

НЕСТАЦИОНАРНОЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЕ: АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЯ

Д.И.НАГИРНЕР, С.Л.КИРУШЕВА

Поступила 26 октября 2007

Принята к печати 14 ноября 2007

С целью выбора численного метода решения нестационарных уравнений переноса излучения получено точное решение задачи о нестационарном поле излучения в одномерной бесконечной среде с монохроматическим изотропным рассеянием при произвольном распределении источников и произвольной зависимости их мощности от времени. Наилучшим методом оказался метод Лакса-Вендрофа. Вследствие принятого условия, что задержка излучения происходит из-за конечности скорости света, при применении численного метода возникает трудность, заключающаяся в том, что область изменения переменных (координаты τ и времени t) имеет треугольную форму (неравенство $\tau \leq t$). Трудность преодолена разложением искомым функций при малых значениях времени и координаты в ряды. Сравнением численного решения с точным для случая точечного источника с определенной временной зависимостью его мощности и чистого рассеяния сделаны оценки необходимой величины шагов по переменным для достижения желаемой точности. Численный метод предполагается применить для расчета интенсивности и поляризации излучения источников в ранней Вселенной в эпохи, близкие к эпохе рекомбинации.

Ключевые слова: *рассеяние излучения; нестационарное*

1. **Введение.** В этой работе даны аналитическое и численное решения простой задачи о нестационарном монохроматическом рассеянии излучения в так называемой одномерной среде.

Идеализированная среда называется одномерной, если при рассеянии в ней фотон может либо сохранить направление своего движения, либо изменить его на противоположное (рассеяние вперед-назад), так что он распространяется вдоль одной прямой. Предположение об одномерности среды равносильно допущению, что рассеяние происходит с индикатрисой, равной сумме игольчатых (дельтаобразных) индикатрис. Рассеяние в такой постановке рассматривалось в начале развития теории переноса [1-6]. Описание рассеяния в обычной (трехмерной) среде приближенно сводится к уравнениям переноса в одномерной среде [1].

Здесь рассматриваем задачу о распространении излучения в одномерной среде с неизменными оптическими свойствами. Считается, что рассеяние изотропное монохроматическое и, как это обычно принимается для монохроматического рассеяния, задержка фотонов по времени происходит за счет времени, проводимого ими в пути, а акт рассеяния

совершается мгновенно. Источники первичного излучения могут быть неизотропными, распределенными в среде произвольным образом, и произвольно зависеть от времени.

Поскольку среда стационарна, можно ввести оптическое расстояние τ , отсчитываемое от некоторой точки в единицах длины среднего свободного пробега фотонов. Ограничимся рассмотрением рассеяния в бесконечной среде, в которой оптическое расстояние τ изменяется от $-\infty$ до ∞ . Время t также измеряем в средних временах свободного пробега. Источники могут действовать, начиная с $t = -\infty$, когда поле излучения отсутствует. Решение такой задачи получено в явной аналитической форме.

Основное внимание уделяется точечному источнику с определенной зависимостью мощности его излучения от времени. Наличие точного решения позволило выбрать численный метод решения уравнений, подобных описывающим рассеяние в одномерной среде. Численный метод предполагается применить в отдельной статье для расчета эволюции интенсивности и поляризации излучения источников в ранней Вселенной в эпохи, близкие к эпохе рекомбинации (см., например, [7] или [8]).

2. *Основные уравнения.* Обозначим интенсивности излучения, идущего в стороны возрастания и убывания оптических глубин, соответственно через $I_+(t, \tau)$ и $I_-(t, \tau)$. Тогда два уравнения, описывающие эволюцию поля излучения, запишутся в виде

$$\dot{I}_{\pm}(t, \tau) \pm I'_{\pm}(t, \tau) = -I_{\pm}(t, \tau) + B_{\pm}(t, \tau). \quad (1)$$

