АСТРОФИЗИКА

ТОМ 51 ФЕВРАЛЬ, 2008 ВЫПУСК 1

РОЛЬ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В РАДИАЦИОННО-ДОМИНАНТНОЙ ЭПОХЕ РАЗВИТИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Р.М.АВАКЯН, Г.Г.АРУТЮНЯН

Поступила 6 июня 2007
Принята к печати 14 ноября 2007

Актуальной проблемой при теоретическом исследовании эволюции Вселенной является ее ускоренное расширение, обнаруженное в последнее время. Причиной такого поведения предположительно является наличие темной энергии, по определенным оценкам составляющей 70% состава Вселенной, которая генерирует "силы отталкивания". В предлагаемой работе построение космологической модели, учитывающей наличие темной энергии, осуществляется в рамках тензорно-скалярной теории Йордана-Бранса-Дикке с доминирующим неминимально связанным скалярным полем при наличии космологического скаляра. Рассматривается радиационно-доминантная эпоха.

Ключевыв слова: *космология: гравитационный скаляр: темная энергия: ускоренное расширение*

1. *Введение.* Современные представления о Вселенной свидетельствуют в пользу введения в ОТО космологической постоянной, что, по существу, связано с предположением о наличии негравитационного источника, для которого $\varepsilon + 3p < 0$ (ε - плотность энергии, p - давление). Это обеспечивает ускоренное расширение Вселенной, а указанный источник принято называть темной энергией. Однако здесь существует проблема несоответствия теоретических предсказаний для величины космологической постоянной [1]. В связи с этим делаются попытки введения аналогичного понятия в рамках тензорно-скалярных теорий. В настоящей статье рассматриваются космологические решения в собственном представлении тензорно-скалярной теории Йордана-Бранса-Дикке с доминирующим неминимально связанным скалярным полем при наличии космологического скаляра, переходящего в эйнштейновском представлении в обычную космологическую постоянную [2]. Задача решена для радиационно-доминантной эпохи. Выполнен численный расчет для моделей, различающихся безразмерной константой связи ζ.

2. *Конформное соответствие теории Йордана-Бранса-Дикке и ОТО.* Конформным преобразованиям, помимо известного математического содержания, можно придать также физический смысл, связав их с масштабным преобразованием единиц измерения. Эта идея впервые появилась в работах Вейля [3], Эддингтона [4], Дикке [5].

Допустим, что в пространстве V_4 выполняются уравнения тензорно-скалярной теории гравитации, которые получаются как результат независимого варьирования действия

$$W = \int \left(\sqrt{-g}\right)\left[-F(\varphi)R + \frac{1}{2}\Phi(\varphi) g^{\mu\nu}\varphi_\mu\varphi_\nu + L_m\right] d^4x$$

по $g_{\mu\nu}$ и φ (здесь L_m - плотность функции Лагранжа вещества и негравитационных полей, φ - гравитационный скаляр, а $\varphi_\mu \equiv \partial\varphi/\partial x^\mu$). При переходе в конформно соответствующее пространство $\overline{V^4}$

$$\overline{g_{\mu\nu}} = \frac{F(\varphi)}{F_0} g_{\mu\nu}, \quad F_0 = \text{const}$$

приходим к

$$\overline{W} = \int \sqrt{-\bar{g}}\left[-F_0\,\overline{R} + \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\nu}\psi_\nu\psi_\mu + \overline{L_m}\right] d^4x,$$

где $\psi_\alpha = \varphi_\alpha\sqrt{3F_0\frac{\dot{F}^2}{F^2} + F_0\frac{\Phi}{F}}$, $\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial\varphi}$.

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\overline{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2F_0}\left(\overline{T}^m_{\alpha\beta} + \overline{T}^s_{\alpha\beta}\right), \quad \bar{g}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\psi_\beta = 0,$$

где

$$\overline{T}^s_{\alpha\beta} = \psi_\alpha\psi_\beta - \frac{1}{2}\bar{g}_{\alpha\beta}\,\bar{g}^{\mu\nu}\psi_\mu\psi_\nu.$$

Если выбрать $F_0 = 1/2\chi_0 = c^3/16\pi G$, то действие приведется к действию ОТО с минимально связанным скалярным полем, удовлетворяющим однородному волновому уравнению.

