

СИЛЬНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ЛИНЗИРОВАНИЕ НА ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЕ

Г.С.БИСНОВАТЫЙ-КОГАН^{1,2,3}, О.Ю.ЦУПКО^{1,3}

Поступила 20 августа 2007

Исследованы свойства релятивистских колец, возникающих в изображении источника, при наличии черной дыры между источником и наблюдателем. Рассчитаны прицельные параметры, а также расстояния минимального сближения лучей, образующих релятивистские кольца, их угловые размеры и коэффициенты "усиления", которые оказываются много меньше единицы.

Ключевые слова: *сильное гравитационное линзирование; шварцшильдовская черная дыра*

1. *Введение.* В теории гравитационного линзирования [1,2] одним из основных приближений является приближение слабого линзирования, т.е. малых углов отклонения. В случае шварцшильдовского линзирования на точечной массе это приближение означает, что прицельные параметры для налетающих фотонов много больше шварцшильдовского радиуса линзирующей системы. В большинстве астрофизических ситуаций, связанных с гравитационным линзированием, условие слабого линзирования хорошо выполняется и им можно ограничиться.

В некоторых случаях интересно, однако, рассмотреть эффекты, связанные с сильным линзированием и большими углами отклонения. Некоторые эффекты, связанные с учетом движения фотонов вблизи гравитационного радиуса черной дыры, рассматривались в [3,4]. В работах [5,6] было выведено в явном виде аналитическое выражение для угла отклонения в шварцшильдовской метрике в пределе сильного поля. В настоящей работе исследуются эффекты сильного искажения изотропного излучения звезды вследствие влияния гравитационного поля черной дыры.

2. *Множественные кольца вокруг черной дыры.* Рассмотрим движение фотона в окрестности черной дыры, имеющей шварцшильдовскую метрику. Будем работать в системе единиц, где шварцшильдовский радиус $R_g = 2M$ ($G = 1$, $c = 1$), M - масса черной дыры. Метрика Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Выпишем в параметрическом виде уравнения для радиуса r , угловой ϕ и временной t координат, определяющих орбиту фотона в шварцшильдовской метрике [7]:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + B^{-2}(r) = b^{-2}, \quad (2)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2}, \quad (3)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = b^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (4)$$

Здесь $B^{-2}(r) = (1/r^2)(1 - (2M/r))$ - эффективный потенциал, b - прицельный параметр. Вид орбиты фотона, налетающего из бесконечности на черную дыру, определяется [7] прицельным параметром b . Подробный анализ фотонных орбит при всех прицельных параметрах можно найти в [8].

1. Если $b < 3\sqrt{3}M$, то фотон падает к $R_S = 2M$ и поглощается черной дырой.

2. Если $b > 3\sqrt{3}M$, то фотон отклоняется на угол $\tilde{\alpha}$ и улетает на бесконечность. При этом имеются две возможности.

а) Если $b \gg 3\sqrt{3}M$, то орбита представляет собой почти прямую линию со слабым отклонением на угол $\tilde{\alpha} = 4M/R$, где R - минимальное расстояние подлета. Этот случай и рассматривается обычно в теории слабого гравитационного линзирования, когда прицельный параметр много больше шварцшильдовского радиуса линзы.

б) Если $0 < b/M - 3\sqrt{3} \ll 1$, то фотон совершает несколько оборотов вокруг черной дыры вблизи радиуса $r = 3M$ и улетает на бесконечность.

Из уравнения (2) легко получить минимальное расстояние R сближения фотона с черной дырой, определяемое условием $dr/d\lambda = 0$, $b = B(R)$. Прицельный параметр b и минимальное расстояние сближения R связаны соотношением

$$b^2 = \frac{R^3}{R - 2M}. \quad (5)$$

Очевидно, что критическому значению $b = 3\sqrt{3}M$ соответствует расстояние минимального сближения $R = 3M$. В случае большого прицельного параметра $b \gg M$ угол отклонения фотона, прилетевшего из бесконечности, равен $\tilde{\alpha} = 4M/R$ [9], и, как следует из формулы (5), $b \approx R(1 + M/R)$, т.е. прицельный параметр и минимальное расстояние сближения почти совпадают (см. также [8]).