Здесь производная по времени отмечается точкой, а по оптическому расстоянию - штрихом. Две функции источников, как и всегда, состоят из двух частей, а именно, из части, характеризующей мощность первичного излучения, и слагаемого, описывающего рассеяние:

$$B_{\pm}(t, \tau) = g_{\pm}(t, \tau) + \lambda J_c(t, \tau),$$

где λ - вероятность выживания фотона при каждом рассеянии. Здесь же введена средняя интенсивность $J_c(t, \tau)$. Введем сразу и поток излучения:

$$J_c(t, \tau) = \frac{I_+(t, \tau) + I_-(t, \tau)}{2}, \quad \mathcal{H}_c(t, \tau) = \frac{I_+(t, \tau) - I_-(t, \tau)}{2}.$$

Сложение и вычитание уравнений (1) приводит к уравнениям для средней интенсивности и потока:

$$\begin{aligned} \dot{J}_c(t, \tau) + \mathcal{H}'_c(t, \tau) + (1 - \lambda)J_c(t, \tau) &= f_J(t, \tau), \\ \dot{\mathcal{H}}_c(t, \tau) + J'_c(t, \tau) + \mathcal{H}_c(t, \tau) &= f_H(t, \tau), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$f_J(t, \tau) = \frac{g_+(t, \tau) + g_-(t, \tau)}{2}, \quad f_H(t, \tau) = \frac{g_+(t, \tau) - g_-(t, \tau)}{2}.$$

3. *Преобразования Лапласа.* Действенным средством решения нестационарных задач является применение преобразования Лапласа по времени. Результат преобразования будем отмечать тильдой над преобразуемой функцией:

$$\tilde{J}(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} J_c(t, \tau) e^{-s t} dt, \quad \tilde{H}(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} H_c(t, \tau) e^{-s t} dt.$$

Применение преобразования к уравнениям (2) при нулевых начальных (при $t = -\infty$) условиях дает

$$\tilde{H}'(\tau, s) = -(s+1-\lambda)\tilde{J}(\tau, s) + \tilde{f}_J(\tau, s), \quad \tilde{J}'(\tau, s) = -(s+1)\tilde{H}(\tau, s) + \tilde{f}_H(\tau, s). \quad (3)$$

Решение уравнений (3) находим, считая параметр преобразования s вещественным и неотрицательным. Найдя общее решение однородного и частное решение неоднородного уравнений, и приняв во внимание, что решения должны оставаться конечными при $\tau \rightarrow \pm\infty$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tau, s) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|\tau-\tau'|} \left[\frac{s+1}{k} \tilde{f}_J(\tau', s) + \tilde{f}_H(\tau', s) \operatorname{sgn}(\tau-\tau') \right] d\tau', \\ \tilde{H}(\tau, s) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|\tau-\tau'|} \left[\tilde{f}_J(\tau', s) \operatorname{sgn}(\tau-\tau') + \frac{k}{s+1} \tilde{f}_H(\tau', s) \right] d\tau'. \end{aligned}$$

Здесь положительный корень $k = \sqrt{(s+1)(s+1-\lambda)}$.

4. *Обращение преобразований.* Для обращения преобразований Лапласа воспользуемся формулами 4.17 (5)-(9) из справочника [9]. Выделив сингулярные слагаемые, возникающие при обращении частей преобразований, которые при $s \rightarrow \infty$ ведут себя как $e^{-(s+1-\lambda/2)|\tau-\tau'|}$, запишем результат обращения в виде

$$\begin{aligned} J_c(t, \tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-(1-\lambda/2)|\tau-\tau'|} [f_J(t-|\tau-\tau'|, \tau') + f_H(t-|\tau-\tau'|, \tau') \operatorname{sgn}(\tau-\tau')] + \\ &+ \frac{\lambda}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{t-|\tau-\tau'|} dt' e^{-(1-\lambda)(t-t')} [G_{JJ}(\lambda(t-t'), \lambda(\tau-\tau')) f_J(t', \tau') + G_{JH}(\lambda(t-t'), \lambda(\tau-\tau')) f_H(t', \tau')], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H_c(t, \tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-(1-\lambda/2)|\tau-\tau'|} [f_J(t-|\tau-\tau'|, \tau') \operatorname{sgn}(\tau-\tau') + f_H(t-|\tau-\tau'|, \tau')] + \\ &+ \frac{\lambda}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{t-|\tau-\tau'|} dt' e^{-(1-\lambda)(t-t')} [G_{HH}(\lambda(t-t'), \lambda(\tau-\tau')) f_J(t', \tau') + G_{HH}(\lambda(t-t'), \lambda(\tau-\tau')) f_H(t', \tau')]. \end{aligned} \quad (5)$$

