

СДВИГ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ НАМАГНИЧЕННЫХ НЬУТОНОВСКИХ ПОЛИТРОП, ВЫЗВАННЫЙ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

С.А.МИХЕЕВ, В.П.ЦВЕТКОВ

Поступила 10 октября 2007

Принята к печати 13 февраля 2008

В работе сформулированы критерии для определения критических точек и точек бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп, совпадающих в отсутствие магнитного поля. Проведена оценка величины сдвига этих точек по параметрам сплюснутости ϵ и быстроты вращения ϵ . Вычислена зависимость полной энергии политропы вблизи точек бифуркации и критической от параметров асимметрии распределения массы X по отношению к оси вращения и быстроты вращения ϵ при $\epsilon \ll 1$. Дан анализ устойчивости вращающейся политропы в зависимости от значений параметра X .

Ключевые слова: *политропы; точки бифуркации; магнитное поле*

1. **Введение.** Конфигурации вращающихся ньютоновских политроп изучались во многих работах [1-3].

Под политропой обычно имеют в виду гравитирующие конфигурации, уравнение состояния вещества которых имеет вид политропы:

$$P = K \rho^{1+1/n},$$

где P - давление, ρ - плотность, n - индекс политропы.

При этом одним из основных вопросов исследований является вопрос об ответвлении асимметричных относительно оси вращения решений уравнения, описывающего распределение плотности вращающейся политропы.

Порядок асимметрии распределения вещества относительно оси вращения конфигурации определяется параметром X . В качестве этого параметра для сжимаемых конфигураций в [4] предлагается брать $X = \tilde{p}_{[20]p} = (1/2)(\tilde{p}_{200} - \tilde{p}_{020})$. Коэффициенты \tilde{p}_{abc} представляют собой коэффициенты разложения плотности конфигурации \tilde{p} по степеням координат $x_1 = x/a_1$, $x_2 = y/a_1$, $x_3 = z/a_3$ (a_1, a_3 - полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации).

Тогда задача о точках бифуркации вращающихся не намагниченных политроп будет сведена к поиску значений параметра быстроты вращения $\epsilon = \omega^2/4\pi G \rho_0$ (ω - угловая скорость вращения конфигурации, G - гравитационная постоянная, ρ_0 - центральная плотность конфигурации)

при заданном индексе политропы n , для которых имеют место решения $X=0$, $X \neq 0$.

Для намагниченных конфигураций, у которых магнитная ось направлена под углом $\alpha \neq 0$ к оси вращения, всегда $X \neq 0$ и точки бифуркации этих конфигураций определяются иным образом.

В случае намагниченных конфигураций интенсивность влияния магнитного поля на параметр асимметрии X определяется величиной параметра $\eta_m = B_0^2 \sin^2 \alpha / 16\pi^2 G \rho_0^2 a_1^2$ (B_0 - характерное значение магнитной индукции в центре конфигурации). Физический смысл этого параметра - отношение плотностей магнитной и гравитационной энергий в центре конфигурации.

Цель нашей работы - установить критерии для определения точек бифуркации вращающихся политроп при $\eta_m \neq 0$ и оценить влияние магнитного поля на положение этих точек.

Важным условием стабильности вращающейся конфигурации является введенное Джинсом [1] условие неотрицательности радиальной компоненты ускорения свободного падения на экваторе $g_{\text{ч}} > 0$.

Используя это условие, Джеймс [2] установил существование точек бифуркации вращающихся политроп в интервале $0 \leq n \leq 0.808$. Физической причиной этого явления является истечение вещества с экватора конфигурации, возникающего при той сплюснутости конфигурации, которая необходима для достижения точки бифуркации.

Проведенное нами в [5] исследование ньютоновских вращающихся политроп на основе комплекса символьно-численных программ позволило получить для них существенно новые результаты. В этой работе впервые доказано существование точек бифуркации ньютоновских вращающихся политроп в интервале значений индекса политропы $0.9989 < n \leq 1.0795$, в которых ответвляются асимметричные относительно оси вращения решения, описывающие распределения плотности. Показано, что в этом интервале значений n параметр быстроты вращения в критических точках ε_k принимает значения $0.0442 > \varepsilon_k \geq 0$.

Также нами показано, что при $0.1161 < n < 0.5791$ в точках бифуркации $\varepsilon = \varepsilon_k g_{\text{eq}} < 0$ и, следовательно, стабильных политроп для этого случая не существует. Условие стабильности при $\varepsilon = \varepsilon_k g_{\text{eq}} > 0$ будет выполняться лишь в областях $0 \leq n < 0.1161$ и $0.5791 < n < 0.8012$.