Точный угол отклонения в шварцшильдовской метрике можно получить из уравнений (2) и (3). Легко видеть, что:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}. \quad (6)$$

Прямолинейному лучу соответствует изменение угловой координаты траектории на π , поэтому угол отклонения фотона в зависимости от массы M и радиуса минимального сближения R , с учетом (5), равен

$$\bar{\alpha} = 2 \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} - \pi. \quad (7)$$

Алгоритм расчета точного угла отклонения $\bar{\alpha}(b/M)$ приведен в [7]. Он основан на представлении интеграла (7) в виде эллиптического

$$\int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} = 2\sqrt{\frac{R}{Q}} F\left(\sqrt{\frac{8Q}{(6+Q-R)(R-2+Q)}}, \sqrt{\frac{6+Q-R}{2Q}}\right), \quad (8)$$

где

$$Q^2 = (R-2)(R+6). \quad (9)$$

Выражение точного угла отклонения через эллиптические интегралы впервые было выполнено в [8]. В приложении приведена подробная процедура сведения интеграла (7) к эллиптическому интегралу первого рода $F(z, k)$. В краткой форме подобную процедуру можно найти в [8].

Итак, согласно [7], точный угол отклонения $\bar{\alpha}(b/M)$ рассчитывается следующим образом. Представим эллиптический интеграл первого рода в виде

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\arcsin\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\phi)}}, \quad \sin\phi_0 = z. \quad (10)$$

1. Выбираем значение $r=R$ для шварцшильдовской координаты точки ближайшего подхода.

2. Вычисляем прицельный параметр из формулы $b^2 = R^3/(R-2)$.

3. Вычисляем Q из формулы $Q^2 = (R-2)(R+6)$.

4. Определяем модуль эллиптического интеграла первого рода k из формулы $k^2 = (6+Q-R)/2Q$.

5. Определяем $\sin\phi_{\min}$ из соотношения $\sin^2\phi_{\min} = (2+Q-R)/(6+Q-R)$.

6. Тогда полное отклонение будет равно

$$\bar{\alpha} = 4(R/Q)^{1/2} [F(1, k) - F(\sin\phi_{\min}, k)] - \pi. \quad (11)$$

Напомним, что если значение прицельного параметра близко к критическому ($b \approx 3\sqrt{3}M$, $b > 3\sqrt{3}M$, $R-3M \ll 1$), то фотон, прилетевший из бесконечности, совершает один или несколько оборотов вокруг черной дыры на $r \approx 3M$ и улетает на бесконечность. В этом случае (предел сильного отклонения) угол отклонения может быть записан

как [5,8].

$$\bar{\alpha} = -2 \ln \frac{R-3M}{36(2-\sqrt{3})M} - \pi. \quad (12)$$

Соответствующий прицельный параметр b можно получить, раскладывая выражение 5 в ряд до квадратичных членов по малому параметру $(R-3M)$. Прицельный параметр оказывается равным [8]:

$$b = 3\sqrt{3}M + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(R-3M)^2}{M}. \quad (13)$$

Используя это выражение, можно записать угол отклонения в зависимости от прицельного параметра b в виде

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= -\ln(b/M - 3\sqrt{3}) + \ln[648(7\sqrt{3} - 12)] - \pi = \\ &= -\ln\left(\frac{b}{b_{cr}} - 1\right) + \ln[216(7 - 4\sqrt{3})] - \pi \approx -\ln\left(\frac{b}{b_{cr}} - 1\right) - 0.40023, \end{aligned} \quad (14)$$

где $b_{cr} = 3\sqrt{3}M$ - критическое значение прицельного параметра, разделяющее фотоны, падающие в черную дыру, и улетающие на

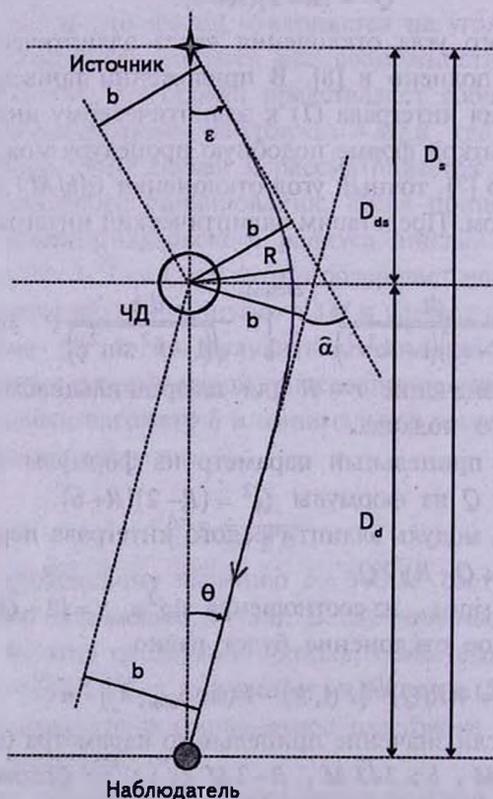


Рис.1. Отклонение луча света в случае, когда источник, линза и наблюдатель находятся на одной прямой. Траектория луча рассчитана с помощью уравнений (2) и (3) для следующих значений параметров: $R_s = 2$, $R = 7$, $b \approx 8.3$, $D_s = 32$, $D_d = 16$.

