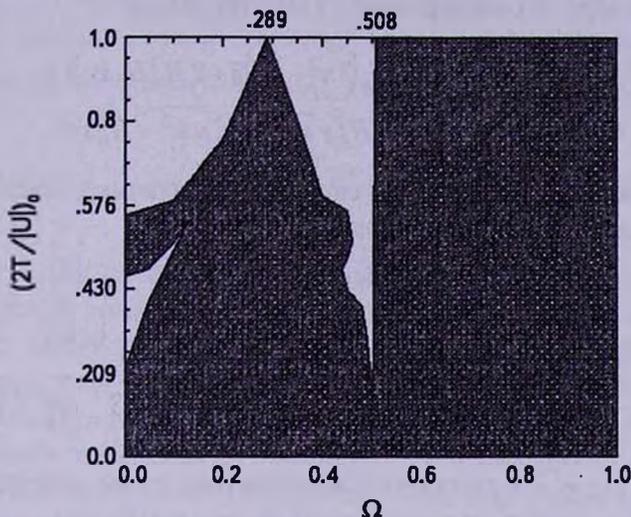


Рис.1. Критическая зависимость начального вириального отношения от степени вращения модели для случая бароподобной моды колебаний. Область неустойчивости заштрихована.

дестабилизирующую роль, кроме интервала $0.289 < \Omega < 0.49$. Маргинальная кривая доходит до значения $(2T/U)_0 = 1$ при двух значениях Ω , а именно $\Omega_1 = 0.289$ и $\Omega_2 = 0.507$. Точка $\Omega = \Omega_1$, $\lambda = 0$ является устойчивой в рамках линейного приближения и на оси абсцисс образует подобие точки ветвления.

Здесь имеет место нелинейный эффект, связанный со сложным резонансом между частотами коллективных движений линейной теории и нелинейных колебаний модели (1). Точка же $\Omega_2 = 0.507$ хорошо известна в линейной теории. При $\Omega > \Omega_2$ линейные и нелинейные колебания полностью неустойчивы.

4. Вывод и анализ НАДУ для моды (4;0). Вывод НАДУ для общего случая, когда $N \neq m$, $\lambda \neq 0$, а

$$\delta\Phi = A_{Nm}(\psi)r^{N-m}(x+iy)^m \quad (33)$$

требует иного математического аппарата и связан с весьма сложными расчетами, и поэтому будет дан нами в следующей нашей статье. Здесь полезно рассмотреть отдельно конкретную моду колебания с $N=4$; $m=0$, неустойчивость которой может привести к формированию чисто кольцевой структуры на фоне нестационарной модели (1).

Итак, пусть $\delta\Phi = A_{40}(\psi)(x^2 + y^2)^2$, тогда смещение центра в возмущенной системе, согласно (10), определяется в виде

$$\overline{\delta\vec{r}} = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{40}(\psi_1) \overline{r_1(x_1^2 + y_1^2)} d\psi_1. \quad (34)$$

Здесь, в частности, в соответствии с (14)-(16) имеем

$$\begin{aligned} \overline{x_1(x_1^2 + y_1^2)} &= H_\alpha^3 x^3 + H_\alpha^2 H_\beta (3x^2 + y^2) \overline{u} + 2H_\alpha^2 H_\beta xy \overline{\vartheta} + \\ &+ H_\alpha H_\beta^2 x(3u^2 + \vartheta^2) + 2H_\alpha H_\beta^2 y \overline{u\vartheta} + H_\beta^3 \overline{u\vartheta^2} + H_\alpha^3 xy^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Усреднение по пространству скоростей различных сочетаний их компонентов дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} \overline{u} &= -(cx + \Omega y) / \Pi^2, \quad \overline{\vartheta} = -(cy - \Omega x) / \Pi^2, \quad \overline{u\vartheta} = (\overline{u})(\overline{\vartheta}), \\ \overline{u^2} &= \frac{(1 - \Omega^2)}{3\Pi^2} \left(1 - \frac{r^2}{\Pi^2} \right) + (\overline{u})^2, \quad \overline{\vartheta^2} = \frac{(1 - \Omega^2)}{3\Pi^2} \left(1 - \frac{r^2}{\Pi^2} \right) + (\overline{\vartheta})^2, \\ \overline{u\vartheta^2} &= (\overline{u})(\overline{\vartheta^2}), \quad \overline{\vartheta u^2} = (\overline{\vartheta})(\overline{u^2}), \quad \overline{u^3} = (\overline{u})(\overline{u^2}), \quad \overline{\vartheta^3} = (\overline{\vartheta})(\overline{\vartheta^2}), \end{aligned}$$