Вопрос о зависимости полной энергии E вращающейся политропы от параметра асимметрии X связан с вопросом устойчивости этих конфигураций относительно возмущений этого параметра X . В данной работе мы получим зависимость $E(X)$ при фиксированной массе m и моменте импульса M в случае $|n-1.0795| \ll 1$, когда конфигурация слабо отличается от сферически симметричной при $\varepsilon_k \ll 1$. Устойчи-

вому состоянию должен соответствовать минимум функции $E(X)$.

Именно на примере этого, наиболее для нас интересного интервала значений n , мы и будем вести дальнейшее изложение.

2. *Критические точки и точки бифуркации.* Как показано нами в [4,5] параметр асимметрии вращающейся конфигурации X удовлетворяет уравнению:

$$A(e, n)X + B(e, n)X^3 = \eta_m, \quad (1)$$

где $e = a_3/a_1$ - параметр сплюснутости конфигурации; $A(e, n)$ и $B(e, n)$ - функции, которые находятся численными методами, но в достаточно узких областях значений e и n их можно аппроксимировать аналитическими выражениями. Так, в области значений $|e-1| \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$, $|n-1.0795| \ll 1$ имеет место следующее аналитическое представление $A(e, n)$:

$$A(e, n) = A(\varepsilon, n) = 0.1872(e - e_k) = 1.4872(\varepsilon_k - \varepsilon), \quad (2)$$

где $\varepsilon_k = 0.91178(1.0795 - n)$, $e_k = 1 - 7.2436(1.0795 - n)$.

Значение $B(e, n) = B(\varepsilon, n) \cong B_k = 2.2199$ в вышеуказанной области значений параметров e, ε, n .

Исследуем более подробно уравнение (1). Сделаем замену $X = X_k \xi$, $X_k = (\eta_m/B_k)^{1/3}$. Тогда (1) будет иметь вид:

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda, \quad (3)$$

где $\lambda = -A(e, n)/B_k^{1/3} \eta_m^{2/3}$.

Точку $e = e_k$, $\varepsilon = \varepsilon_k$ будем называть критической, в которой $\lambda(e_k, n) = A(e_k, n) = 0$. В этой точке параметр асимметрии $X = X_k = (\eta_m/B_k)^{1/3}$. Если учесть, что η_m очень мал, $\sim 10^{-12}$ и меньше, то в критической точке $X = X_k \sim 10^{-4}$, что на восемь порядков больше, чем вдали от критической точки, где $X \sim \eta_m$.

Отметим, что в критической точке уравнение (3) имеет одно вещественное решение $\xi = 1$. Два других корня будут комплексными. Отсюда следует, что критическая точка не является в данном случае точкой бифуркации. Они будут совпадать только при $\eta_m = 0$, т.е. в отсутствие магнитных натяжений. В этом случае из (1) следует уравнение $X(A(e, n) + B(e, n)X^2) = 0$ и при $e < e_k$ $A(e, n) < 0$, $X_1 = 0$, $X_{2,3} = \pm \sqrt{-A(e, n)/B_k}$.

Чтобы наглядно представить ситуацию, построим график левой части уравнения (3) $f(\xi) = \xi^2 - (1/\xi)$, который приводится на рис.1.

Из рисунка видно, что точкой бифуркации является точка $\lambda_b(e_b, n) = \sqrt[3]{27/4}$. В этой точке:

$$A(e_b, n) = -\sqrt[3]{\frac{27}{4}} B_k^{1/3} \eta_m^{2/3}, \quad (4)$$

то есть имеет место сдвиг точки бифуркации от критической точки. Величина сдвига по параметрам e $\Delta e = e_b - e_k$ и ε $\Delta \varepsilon = \varepsilon_b - \varepsilon_k$ легко оценивается из (2) и (4):

$$\Delta e = -13.1697 \eta_m^{2/3}; \quad \Delta \varepsilon = 1.6577 \eta_m^{2/3}. \quad (5)$$

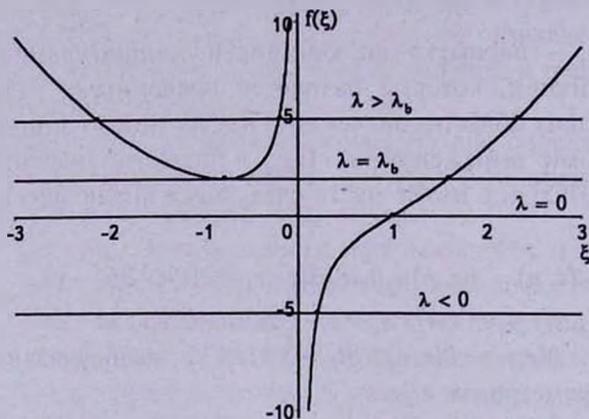


Рис.1. График функции $f(\xi) = \xi^2 - 1/\xi$. Точками на графике отмечены корни уравнения (3).