бесконечность. В последней записи выражение для угла отклонения совпадает с выражением в работе [6].

Пусть источник, линза и наблюдатель находятся на одной прямой (см. рис.1). В этом случае, как известно из теории гравитационного линзирования, формируется окружность, называемая кольцом Эйнштейна

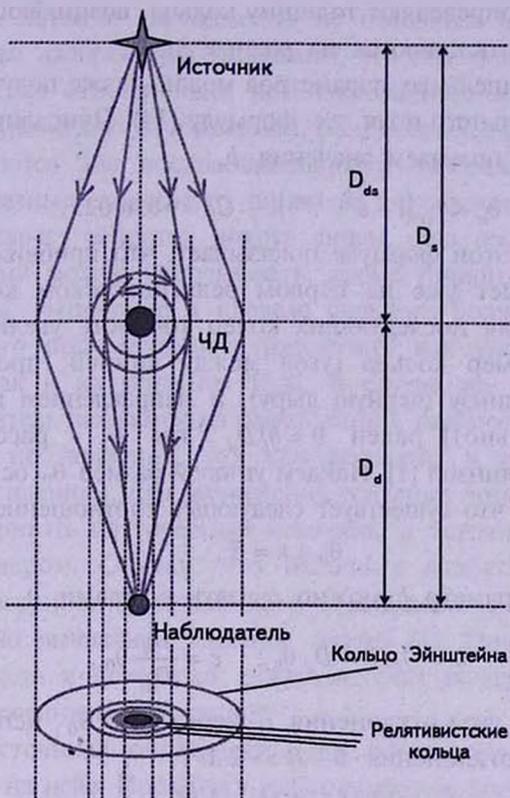


Рис.2. Кольцо Эйнштейна и релятивистские кольца.

[1]. Внутри этого "основного" кольца имеются кольца, образованные фотонами, испытавшими отклонение на $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, которые иногда называют релятивистскими (см. рис.2.). Приравнявая $\bar{\alpha}$ к $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, получаем, что эти релятивистские кольца локализованы на прицельных параметрах:

$$b/M - 3\sqrt{3} = 0.00653, 0.0000121, 0.0000000227, 0.423 \cdot 10^{-10}, 0.791 \cdot 10^{-13} \dots$$

Первые два числа приведены в книге [7]. При этом соответствующие минимальные расстояния подлета равны

$$R/M - 3 = 0.0902, 0.00375, 0.000162, 0.699 \cdot 10^{-5}, 0.302 \cdot 10^{-6}, \dots$$

Необходимо отметить, что в действительности для случая нахождения источника, наблюдателя и линзы на одной прямой фотон должен

испытать отклонение на угол, не равный в точности $2\pi n$, а немного больший, вследствие чего величины b и R оказываются меньше на малую поправку, которую мы, как и [7], не учитываем. Учет того, что угол отклонения отличается от $2\pi n$, используется при выводе формул для потока от релятивистских колец, где эти поправки принципиально важны, так как определяют толщину кольца, возникающую вследствие того, что лучи отклоняются на разные углы.

Значения прицельных параметров можно также получить, используя приближение сильного поля, т.е. формулу (14). Приравнивая $\bar{\alpha}(b) = 2\pi n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), получаем значения b_n :

$$b_n = b_{cr} (1 + e^{C_1 - 2\pi n}), \quad C_1 = -0.40023. \quad (15)$$

Вычисление по этой формуле показывает, что приближение сильного поля обеспечивает уже на первом релятивистском кольце точность около 0.4% и для последующих колец точность увеличивается.

Угловой размер кольца (угол между линией, проходящей через наблюдателя и линзу (черную дыру), и направлением на изображение источника (кольцо)) равен $\theta = b/D_d$, где D_d - расстояние между наблюдателем и линзой [1]. Найдем угловой размер θ_0 основного кольца. Из рис.1 видно, что существует следующее соотношение между углами:

$$\theta_0 + \varepsilon = \bar{\alpha}. \quad (16)$$

Прицельный параметр b можно связать с углами θ_0 и ε :

$$b = D_{ds} \varepsilon = D_d \theta_0; \quad \varepsilon = \frac{D_d}{D_{ds}} \theta_0. \quad (17)$$

Теперь выразим угол отклонения $\bar{\alpha}$ через угол θ_0 , используя приближение слабого отклонения $b \approx R \gg 2M$:

$$\bar{\alpha} = \frac{4M}{R} \approx \frac{4M}{b} = \frac{4M}{D_d} \frac{1}{\theta_0}. \quad (18)$$