Точно так же, если за основу взять

$$W = \frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\left[-\frac{c^4}{16\pi}y\left[R + 2\varphi(y) - \zeta\frac{y^\mu y_\mu}{y^2}\right] + L_m\right] d^4x, \qquad (1)$$

где $\varphi(y) = \frac{\Lambda}{y_0}y$, то в результате получится действие ОТО с космологической константой Λ и минимально связанным скалярным полем.

3. *Радиационно-доминантная эпоха при наличии неминимально связанного скалярного поля.* Рассматривается космологическая задача, соответствующая (1). Если метрика выбрана в виде

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right], \qquad (2)$$

где $k=0$ для пространственно-плоского случая, $R(t)$ - масштабный фактор, то уравнения космологической задачи в собственном представлении теории

ЙБД можно представить в виде (точкой обозначена временная производная)

$$\frac{1}{R^3}\frac{d}{dt}\left(\dot{y}R^3\right)=\frac{\kappa(1-3\alpha)}{(3+2\zeta)}\varepsilon, \tag{3}$$

$$3\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)=\frac{\kappa\varepsilon}{y}-\frac{3\dot{R}\dot{y}}{Ry}+\frac{\zeta}{2}\frac{\dot{y}^2}{y^2}+\frac{y}{y_0}\Lambda, \tag{4}$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}^2}{R^2}=-\frac{\kappa p}{y}-\frac{\ddot{y}}{y}-\frac{2\dot{R}\dot{y}}{Ry}-\frac{\zeta}{2}\frac{\dot{y}^2}{y^2}+\frac{y}{y_0}\Lambda, \tag{5}$$

$$\dot{\varepsilon}=-3\frac{\dot{R}}{R}(\varepsilon+p),\quad \varepsilon=\varepsilon_0/R^4. \tag{6}$$

Здесь $p=\alpha\varepsilon$, в нашем случае $\alpha=1/3$.

Поскольку из (3) следует

$$\dot{y}R^3=D=\text{const},$$

то естественно ввести $y=Df(t)/R^2$, откуда перейдя к дифференцированию по η ($d\eta=dt/R$), получим

$$f'-1=2\dot{R}f, \tag{7}$$

где штрих обозначает производную по η.

С учетом (6) и (7) уравнение (4) можно представить в виде

$$\dot{R}^2f^2+\dot{R}f-\left(\frac{\kappa\varepsilon_0}{3D}f+\frac{\Lambda D}{3y_0}f^3+\frac{\zeta}{6}\right)=0. \tag{8}$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\dot{R}f$

$$\dot{R}f=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\kappa\varepsilon_0}{3D}f+\frac{\Lambda D}{3y_0}f^3+\frac{\zeta}{6}}, \tag{9}$$

и учитывая (7), получаем уравнение, определяющее функцию $f(\eta)$

$$f'=\pm\sqrt{1+\frac{2\zeta}{3}+\frac{4\kappa\varepsilon_0}{3D}f+\frac{4\Lambda D}{3y_0}f^3}. \tag{10}$$

Если ввести неопределенные множители α и β

$$f=\alpha F,\quad \tau=\frac{\eta}{\beta}$$

и выбрать их следующим образом

$$\alpha^2=\frac{4\kappa\varepsilon_0 y_0}{\Lambda D^2},\quad \beta^4=\frac{9y_0}{4\kappa\varepsilon_0\Lambda},$$

то (10) можно привести к виду

$$\frac{dF}{d\tau}=\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(1+\frac{2}{3}\zeta\right)+F+\frac{F^3}{4}},\quad \frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{8}{3D^2}\sqrt{\kappa^3\varepsilon_0^3\frac{y_0}{\Lambda}}, \tag{11}$$

де F - функция Вейерштрасса [6].

4. *Коэффициент "замедления" в рамках собственного представления теории ЙБД.* Из (7) имеем

$$\frac{R'}{R} = \dot{R} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}\frac{dF}{d\tau} - 1}{2\alpha F},$$

откуда $\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} = \frac{f''}{df} - \frac{(f'-1)f'}{2f^2}$ и для коэффициента "замедления" $q = \ddot{R}R/\dot{R}^2$ [7] получаем

$$q = \frac{R''R}{R'^2} - 1 = \frac{2ff'' - 2f'^2 + 2f'}{(f'-1)^2}. \qquad (12)$$

Учитывая (10), получим

$$f'' = \frac{2}{3}\left(\frac{\kappa\varepsilon_0}{D} + \frac{3\Lambda D}{y_0}f^2\right), \qquad (13)$$