Функции Грина, через которые выражаются решения, задаются формулами

$$G_{JJ}(t, \tau) = e^{-t/2} \left[\frac{t}{\omega} I_1\left(\frac{\omega}{2}\right) + I_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \right], \quad (6)$$

$$G_{\text{HH}}(t, \tau) = e^{-t/2} \left[\frac{t}{\omega} I_1 \left(\frac{\omega}{2} \right) - I_0 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right],$$

$$G_{\text{JH}}(t, \tau) = G_{\text{HJ}}(\tau, t) = e^{-t/2} \frac{\tau}{\omega} I_1 \left(\frac{\omega}{2} \right). \quad (7)$$

В этих формулах $I_n(z)$ - функции Бесселя мнимого аргумента, а $\omega = \sqrt{t^2 - \tau^2}$. Функции Грина имеют смысл при $t \geq |\tau|$, что определяет верхние пределы интегрирования в формулах (4)-(5). Значения функций на границе области их определения при $t = |\tau|$

$$G_{\text{JJ}}(|\tau|, \tau) = e^{-|\tau|/2} \left[\frac{|\tau|}{4} + 1 \right], \quad G_{\text{HH}}(|\tau|, \tau) = e^{-|\tau|/2} \left[\frac{|\tau|}{4} - 1 \right], \quad G_{\text{JH}}(|\tau|, \tau) = e^{-|\tau|/2} \frac{\tau}{4}. \quad (8)$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что функции (6)-(7) удовлетворяют однородным уравнениям

$$\dot{G}_{\text{JJ}} + G'_{\text{HJ}} = 0, \quad \dot{G}_{\text{JH}} + G'_{\text{HH}} = 0, \quad G_{\text{HH}} + \dot{G}_{\text{HH}} + G'_{\text{HJ}} = 0, \quad G_{\text{JH}} + \dot{G}_{\text{JH}} + G'_{\text{JJ}} = 0,$$

с помощью которых можно убедиться, что формулы (4)-(5) действительно определяют решения уравнений (2).

Выражение (6) было получено И.Н.Мининым [4].

5. *Точечный источник.* Рассмотрим важный частный случай, когда нестационарный изотропный точечный источник действует при $t \geq 0$. Ему отвечают функции

$$f_{\text{J}}(t, \tau) = \delta(\tau) \mathcal{L}(t), \quad f_{\text{H}}(t, \tau) = 0,$$

где функция $\mathcal{L}(t)$ характеризует изменение мощности источника со временем. Будем считать ее непрерывной и достаточно быстро убывающей, так что эффективное время действия источника t_e конечно. Соответствующие средняя интенсивность и поток представляются однократными интегралами. При $t \geq |\tau|$

$$J_c(t, \tau) = \frac{1}{2} e^{-(1-\lambda/2)|\tau|} \mathcal{L}(t-|\tau|) + J_1(t, \tau),$$

$$H_c(t, \tau) = \frac{1}{2} e^{-(1-\lambda/2)|\tau|} \mathcal{L}(t-|\tau|) \text{sgn}(\tau) + H_1(t, \tau), \quad (9)$$

где интегральные слагаемые

$$J_1(t, \tau) = \frac{\lambda}{4} \int_0^{t-|\tau|} dt' e^{-(1-\lambda)(t-t')} G_{\text{JJ}}(\lambda(t-t'), \lambda\tau) \mathcal{L}(t'),$$

$$H_1(t, \tau) = \frac{\lambda}{4} \int_0^{t-|\tau|} dt' e^{-(1-\lambda)(t-t')} G_{\text{HJ}}(\lambda(t-t'), \lambda\tau) \mathcal{L}(t'). \quad (10)$$

Средняя интенсивность при всех τ и $t > |\tau|$ непрерывна. При $\tau = 0$ и $\mathcal{L}(t) > 0$, т.е. в месте расположения точечного источника и во время