Подставляя выражения для угла ε (17) и для угла отклонения (18) в (16), получаем уравнение для определения θ_0 :

$$\theta_0 + \frac{D_d}{D_{ds}} \theta_0 = \frac{4M}{D_d} \frac{1}{\theta_0}. \quad (19)$$

Отсюда, учитывая, что $D_d + D_{ds} = D_s$, получаем:

$$\theta_0 = \sqrt{4M \frac{D_{ds}}{D_d D_s}}, \quad (20)$$

где D_s - расстояние от наблюдателя до источника, D_{ds} - расстояние между линзой и источником. Угловые размеры θ_n релятивистских колец находятся из (17), (15) с учетом соотношений для релятивистских колец $\bar{\alpha} = 2\pi n$, $b = b_{cr} (1 + e^{C_1 - 2\pi n})$, в виде

$$\theta_n = \frac{b_{\sigma}}{D_d} (1 + e^{C_1 - 2\pi n}). \quad (21)$$

В простейшей модели точечной шварцшильдовской гравитационной линзы (в приближении слабого отклонения) источник считается точечным. Если источник, линза и наблюдатель не находятся на одной линии, формируются два изображения источника, угловые положения которых и усиление потока относительно нелинзированного источника можно рассчитать [1]. Кроме двух изображений, получающихся в пределе слабого поля, формируются две последовательности изображений точечного источника по разные стороны от линзы за счет фотонов, испытавших один или несколько оборотов вокруг линзы. Для расчета положений этих изображений можно использовать, кроме точного выражения для угла отклонения, выражение в пределе сильного поля. Использование предела сильного поля позволяет рассчитать как угловое положение изображений, так и их усиление [5,8]. В случае же, когда источник, линза и наблюдатель находятся на одной линии, рассмотрение источника как точечного не подходит, так как приводит к расходимости (к бесконечному усилению). Для вычисления усиления потока в этом случае следует рассматривать не точечный источник, а источник, обладающий конечным размером. Считая, что источник является круговым, с однородной поверхностной яркостью и с заданным конечным угловым размером, можно вычислить усиление потока [1]. Подобным образом, можно рассмотреть и потоки от релятивистских колец, получающихся сильным линзированием источника.

Поток от источника определяется его поверхностной яркостью и телесным углом на небе. Поскольку гравитационное отклонение света не связано с излучением или поглощением, интенсивность излучения остается постоянной вдоль луча. Более того, гравитационное отклонение света локальной, почти статичной линзой не вводит дополнительный сдвиг по частоте. Поэтому поверхностная яркость изображения линзированного источника равна яркости изображения источника в отсутствие линзы. В результате, отношение потоков в изображениях линзированного и нелинзированного источника определяется отношением телесных углов этих источников на небе [1], т.е. отношением площадей соответствующих изображений на фотопластинке или ПЗС матрице (в случае идеального изображения). Величина

$$\mu = \frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)_0}$$

называется коэффициентом усиления, где $(\Delta\omega)_0$ и $(\Delta\omega)$ означают телесные углы, под которыми, соответственно, видны нелинзированный и линзированный источники.

Найдем коэффициент усиления для основного изображения кругового источника углового радиуса β и однородной яркости, находящегося на одной линии с линзой и наблюдателем. Изображение источника представляет собой кольцо. Введем величину $y = \beta/\theta_0$, равную отношению углового размера источника к угловому размеру основного кольца. Нелинзированный источник занимает телесный угол $(\Delta\omega)_0 = \pi\beta^2 = \pi y^2 \theta_0^2$. Можно показать [1], что в пределе слабого линзирования круговой источник преобразуется в кольцо со следующими внутренним и внешним угловыми радиусами: $\theta_{in} = \frac{\theta_0}{2}(\sqrt{y^2+4} - y)$ и $\theta_{out} = \frac{\theta_0}{2}(\sqrt{y^2+4} + y)$. Таким образом, телесный угол, занимаемый кольцом, равен:

$$\Delta\omega = \pi(\theta_{out}^2 - \theta_{in}^2) = \pi \frac{\theta_0^2}{4} \left[(\sqrt{y^2+4} + y)^2 - (\sqrt{y^2+4} - y)^2 \right] = \pi\theta_0^2 y \sqrt{y^2+4}. \quad (22)$$

Получаем, что коэффициент усиления μ_0 основного кольца равен:

$$\mu_0 = \frac{\sqrt{y^2+4}}{y} \approx \frac{2}{y}, \quad \text{при } y \ll 1. \quad (23)$$