откуда

$$q = \frac{\frac{2}{3}f\left(\frac{\kappa\varepsilon_0}{D} - \frac{3\Lambda D}{y_0}f^2\right)}{(f'-1)^2} - \frac{2f'}{f'-1}. \qquad (14)$$

Результаты численных расчетов $q(t)$ для рассматриваемой радиационно-доминантной эпохи представлены на рис.1, где кривая 1 соответствует значению $\zeta = 1$, вторая - $\zeta = 100$, третья - $\zeta = 1000$. Четко прослеживается тенденция убывания максимального положительного значения q_{max} в течение времени, причем на современном этапе развития Вселенной $q \to +1$.

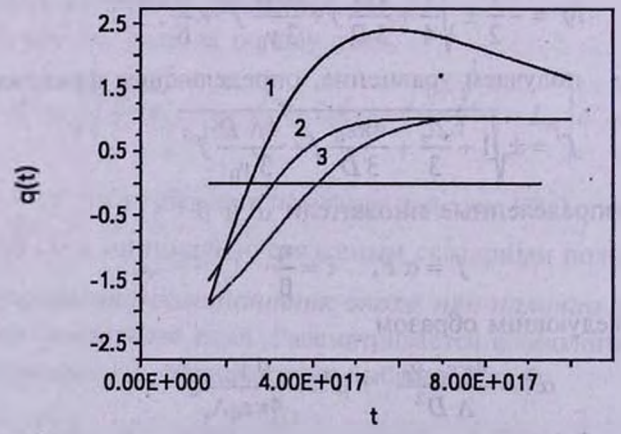

Рис.1. Зависимость "коэффициента замедления" q от времени

5. *Коэффициент "замедления" q в рамках эйнштейновского представления.* В случае, когда уравнение состояния $p = \alpha\varepsilon$, коэффициент q принимает вид

$$q = 1 - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{nE_n}{3a^n} + \frac{6c}{a^6}\right)}{\left(\frac{E_n}{3a^n} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{c}{a^6}\right)}, \tag{15}$$

где

$$E_n = \frac{8\pi}{y_0}\varepsilon_0 a_0^n, \quad c = \frac{4\pi c^2}{3y_0}, \quad n = 3(1+\alpha).$$

Для радиационно-доминантной эпохи ($P = (1/3)\rho$, $\alpha = 1/3$, $n = 4$),

$$q = -1 + \frac{\left(\frac{2\Lambda}{3} - \frac{c}{a^6}\right)}{\left(\frac{E_4}{3a^4} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{c}{a^6}\right)} \tag{16}$$

и условие $q \geq 0$ можно представить в виде

$$\Lambda \geq \frac{8\pi}{y_0}\varepsilon_0\frac{a_0^4}{a^4} + \frac{8\pi}{y_0}\frac{c^2}{a^6} = \frac{8\pi}{y_0}\left(\varepsilon_0\frac{a_0^4}{a^4} + \frac{c^2}{a^6}\right), \tag{17}$$

т.е. ускоренное расширение Вселенной и в этом случае возможно только после определенного момента эволюции, определяемого из (17).

6. *Коэффициент "замедления" q в случае доминирования конформно-связанного скалярного поля.* Преобразованием Бекенштейна [8]

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}z^{(n+1)/n}\left[1 + z^{-n}\right]^2 g_{\mu\nu},$$

$$\psi = \frac{6}{\chi}\frac{\left(z^n - 1\right)}{\left(z^n + 1\right)}, \quad n = \sqrt{\frac{3+2r}{3}}, \quad z = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n$$

действие (1) ($\varphi(y) = 0$) преобразуется в действие в случае конформно-связанного скалярного поля

$$W^{(C)} = \int\left[-\left(\frac{1}{2\chi} - \frac{\psi^2}{12}\right)R + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2\right]\sqrt{-g}\,d^4x. \tag{18}$$

Уравнения, полученные в результате независимого варьирования по g_{ik} и ψ, имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu}^{(c)}, \tag{19}$$

$$\nabla^2\psi - \frac{R}{6}\psi = 0, \tag{20}$$

$$T_{\mu\nu}^{(c)} = \nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\psi)^2 - \frac{1}{6}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi^2 + \frac{1}{6}g_{\mu\nu}\nabla^2\psi^2 + \frac{\psi^2}{6}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right). \tag{21}$$