где $c = \lambda \sin \psi / \sqrt{1 - \lambda^2}$. Подставляя эти результаты в (35), нетрудно найти возмущение поверхностной плотности по формуле (19). Так, мы получим

$$\delta\sigma = \frac{20r^4 \sigma_0}{\Pi^2(\psi)} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{40}(\psi_1) H(\psi, \psi_1) d\psi_1, \quad (36)$$

причем

$$H(\psi, \psi_1) = H_\alpha^3 - \frac{3c}{\Pi^2(\psi)} H_\alpha^2 H_\beta - \frac{(4 - 9c^2 - 7\Omega^2)}{3\Pi^4(\psi)} H_\alpha H_\beta^2 - \frac{3c^3 - 4c + 7c\Omega^2}{3\Pi^6(\psi)} H_\beta^3.$$

Сопоставляя полученный результат (36) с теоретическим (21), с учетом (22) находим НАДУ кольцевой моды в интегральной форме

$$A_{40}(\psi) = \frac{45}{8\Pi^3(\psi)} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A_{40}(\psi_1) H(\psi, \psi_1) d\psi_1. \quad (37)$$

Вводя же обозначение

$$K_\tau(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \lambda \cos \psi_1)^3 S(\psi, \psi_1) A_{40}(\psi_1) (\lambda + \cos \psi_1)^{3-\tau} (\sin \psi_1)^\tau d\psi_1, \quad \tau = 0-3 \quad (38)$$

с учетом выражений для H_α и H_β можно также, как в разделе 2, перейти к дифференциальной форме НАДУ

$$\Delta K_\tau(\psi) = \frac{45}{8} A^*(\psi) (\lambda + \cos \psi)^{3-\tau} \sin^\tau \psi, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned}
 A^*(\psi) = & (h_1^3 \cos^3 \psi + h_2 \cos^2 \psi \sin \psi - h_3 \cos \psi \sin^2 \psi + h_4 \sin^3 \psi) K_0(\psi) + \\
 & + \{3 h_1^3 \cos^2 \psi \sin \psi - h_2 [\cos^2 \psi (\lambda + \cos \psi) - 2 \cos \psi \sin^2 \psi] - h_3 [\sin^3 \psi - \\
 & - \sin 2 \psi (\lambda + \cos \psi)] - 3 h_4 \sin^2 \psi (\lambda + \cos \psi)\} K_1(\psi) + \{3 h_1^3 \cos \psi \sin^2 \psi - \\
 & - h_2 [\sin 2 \psi (\lambda + \cos \psi) - \sin^3 \psi] - h_3 [\cos \psi (\lambda + \cos \psi)^2 - \\
 & - 2 \sin^2 \psi (\lambda + \cos \psi)] + 3 h_4 \sin \psi (\lambda + \cos \psi)^2\} K_2(\psi) + [h_1^3 \sin^3 \psi - \\
 & - h_2 \sin^2 \psi (\lambda + \cos \psi) - h_3 \sin \psi (\lambda + \cos \psi)^2 - h_4 (\lambda + \cos \psi)^3] K_3(\psi),
 \end{aligned} \quad (40)$$

причем

$$\begin{aligned}
 h_1 = (1 + \lambda \cos \psi)^{-1}, \quad h_2 = 3c \sqrt{1 - \lambda^2} h_1^4, \quad h_3 = \frac{1}{3} (4 - 9c^2 - 7\Omega^2) (1 - \lambda^2) h_1^5, \\
 h_4 = \left(c^3 - \frac{4}{3} c + \frac{7}{3} c \Omega^2 \right) (1 - \lambda^2)^{3/2} h_1^6.
 \end{aligned}$$