Найдем теперь "усиление" потока для релятивистских колец того же источника. С использованием результатов работы [10] можно показать, что n -ное релятивистское кольцо будет иметь следующие внутренний и внешний угловые радиусы:

$$\theta_{in}^n = \theta_n(1 - A_n(\theta_n + \beta)), \quad \theta_{out}^n = \theta_n(1 - A_n(\theta_n - \beta)), \quad (24)$$

где

$$A_n = \frac{D_s}{D_{ds}D_d} \frac{b_{cr}}{\theta_n} e^{C_1 - 2\pi n}.$$

Телесный угол, занимаемый таким релятивистским кольцом:

$$\Delta\omega = \pi \left[(\theta_{out}^n)^2 - (\theta_{in}^n)^2 \right] = 4\pi\theta_n^2(1 - A_n\theta_n)A_n\beta. \quad (25)$$

Получаем, что коэффициенты "усиления" μ_n релятивистских колец равны:

$$\mu_n = \frac{4\theta_n^2(1 - A_n\theta_n)A_n}{\beta}. \quad (26)$$

Величина

$$A_n\theta_n = \frac{D_s}{D_{ds}D_d} b_{cr} e^{C_1 - 2\pi n} \ll 1, \quad (27)$$

поэтому имеем с большой точностью

$$\mu_n = 4 \frac{\theta_n}{\beta} A_n\theta_n. \quad (28)$$

После преобразований получаем:

$$\mu_n = 4 \frac{b_{cr}^2}{\beta} \frac{D_s}{D_{ds} D_d^2} (1 + e^{C_1 - 2\pi n}) e^{C_1 - 2\pi n} \ll \mu_0. \quad (29)$$

С учетом выражений для $b_{cr} = 3\sqrt{3} M = (3\sqrt{3}/2) R_S$ и $\beta = R_s/D_s$, где R_s - радиус источника, получаем:

$$\mu_n = 27 \frac{R_S^2 D_s^2}{R_s D_{ds} D_d^2} (1 + e^{C_1 - 2\pi n}) e^{C_1 - 2\pi n} \ll 1. \quad (30)$$

Для далекого квазара с $M_s = 10^9 M_\odot$, $R_s = 15 R_{S,S}$ ($R_{S,S} = 2GM_s/c^2$), $D_{ds} = 10^3$ Мпк, $D_d = 3$ Мпк, $D_s \approx D_{ds}$ и линзы массы $M = 10^7 M_\odot$, получаем:

$$\mu_0 = 1 \cdot 10^6, \quad \mu_1 = 2 \cdot 10^{-15}, \quad \mu_2 = 4 \cdot 10^{-18}. \quad (31)$$

Для того же квазара с массой линзы $M = 20 M_\odot$ и $D_d = 1$ кпк получаем:

$$\mu_0 = 9 \cdot 10^4, \quad \mu_1 = 9 \cdot 10^{-20}, \quad \mu_2 = 2 \cdot 10^{-22}. \quad (32)$$

Значительное усиление μ_0 связано с малыми размерами источника и предположением о нахождении источника, линзы и наблюдателя на одной линии. Если рассматривать точечный источник, находящийся на одной линии с наблюдателем и линзой, то усиление обращается в бесконечность, что связано как с предполагаемой точечностью источника, так и с приближением геометрической оптики. Если рассматривать не точечные источники, а источники конечного углового размера, то бесконечное усиление становится конечным, но тем большим, чем меньше размеры источника. Для источников же малого размера становится важным учет различных эффектов, прежде всего волновых, что приводит к тому, что в действительности коэффициент усиления меньше [2].

В работе [5] выводится общая формула для коэффициента усиления источника конечного размера. В используемом там подходе используется приближение отклонения на углы $2\pi n$, без учета малых отличий от этих углов, и коэффициент усиления находится интегрированием формул для точечных источников, в отличие от "геометрического" подхода, используемого здесь. Выражение (29) совпадает с выражением, которое можно получить из общей формулы для источника конечного размера в работе [5].

3. *Диаграмма излучения точечного источника, расположенного вблизи черной дыры.* Рассмотрим более подробно влияние на угловое распределение излучения звезды поля черной дыры, находящейся на одной линии с наблюдателем (рис.1). Проведем условную плоскость, проходящую через звезду, перпендикулярно линии D_{ds} . Будем говорить, что испущенные фотоны полетели "вверх", если при большом удалении от звезды фотоны оказываются в верхней полуплоскости. Фотоны полетели "вниз", если фотоны оказываются в нижней полуплоскости. В отсутствие черной дыры звезда излучает изотропно. Поэтому "вверх"

и "вниз" идет одинаковая доля излучения (см. рис.3а). Фотоны, летящие "вверх" и "вниз" показаны различными типами штриховки.