Уравнение (19) можно заметно упростить, если учесть, что

$$\frac{1}{6}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi^2=\frac{1}{3}\nabla_\mu(\psi\nabla_\nu\psi)=\frac{1}{3}\nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi+\frac{\psi}{3}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi,$$
$$\frac{1}{6}g_{\mu\nu}\nabla^2\psi^2=\frac{1}{6}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi^2=\frac{1}{3}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\psi\nabla_\beta\psi+\frac{\psi}{3}g_{\mu\nu}\nabla^2\psi. \quad (22)$$

Тогда

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\chi\left(1-\frac{k\psi^2}{6}\right)^{-1}\tau^{(c)}_{\mu\nu}, \quad (23)$$

где

$$\tau^{(c)}_{\mu\nu}=\frac{2}{3}\nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi-\frac{1}{6}g_{\mu\nu}(\nabla\psi)^2-\frac{\psi}{3}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi+\frac{\psi}{3}g_{\mu\nu}\nabla^2\psi. \quad (24)$$

Свертка последнего выражения дает $\psi\nabla^2\psi$, поэтому свертка полевого уравнения сводится к

$$-R\left(1-\frac{\chi\psi^2}{6}\right)=\frac{\chi R\psi^2}{6}\Rightarrow R=0\Rightarrow\nabla^2\psi=0. \quad (25)$$

Таким образом, как минимально связанное, так и конформно-связанное скалярные поля определяются одинаковыми уравнениями, но с различными тензорами энергии-импульса.

По поводу (18) можно сделать еще одно интересное замечание. Если ввести обозначение

$$\varphi=\frac{1}{2\chi}-\frac{\psi^2}{12}, \quad (26)$$

то (18) приводится к виду

$$W=\int\left(-R\varphi+\frac{3}{2}\omega\frac{(\nabla\varphi)^2}{\varphi}\right)\sqrt{-g}\,d^4x, \quad (27)$$

где $\omega=\dfrac{\varphi}{(1/2\chi)-\varphi}$, откуда следует, что при $\varphi\gg 1/2\chi$, $\omega\to -1$ и в результате (18) сводится к действию теории ЙБД с $\zeta=-3/2$, т.е. $W=\int\left(-R\varphi-\dfrac{3}{2}\dfrac{(\nabla\varphi)^2}{\varphi}\right)\sqrt{-g}\,d^4x$. Некорректность такого варианта теории ЙБД отмечалась еще в [9], поскольку в этом случае 10 уравнений определяют 11 величин.

Традиционная космологическая задача в рамках этой теории описывается уравнениями

$$\frac{3\dot a^2}{a^2}=\chi\varepsilon, \quad (28)$$

$$\frac{2\ddot a}{a}+\frac{\dot a^2}{a^2}=-\chi P, \quad (29)$$

$$R = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \tag{30}$$

$$\dot{\psi} = \frac{c}{a^3}, \quad 3\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}}, \tag{31}$$

где $\varepsilon = \varepsilon^{(c)} + \varepsilon_{rad}$, $P = P^{(c)} + P_{rad}$ ($\varepsilon^{(c)}$, $P^{(c)}$ и ε_{rad}, P_{rad} - соответственно плотность энергии и давление скалярного поля и поля излучения). Действительно, исходя из (24), представив тензор энергии-импульса скалярного поля в виде $T_\nu^{(c)\mu} = -P^{(c)}\delta_\nu^\mu + \left(\rho^{(c)} + P^{(c)}\right)U_\nu U^\mu$, можно по аналогии для скалярного поля ввести понятия плотности и давления:

$$\varepsilon^{(c)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\chi\psi^2}{6}\right)}\left(\frac{\dot{\psi}^2}{2} - \frac{\psi\ddot{\psi}}{3}\right), \tag{32}$$

$$P^{(c)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\chi\psi^2}{6}\right)}\left(\frac{\dot{\psi}^2}{6} + \frac{\dot{a}}{3a}\psi\dot{\psi}\right), \tag{33}$$

откуда следует

$$P^{(c)} = \frac{1}{3}\varepsilon^{(c)}. \tag{34}$$

Интегрирование системы уравнений дает следующий результат

$$\psi = -\frac{c}{c_1 a} + c_3, \quad a = \sqrt{2c_1 t + c_2}, \quad q = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1. \tag{35}$$

В случае доминирования конформно-связанного скалярного поля, подставляя (35) в (29), получим

$$c_1^2\left(3 - \frac{\chi}{2}c_3^2\right) = 0 \tag{36}$$

Поскольку $c_1 = 0$ не имеет смысла в рамках поставленной задачи, то $|c_3| = \sqrt{6/\chi}$. Понятно, что при наличии радиации постоянные интегрирования будут другими.