Если взять $\eta_m = 10^{-12}$, тогда $\Delta e = -1.3170 \cdot 10^{-7}$, а $\Delta \varepsilon = 1.6577 \cdot 10^{-8}$.

Аналитический вид вещественных корней уравнения (3), позволяющий найти зависимость параметра асимметрии X от e , ε , η_m , нам удалось найти. При $\lambda < 0$ ($A(e, n) > 0$) будет один вещественный корень уравнения (3):

$$\xi_1 = 2\sqrt{-\frac{\lambda}{3}} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{3} \ln\left(\sqrt{-\frac{27}{4\lambda^3}} + \sqrt{1 - \frac{27}{4\lambda^3}}\right)\right). \quad (6)$$

В случае $0 < \lambda < \sqrt[3]{27/4}$ тоже будет только один вещественный корень уравнения (3):

$$\xi_1 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{3} \ln\left(\sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}} + \sqrt{\frac{27}{4\lambda^3} - 1}\right)\right). \quad (7)$$

А если $\lambda > \sqrt[3]{27/4}$, то у нас будут иметь место три вещественных корня уравнения (3):

$$\xi_{1,2,3} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} \cos(3d_{1,2,3}) \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}} + d_{1,2,3}\right), \quad (8)$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = -\pi/3, \quad d_3 = \pi/3.$$

Зависимость корней уравнения (3) от параметра λ , используя формулы (6)–(8), представлена на рис.2.

Из рисунка видно, что точкой бифуркации действительно является точка $\lambda = \lambda_b = \sqrt[3]{27/4}$. При значениях $\lambda \geq \lambda_b$ имеют место вместо одного ($\lambda < \lambda_b$), три вещественных корня $\xi_{1,2,3}$, описывающих соответственно три равновесных конфигурации вращающихся намагниченных политроп.

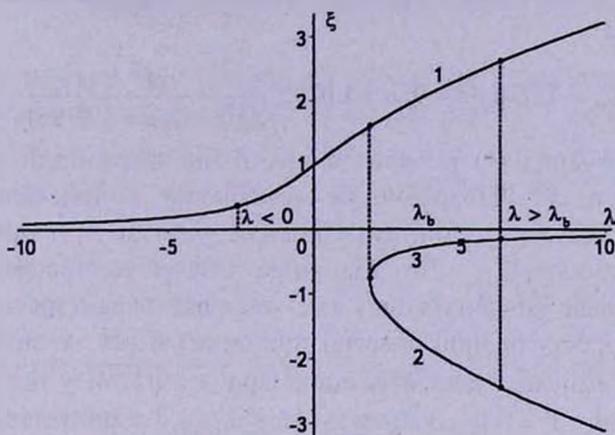


Рис.2. Зависимость корня уравнения (3) ξ от параметра λ .

В отличие от случая отсутствия магнитного поля ($\eta_m = 0$) процесс ответвления происходит скачком, при этом ветви 1, 2 и 3 не имеют общих точек. Таким образом структура намагниченной вращающейся политропы вблизи точки бифуркации λ_b существенно отличается от структуры вращающейся не намагниченной политропы. Результат данной работы является на наш взгляд важным и далеко не очевидным.

Приведем асимптотики корней при больших значениях λ ($\eta_m \rightarrow 0$), $|\lambda| \gg 1$. Из (6), (8) имеем $\xi_{1,2} \approx \pm\sqrt{\lambda}$ при $\lambda \gg 1$, а $\xi_{1,3} \approx 1/\lambda$ при $|\lambda| \ll 1$.

3. Устойчивость конфигураций в точках бифуркации. Наличие при $\lambda \geq \lambda_b$ трех равновесных конфигураций ставит вопрос: какое состояние физически реализуется. Для ответа на этот вопрос будем использовать энергетический подход для исследования устойчивости гравитирующих сверхплотных конфигураций, многочисленные применения которого подробно изложены в [6].

В нашем случае из энергетического подхода следует, что из трех равновесных конфигураций устойчивой будет та, у которой при фиксированной массе и моменте импульса полная энергия минимальна.