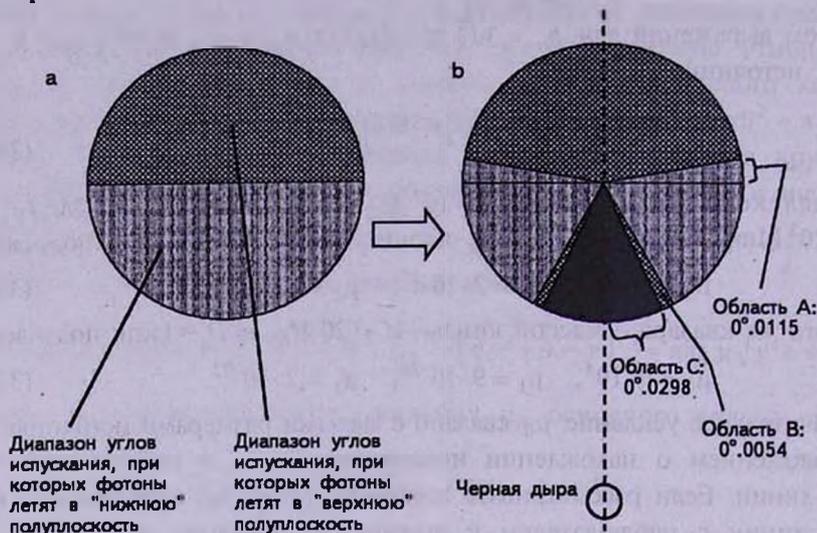


Рис.3. Черная дыра отклоняет свет, испущенный изотропно излучающим источником. Направление испускания фотона задается углом ε , откладываемым от вертикали, $\varepsilon = (0, \pi)$.

При наличии "внизу" черной дыры между звездой и наблюдателем угловое распределения излучения меняется. Учтем следующие три эффекта:

- 1) захват черной дырой фотонов, испущенных с малым прицельным параметром;
- 2) отклонение фотонов, испущенных под углами вблизи 90 градусов от вертикали;
- 3) возврат "наверх" фотонов, испущенных вниз и совершивших пол-оборота вокруг черной дыры.

Расчет проведен для следующих параметров системы: расстояния (в единицах массы): $D_{ds} = 10000 M$, шварцшильдовский радиус $R_s = 2M$. Для фотонов, испущенных почти перпендикулярно к оси, используем приближение слабого отклонения: $\bar{a} = 2M/b = 2M/D_{ds}$. Для фотонов, испущенных вниз, мы используем другое приближение: считаем, что они испущены на бесконечности от черной дыры (а не на конечном расстоянии D_{ds}), что является стандартным приближением в гравитационном линзировании. Вследствие этого прицельный параметр b (прицельный параметр на бесконечности) мы считаем равным

¹ Угол отклонения $\bar{a} = 4M/b$ в случае, если фотон движется из бесконечности, долетает до расстояния наименьшего сближения и улетает на бесконечность. В данном случае фотон пролетает половину этого пути - он движется от точки наименьшего сближения на бесконечность. Поэтому для такого фотона $\bar{a} = 2M/b$.

"геометрическому" прицельному параметру испускания фотонов звездой: $b = D_{ds} \sin \varepsilon \approx D_{ds} \varepsilon$, где ε - угол испускания, откладываемый от вертикали (см. рис.1). Для фотонов, возвращающихся назад, мы используем алгоритм расчета отклонения, взятый из [7] и приведенный выше.

Результаты расчета приведены на рис.3б. Черная область показывает диапазон углов испускания, фотоны из которого захватываются черной дырой. Кроме того, видно, что часть фотонов, изначально испущенная "вверх", завернутся "вниз" и что часть фотонов, испущенная "вниз", попадет "наверх". Отметим на рисунке три характерные угловые области: А, В, С. Область А (на рисунке в силу симметрии таких областей две) - это угловой диапазон фотонов, испущенных под углами, большими 90 градусов от вертикали, но полетевших "вниз" вследствие притяжения черной дыры. Область В (таких областей на рисунке две) - это угловой диапазон фотонов, испущенных под углами, близкими к критическому значению (при котором происходит захват), совершивших пол-оборота и полетевших "наверх". Область С (черная область на рисунке) - угловой диапазон испущенных фотонов, которые захватываются черной дырой. Угловой размер области А = $0^{\circ}.0115$; угловой размер области В = $0^{\circ}.0054$; угловой размер области С = $0^{\circ}.0298$. На рисунке размеры всех трех областей сильно увеличены для визуализации, но соотношение между угловыми размерами областей А, В и С сохранено.