НАДУ (39) представляет собой систему дифференциальных уравнений восьмого порядка и не поддается аналитическому рассмотрению. Она исследована нами также методом устойчивости периодических решений [11] численно. Так, нами построена критическая зависимость начального вириального отношения от параметра вращения (рис.2). Как видно из рисунка, в области $\Omega \leq 0.117$ кольцевая мода возмущения неустойчива для произвольного значения вириального отношения. Затем вращение в области $0.117 < \Omega < 0.3$ играет стабилизирующую роль. В окрестности $\Omega \approx 0.3$, $(2T/|U|)_0 > 0.25$ имеется вытянутый остров неустойчивости с дополнительным узким ответвлением. При $\Omega > 0.5$ области устойчивости и неустойчивости

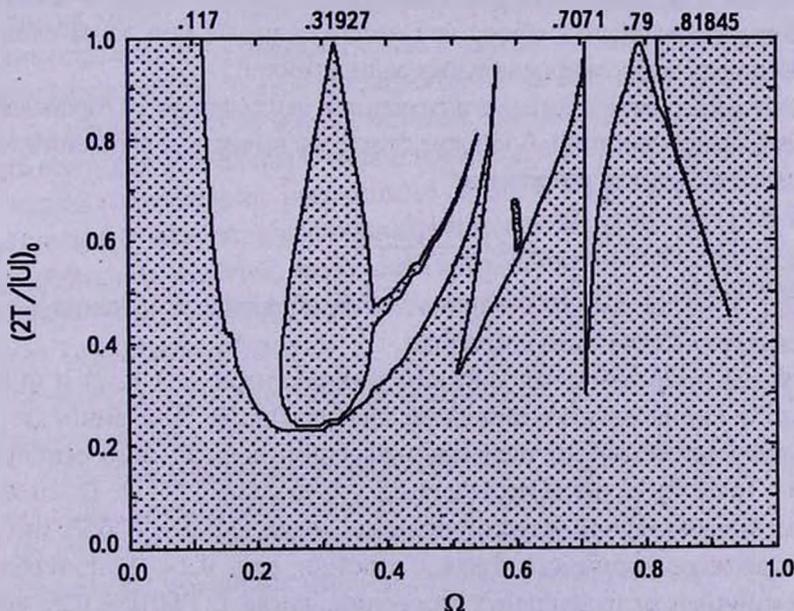


Рис.2. Критическая зависимость начального вириального отношения от степени вращения модели для кольцевой моды колебаний.

чередуются, если $(2T/U|_0) > 0.3$. Наконец, в области $\Omega > 0.818$ модель (1) неустойчива относительно кольцевых возмущений при произвольном значении начального вириального отношения. В состоянии $(2T/U|_0) = 1$ критические значения $\Omega = 0.117$ и 0.818 хорошо известны из линейной теории устойчивости (см., например, [9]), а в точках $\Omega = 0.31927$, 0.7071 и 0.79 неустойчивость имеется только в рамках нелинейной модели (1).

5. *Обсуждение результатов.* Прежде всего интересно сравнить маргинальные зависимости на рис.1 и 2 для рассмотренных нами выше двух мод колебаний. Как видно, если исходная нелинейная нестационарность модели (1) до наложения возмущения такова, что

$$(2T/U|_0) < 0.2 \quad (41)$$

то обе моды колебаний неустойчивы независимо от значения параметра вращения Ω , причем для обеих мод данная неустойчивость носит, в основном, аperiодический характер. Выше области (41) имеет место колебательная неустойчивость, на что указывают комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения, составленного из решения НАДУ в точке $\psi = 2\pi$ методом устойчивости периодических движений.

Обе моды колебаний также неустойчивы при произвольном значении начального вириального отношения, если $\Omega > 0.82$. Вблизи $(2T/U|_0) \approx 1$ имеется интервал значений параметра вращения

$$0.176 < \Omega < 0.507, \quad (42)$$

где обе моды колебаний являются устойчивыми одновременно. В остальных случаях трудно выделить общее для рассмотренных мод из-за сложной картины полученных маргинальных зависимостей.

Весьма важно также сравнение инкрементов неустойчивостей бароподобных и кольцевых мод колебаний. В каждом случае мы вычисляли соответствующие значения инкрементов по формуле

$$\text{Inc} = \frac{\ln(\|k_{\max}\|)}{P(\lambda)}, \quad (43)$$

где $\|k_{\max}\|$ - натуральный логарифм от наибольшего значения модуля корня характеристического уравнения.