Из ковариантного постоянства тензора энергии-импульса $T_\nu^\mu = -P\delta_\nu^\mu + \left(\rho + P\right)u_\nu u^\mu$ следует

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{3\dot{a}}{a}\left(P + \varepsilon\right), \tag{37}$$

откуда при условии $P = (1/3)\varepsilon$, получим $\dot{\varepsilon}/\varepsilon = -4(\dot{a}/a)$.

7. *Заключение.* Таким образом, мы приходим к следующим выводам:

а) Наличие гравитационного скаляра создает возможность ускоренного расширения Вселенной и в радиационно-доминантной эпохе.

б) Наличие конформно-связанного скалярного поля соответствует эволюционному развитию Вселенной с коэффициентом $q = -1$, т.е.

замедленному расширению.

Эта модель интересна тем, что трансформируя действие (18), а именно, отбросив член $-R/2\chi$ и добавив хигтсовский потенциал [10], получаем

$$W=\int\sqrt{-g}\left[\frac{1}{12}R\varphi^2+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta-\frac{1}{12}\lambda\psi^4\right]d^4x. \qquad (38)$$

(38) можно конформно преобразовать так, чтобы потенциал скалярного поля обратился в константу, а "кинетический" член поглотился бы добавками, обусловленными конформным фактором. Преобразование это имеет вид

$$\hat{\psi}=\frac{\psi}{\chi}=\varepsilon=\text{const}\Rightarrow\psi=\varepsilon\chi,\quad \hat{g}_{\alpha\beta}=\chi^2 g_{\alpha\phi}$$

и в результате

$$\hat{W}=\int\sqrt{-\hat{g}}\left[-\frac{1}{2\hat{k}}\left(\hat{R}+2\Lambda\right)\right]d^4x, \qquad (39)$$

где введены обозначения $\hat{k}=-6/\varepsilon^2$, $\Lambda=(1/2)\lambda\varepsilon^2$ т.е. конформным скалярным полем создается эйнштейновское гравитационное поле.

Кафедра теоретической физики им.акад. Г.С.Саакяна, ЕГУ,
Армения, e-mail: rolavag@freenet.am ghar@freenet.am

ROLE OF A SCALAR FIELD IN THE RADIATION DOMINATED EPOCH OF THE UNIVERSE EVOLUTION

R.M.AVAKYAN, G.H.HAROUTUNYAN

Recently discovered accelerating expansion of the Universe is of current importance in the theoretical investigation of the Universe evolution. Presumably the reason of such a behavior is the presence of dark energy which by certain estimates constitutes 70% of the Universe content and generates "repulsive forces". In the present work the construction of the cosmological model which takes into account the presence of dark energy is realized within the framework of Jordan-Brans-Dicke tensor-scalar theory with dominating non-minimally coupled scalar field in the presence of the cosmological scalar. The radiation dominated epoch is considered.

Key words: *cosmology: cosmological scalar: dark energy: accelerating expansion*

ЛИТЕРАТУРА

1. *S.Weinberg*, Rev. of Modern Physics **61**, 1, 1989.
2. *Р.М.Авакян*, *Г.Г.Арутюнян*, Астрофизика, **48**, 633, 2005.
3. *H.Weyl*, Raum, Zeit, Materie, Berlin, 1923.
4. *A.Eddington*, Fundamental Theory, London, Cambridge, Univ. Press., 1948.
5. *R.Dicke*, Phys. Rev., **125**, 2163, 1962.
6. *Э.Е.Уиттекер*, *Дж.Н.Ватсон*, т.II, с.267-269.
7. *S.Weiberg*, Gravitation and cosmology, John Wiley and Sons, New York, 1972.
8. *J.D.Bekenshtein*, Ann. Phys. (N.Y.), **82**, 535, 1974.
9. *P.Jordan*, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig, 1951.
10. *В.Н.Меньшиков*, Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, вып.11, 164, Атомиздат, М. 1980.