В результате вычислений можно сделать два качественных вывода, сохраняющихся и на других расстояниях D_{ds} между черной дырой и звездой (при использовании таких же приближений для углов отклонения):

1. При наличии черной дыры "наверх" будет излучаться больше - из-за большой доли фотонов, захваченных черной дырой.
2. Число фотонов, испущенных почти перпендикулярно вертикали и отклоненных "вниз", больше, чем число фотонов, испытавших пол-оборота и полетевших "наверх".

К наблюдателю, конечно, приходит только малая часть лучей, отклоненных в некоторую полуплоскость. Если наблюдатель находится на одной прямой с черной дырой и звездой в "нижней" полуплоскости, то отклонение фотонов, испущенных на углах чуть больше 90 градусов от вертикали, вообще не скажется на наблюдении.

¹ Институт космических исследований Российской академии наук, Россия, e-mail: gkogan@iki.rssi.ru

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

³ Московский инженерно-физический институт, Москва, Россия e-mail: tsupko@iki.rssi.ru

Приложение. Рассмотрим два интеграла, $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$, и покажем, что они тождественно равны друг другу.

$$\alpha^{(1)} = 2 \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2}{r}\right)}}, \quad \text{где } b^2 = R^3 / (R-2); \quad (33)$$

$$\alpha^{(2)} = 4(R/Q)^{1/2} [F(1, k) - F(\sin \varphi_{\min}, k)], \quad (34)$$

где

$$Q^2 = (R-2)(R+6), \quad k^2 = (Q-R+6)/2Q, \quad \sin^2 \varphi_{\min} = (2+Q-R)/(6+Q-R).$$

Сделаем в интеграле $\alpha^{(1)}$ замену $u = 1/r$, $du = (-1/r^2)dr$. При такой замене $R \rightarrow 1/R$, $\infty \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} 2 \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2}{r}\right)}} &= -2 \int_{1/R}^0 \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2(1-2u)}} = 2 \int_0^{1/R} \frac{du}{\sqrt{2u^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}}} = \\ &= 2 \int_0^{1/R} \frac{du}{\sqrt{2u^3 - u^2 + \frac{R-2}{R^3}}} = 2R^{3/2} \int_0^{1/R} \frac{du}{\sqrt{2u^3 R^3 - u^2 R^3 + R-2}}. \end{aligned}$$

Подкоренное выражение является кубическим многочленом относительно u , разложим его на три сомножителя. Для этого необходимо найти корни кубического уравнения $2u^3 R^3 - u^2 R^3 + R - 2 = 0$. Один из корней несложно найти подбором: $u = 1/R$. Зная этот корень, можно разложить кубический многочлен на произведение:

$$2u^3 R^3 - u^2 R^3 + R - 2 = (u - 1/R) [2R^3 u^2 - (R-2)R^2 u - (R-2)R].$$

Квадратный многочлен, стоящий в квадратных скобках, можно выделением полного квадрата разложить на множители:

$$2R^3 u^2 - (R-2)R^2 u - (R-2)R = 2R^3(u-A)(u-C).$$

Здесь:

$$A = \frac{R-2+Q}{4R}, \quad C = \frac{R-2-Q}{4R} < 0,$$

где

$$Q^2 = R^2 + 4R - 12 = (R-2)(R+6).$$

Таким образом, мы свели подкоренное выражение к произведению трех сомножителей:

$$2u^3 R^3 - u^2 R^3 + R - 2 = 2R^3(u-A)(u-B)(u-C), \quad \text{где } B \equiv 1/R.$$

В справочнике [11] приводится следующая формула (верхний предел совпадает с постоянной в одном из множителей):

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} F(\delta, q), \quad [a > b > u \geq c],$$

где

$$\delta = \arcsin \sqrt{\frac{(a-c)(b-u)}{(b-c)(a-u)}}, \quad q = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}.$$

В нашем случае:

$$\frac{(A-C)B}{(B-C)A} = \frac{8Q}{(6-R+Q)(R-2+Q)}, \quad \frac{B-C}{A-C} = \frac{6-R+Q}{2Q}, \quad A-C = \frac{Q}{2R}.$$

Поэтому:

$$\int_0^{1/R} \frac{du}{\sqrt{(u-A)(u-B)(u-C)}} = 2\sqrt{\frac{2R}{Q}} F\left(\sqrt{\frac{8Q}{(6-R+Q)(R-2+Q)}}, \sqrt{\frac{6-R+Q}{2Q}}\right).$$

Таким образом, мы свели исходный интеграл к эллиптическому интегралу первого рода. В формуле, приведенной в [7], приведена разность двух эллиптических интегралов (см. (34)), один из которых - так называемый полный эллиптический интеграл (верхний предел = 1). Оказывается, что интеграл, полученный выше, и эта разность - одно и то же.