На рис.3 приведены зависимости инкрементов мод (2;2) и (4;0) от начального вириального отношения для различных значений Ω . Как видно, для произвольного значения начального вириального отношения $\text{Inc}(4;0) > \text{Inc}(2;2)$ в областях $\Omega < 0.15$, $0.45 < \Omega < 0.55$ и $\Omega > 0.96$. В областях колебательной неустойчивости, когда $(2T/U|_0) > 0.2$, имеется противоположное неравенство $\text{Inc}(2;2) > \text{Inc}(4;0)$, если $0.2 < \Omega < 1$. В области же неустойчивости радиальных движений, когда $(2T/U|_0) < 0.2$, всегда $\text{Inc}(4;0) > \text{Inc}(2;2)$ независимо от значения Ω .

Инкремент аperiодической неустойчивости явно выше, чем колебательной

неустойчивости. Для бар-моды (41) является критерием аperiodической неустойчивости. Однако для аperiodической неустойчивости кольцевой

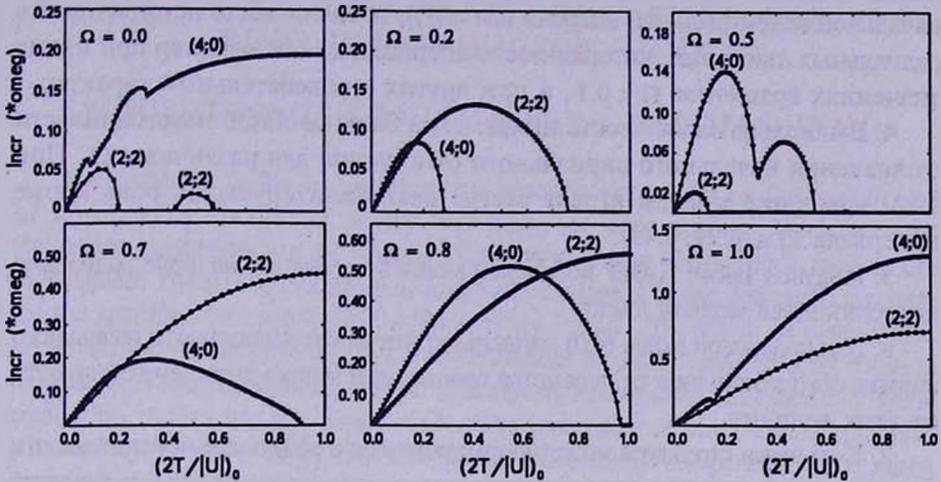


Рис.3. Сравнение инкрементов неустойчивости бароподобной и кольцевой мод для различных значений параметра вращения модели.

моды требуется более сильное условие

$$(2T/|U|)_0 < 0.10, \tag{44}$$

так как в интервале $0.11 < (2T/|U|)_0 < 0.20$, неустойчивость данной моды носит колебательный характер.

Хотя исходная нестационарная модель (1) является достаточно простой, но тем не менее полученные нами результаты можно рассматривать как предварительный "зонд" применительно к ранним стадиям эволюции отдельных бесстолкновительных систем, каковыми являются не только звездные системы, но и состояние чисто из темной материи. Вероятно, наши результаты могут иметь некоторое отношение к теории происхождения SB и кольцевых галактик, так как их многообразие невозможно объяснить в рамках одного или двух механизмов. В частности, согласно статистическому анализу [12,13] каталогов кольцеобразных галактик, чаще всего наблюдаются случаи перемычек (SB), с концов которых проходят кольцевые образования, а за ними уже могут лежать спиральные рукава.

6. Заключение. Перечислим полученные нами основные результаты в данной работе.

1. Получен НАДУ секториальных мод возмущений, наложенных на нестационарную модель самогравитирующего диска (1).

2. Найдена критическая зависимость начального вириального отношения от параметра вращения для бар-моды, эволюционирующей на фоне модели (1).

3. Результаты расчета моды (2;2) показывают, что если начальная полная кинетическая энергия диска (1) составляет не более, чем 10.4% от начальной потенциальной энергии (см. (41)), то имеет место неустойчивость радиальных движений, которая носит апериодический характер при малых значениях вращения $\Omega < 0.1$, а при других - колебательный характер.

4. Вычислена зависимость инкремента бароподобной неустойчивости от значения начального вириального отношения для различных Ω . При этом вращение модели играет всегда дестабилизирующую роль кроме интервала $\Omega \in (0.29; 0.49)$.