Разработанный и реализованный нами в системе символьной математики MAPLE комплекс символьно-численных программ позволил найти аналитическую зависимость полной энергии ньютоновской вращающейся политропы от параметра асимметрии X распределения плотности вещества относительно оси вращения в области значений параметров $\varepsilon \ll 1$, $|n - 1.0795| \ll 1$:

$$\frac{E(X)}{-E_{\text{сп}}} = -0.06422(1 - 10.7592\varepsilon_0 - (4.8902 + 22.9197\varepsilon_0)X^2), \quad (9)$$

где $E_{\text{сп}} = -(16/15)\pi^2 G \rho_0^2 a_1^5$ - гравитационная энергия однородной сферы радиуса a_1 и плотности ρ_0 , J_0 - момент инерции относительно оси вращения, а

$$\varepsilon_0 = 4\pi G \rho_0 (\varepsilon = 0, n = 1.0795) \frac{M^2}{J_0^2(\varepsilon = 0, n = 1.0795)}.$$

Для получения (9) в вычислениях E мы удерживали члены только порядка ε и X^2 . Подробности вычислений E приводятся в [5].

Из (9) следует, что минимум полной энергии $E(X)$ будет соответствовать значению $|X|_{\min}$. Это состояние и будет устойчивым состоянием гравитирующей конфигурации, так как рост параметра асимметрии X приводит к росту полной энергии при одних и тех же значениях массы и момента импульса конфигурации. При $\lambda \geq \sqrt[3]{27/4}$ у нас имеют место три значения $X = X_{1,2,3} = X_k \xi_{1,2,3}$, где $\xi_{1,2,3}$ - определяется формулой (8). Из (8) следует, что $|\xi|_{\min} = |\xi_3| = 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} \left| \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\sqrt{\frac{27}{4\lambda^3} + \frac{\pi}{3}}\right) \right|$, т.е. устойчиво состояние с $X = X_k \xi_3$.

4. Заключение. Проведенное нами исследование указывает на необходимость различать точки бифуркации и критические точки для намагниченных вращающихся политроп, которые в отсутствие магнитного поля совпадают. Эти точки оказываются сдвинутыми по параметрам ε и ε на величину порядка отношения плотностей магнитной и гравитационной энергий в центре вращающейся намагниченной политропы в степени $2/3$ в области значений индекса политропы $|n-1.0795| \ll 1$. Эта величина для реальных пульсаров имеет порядок $10^{-4}-10^{-10}$. Вблизи критической точки $\lambda_k = 0$ и точки бифуркации $\lambda_b = \sqrt[3]{27/4}$ в процессе эволюции периода вращающейся намагниченной политропы, как будет показано нами в дальнейшем, возникают характерные особенности, позволяющие выявить это явление при наблюдении эволюции периода медленных пульсаров $\varepsilon < 10^{-4}$, уравнение состояния вещества которых будет близко к политропе с индексом $|n-1.0795| \ll 1$.

В свете полученных нами результатов весьма актуален вопрос о поиске реалистических уравнений состояния, близких к политропе с $n = 1.0795$.

THE SHIFT OF BIFURCATION POINTS OF ROTATING
MAGNETIC NEWTONIAN POLITROPS CAUSED BY
MAGNETIC FIELD

S.A.MITHEEV, V.P.TSVETKOV

This work presents the formulated criteria for determination of the critical points and bifurcation points of the rotating Newtonian polytropic curves which are coincident with no any magnetic field. We sized up the shift value of the points using the flatness parameters and the parameters of the rotation rate ε . We determined a dependence of the polytropic curve total energy near the bifurcation points and critical points on the asymmetrical mass distribution parameter X relative to the axis of rotation and the rotation rate ε at $\varepsilon \ll 1$. We carried out rotating polytropic curve stability in accordance with the X axis parameter point analysis.

Key words: *politrops:bifurcation points:magnetic field*

ЛИТЕРАТУРА

1. *J.H.Jeans*, Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. Cambridge: At the Univ. Press, 1919.
2. *R.A.James*, The structure and stability of rotating gas masses, *Astrophys. J.*, 140, 552, 1964.
3. *Ж.Л.Тассуль*, Теория вращающихся звезд. Мир, М., 1982, с.472.
4. *Е.В.Беспалько, С.А.Михеев, И.В.Пузынин, В.П.Цветков*, Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния. *Мат. моделирование*, 118, №3, 103, 2006.
5. *С.А.Михеев, В.П.Цветков*, Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем близким к единице. Препринт ОИЯИ Р11-2007-114. Письма в ЭЧАЯ (в печати).
6. *Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков*, Релятивистская астрофизика. Наука, М., с.203, 1967.