В [12] приведено следующее свойство эллиптических интегралов (цитируем в наших обозначениях эллиптического интеграла (10)):

$$F(z_1, k) + F(z_2, k) = F(1, k),$$

если выполняется следующее равенство между аргументами:

$$\sqrt{1-k^2} \frac{z_1}{\sqrt{1-z_1^2}} \frac{z_2}{\sqrt{1-z_2^2}} = 1.$$

Соответствующими выкладками можно убедиться, что при

$z_1 = \sqrt{\frac{8Q}{(6-R+Q)(R-2+Q)}}$, $z_2 = \sqrt{\frac{2+Q-R}{6+Q-R}}$, $k = \sqrt{\frac{6-R+Q}{2Q}}$ это соотношение выполняется. Поэтому:

$$\begin{aligned} & F\left(\sqrt{\frac{8Q}{(6-R+Q)(R-2+Q)}}, \sqrt{\frac{6-R+Q}{2Q}}\right) = \\ & = F\left(1, \sqrt{\frac{6-R+Q}{2Q}}\right) - F\left(\sqrt{\frac{2+Q-R}{6+Q-R}}, \sqrt{\frac{6-R+Q}{2Q}}\right). \end{aligned}$$

Итак, запишем полное преобразование:

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= 2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2}{r}\right)}} = 2 \int_0^{1/R} \frac{du}{\sqrt{2u^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}}} = 2R^{3/2} \int_0^{1/R} \frac{du}{\sqrt{2u^3 R^3 - u^2 R^3 + R - 2}} = \\ &= 2R^{3/2} \int_0^{1/R} \frac{du}{\sqrt{(u-1/R)(2R^3 u^2 - (R-2)R^2 u - (R-2)R)}} = \\ &= \frac{2R^{3/2}}{\sqrt{2}R^{3/2}} \int_0^B \frac{du}{\sqrt{(u-A)(u-B)(u-C)}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} \sqrt{\frac{2R}{Q}} F\left(\sqrt{\frac{8Q}{(6-R+Q)(R-2+Q)}}, \sqrt{\frac{6-R+Q}{2Q}}\right) = \\
&= 4 \sqrt{\frac{R}{Q}} F\left(\sqrt{\frac{8Q}{(6-R+Q)(R-2+Q)}}, \sqrt{\frac{6-R+Q}{2Q}}\right) = \\
&= 4 \sqrt{\frac{R}{Q}} \left[F\left(1, \sqrt{\frac{6-R+Q}{2Q}}\right) - F\left(\sqrt{\frac{2+Q-R}{6-R+Q}}, \sqrt{\frac{6-R+Q}{2Q}}\right) \right] = \\
&= 4(R/Q)^{1/2} [F(1, k) - F(\sin\varphi_{min}, k)] = \alpha^{(2)}.
\end{aligned}$$

STRONG GRAVITATIONAL LENSING BY SCHWARZSCHILD BLACK HOLE

G.S.BISNOVATYI-KOGAN^{1,2,3}, O.YU.TSUPKO^{1,3}

Properties of relativistic rings which appear in the image of source in the presence of a black hole between source and observer are investigated. Impact parameters as well as closest approach distances for rays forming relativistic rings, their angular sizes and "magnification" factors which are found to be much less than unit are calculated.

Key words: *strong gravitational lensing; Schwarzschild black hole*

ЛИТЕРАТУРА

1. P.Schneider, J.Ehlers, E.Falco, Gravitational lensing, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
2. П.В.Блюх, А.А.Минаков, Гравитационные линзы, Наукова Думка, Киев, 1989.
3. W.Ames, K.Thorne, Astrophys. J., 151, 659, 1968.
4. G.S.Bisnovatyι-Kogan, A.A.Ruzmaikιn, Astrophys. Space Sci., 28, 45, 1974.
5. V.Bozza, S.Capozziello, G.Iovane, G.Scarpetta, General Relativity and Gravitation, 33, 1535, 2001.
6. V.Bozza, Phys. Rev. D, 66, 103001, 2002.
7. C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler, Gravitation, Freeman, New York, 1973.
8. C.Darwin, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 249 (1257), 180, 1959.
9. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, Наука, М., 1962.
10. V.Bozza, M.Sereno, Phys. Rev. D, 73, 103004, 2006.
11. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм и произведений, Наука, М., 1971.
12. М.Абрамовиц, И.Стиган, Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, Наука, М., 1979.