5. Получен также НАДУ кольцевой моды возмущения на фоне радиально колеблющейся модели диска.

6. Для кольцевой моды (4;0) найдены критические зависимости начального вириального отношения от параметра вращения и инкремента неустойчивости от этих величин.

7. Кольцевая структура может формироваться в результате неустойчивости радиальных движений, если начальная полная энергия модели (1) составляет не более, чем 5.2% от начальной потенциальной энергии (см. (44)). Данная кольцевая неустойчивость имеет апериодический характер независимо от степени вращения.

8. В большинстве случаев инкремент кольцевой неустойчивости больше, чем бароподобной. В частности, для произвольного значения $(2T/U)_0$ инкремент кольцевой моды всегда больше в областях $\Omega < 0.05$, $0.45 < \Omega < 0.55$ и $\Omega > 0.96$. Когда $(2T/U)_0 > 0.2$ инкремент бар-моды больше, чем кольцевой, если $0.2 < \Omega < 1$.

Наконец, заметим, что нелинейно нестационарная модель (1) так же, как равновесный диск авторов [1], имеет изотропную диаграмму скоростей. В связи с этим мы планируем также изучить вышерассмотренные моды колебаний в другой, анизотропной модели нестационарного диска.

Работа выполнена в рамках гранта ФА-Ф2-Ф058 ККРНТ РУз и гранта Комиссии по высшему образованию Пакистана.

¹ Астрономический институт Академии Наук Республики Узбекистан,
e-mail: nur200848@mail.ru

² Кафедра Астрономии Национального университета Узбекистана,
e-mail: mkaomat@rambler.ru

³ Федеральный университет, Карачи, Пакистан

ON INSTABILITIES OF A NON-STATIONARY MODEL OF SELF-GRAVITATING DISK. I. BAR AND RING PERTURBATION MODES

S.N.NURITDINOV^{1,2}, K.T.MIRTADJEVA^{2,1}, MARIAM SULTANA³

The instability of the bar and the ring perturbation modes on the background of non-linearly oscillating in the self-plane of disk model, which is non-stationary generalization of known Bisnovatij-Kogan-Zeldovich's model, are investigated. The corresponding non-stationary analogues of the dispersion equation for the specified two modes of oscillations are found. The results of calculations are presented in the form of critical dependences of initial virial ratio on rotation degree. The comparative analysis of gravitational instability increments of these oscillation modes has also been made. The instability of bar mode takes place if initial full kinetic energy of a disk is not more than 10.4 percent from initial potential energy. Its mechanism is connected with instability of radial motions which has non-periodic character at small values of rotation parameter $\Omega < 0.1$, and at other values these motions have an oscillatory character. Calculations show that a ring structure can be formed as a result of instability of radial motions if the initial full energy of model is not more than 5.2 percent from the initial potential energy, independently of the value of Ω .

Key words: *models: self-gravitating disk*

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович, *Астрофизика*, 6, 387, 1970.
2. М.Г.Абрамян, "Динамика вложенных гравитирующих систем", Автореферат, Ереван, 1986.
3. В.А.Антонов, *Учен. записки ЛГУ*, 32, 79, 1976.
4. J.Binney, S.Tremaine, "Galactic dynamics", Princeton University Press, 1987, p.733.
5. В.А.Антонов, С.Н.Нуритдинов, *Астрон. ж.*, 58, 1158, 1981.
6. С.Н.Нуритдинов, *Астрон. ж.*, 62, 506, 1985.
7. С.Н.Нуритдинов, *Астрон. ж.*, 68, 763, 1991.
8. С.Н.Нуритдинов, "Динамика гравитирующих систем и методы аналитической небесной механики", Наука, Алма-Ата, 1987, с.65.
9. A.J.Kalnajs, *Astrophys. J.*, 175, 63, 1972.
10. A.M.Fridman, V.L.Polyachenko, "Physics of gravitating systems", Springer-Verlag, New-York, 1984.
11. И.Г.Малкин, "Теория устойчивости движения", Наука, М., 1967.
12. С.Н.Нуритдинов, М.Усарова, "Проблемы физики и динамика звездных систем", Ташкент, Ташкентский государственный университет, 1989, с.49.
13. R.Buta, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 96, 39, 1995.