его действия поток терпит разрыв: $\mathcal{H}(+0, t) - \mathcal{H}(-0, t) = \mathcal{L}(t)$. В точках $\tau = \pm t$, в которых свечение только начинается, полученные решения имеют следующие граничные значения:

$$\mathcal{J}(|\tau|, \tau) = \frac{1}{2} e^{-(1-\lambda/2)|\tau|} \mathcal{L}(0), \quad \mathcal{H}(|\tau|, \tau) = \mathcal{J}(|\tau|, \tau) \operatorname{sgn}(\tau). \quad (11)$$

Нетрудно определить поведение решений на больших временах по сравнению со временем действия источника и с расстоянием от него, т.е. при $t \gg t_0$ и $t \gg \tau$. Будем считать малыми отношения t_0/t и τ/t , но отношение $t_0 = \tau^2/t$ полагаем порядка единицы (t_0/t мало). При $\lambda = 1$

$$J_i(t, \tau) \sim \frac{e^{-t_0/4}}{2\sqrt{\pi \cdot t}} \left\{ \mathcal{L}_0 - \left[\mathcal{L}_1 \left(\frac{t_0}{4} - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{L}_0 \left(\frac{t_0^2}{16} - \frac{t_0}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] \frac{1}{t} + \left[\mathcal{L}_2 \left(\frac{t_0^2}{32} - \frac{3t_0}{8} + \frac{3}{8} \right) + \mathcal{L}_1 \left(\frac{t_0^3}{64} - \frac{11}{32} t_0^2 + \frac{21}{16} t_0 - \frac{3}{8} \right) + \mathcal{L}_0 \left(\frac{t_0^4}{512} - \frac{t_0^3}{16} + \frac{27}{64} t_0^2 - \frac{3}{8} t_0 - \frac{3}{32} \right) \right] \frac{1}{t^2} \right\}, \quad (12)$$

$$H_i(t, \tau) \sim \frac{e^{-t_0/4}}{2\sqrt{\pi \cdot t}} \frac{\tau}{t} \left\{ \mathcal{L}_0 - \left[\mathcal{L}_1 \left(\frac{t_0}{4} - \frac{3}{2} \right) + \mathcal{L}_0 \left(\frac{t_0^2}{16} - \frac{3}{4} t_0 + \frac{3}{4} \right) \right] \frac{1}{t} + \left[\mathcal{L}_2 \left(\frac{t_0^2}{32} - \frac{5t_0}{8} + \frac{15}{8} \right) + \mathcal{L}_1 \left(\frac{t_0^3}{64} - \frac{15}{32} t_0^2 + \frac{45}{16} t_0 - \frac{15}{8} \right) + \mathcal{L}_0 \left(\frac{t_0^4}{512} - \frac{5}{64} t_0^3 + \frac{45}{64} t_0^2 - \frac{15}{16} t_0 - \frac{15}{32} \right) \right] \frac{1}{t^2} \right\}.$$

В этих равенствах моменты мощности источника

$$\mathcal{L}_n = \int_0^{\infty} \mathcal{L}(t) t^n dt, \quad (13)$$

которые предполагаются конечными.

Главные слагаемые асимптотик представляют решения уравнения диффузии, причем выполняется диффузионное соотношение между средней интенсивностью и потоком: $H(t, \tau) = -J'(t, \tau)$. Поток убывает со временем существенно быстрее средней интенсивности.

6. *Прямое и рассеянное излучение.* Решения уравнений (2) при $\lambda = 0$ представляют излучение, идущее непосредственно от источника, не испытывая ни одного рассеяния. В случае точечного источника эти решения

$$J_s(t, \tau) = \frac{1}{2} e^{-|\tau|} \mathcal{L}(t - |\tau|), \quad H_s(t, \tau) = J_s(t, \tau) \operatorname{sgn}(\tau). \quad (14)$$

Рассеянное (диффузное) излучение характеризуется величинами, обращающимися в нуль при $\lambda = 0$ и равными разностям соответствующих функций (9) и (14), т.е.

$$J_d(t, \tau) = J_s(t, \tau) + J_i(t, \tau), \quad H_d(t, \tau) = J_s(t, \tau) \operatorname{sgn}(\tau) + H_i(t, \tau),$$

где внеинтегральное слагаемое

$$J_s(t, \tau) = \mathcal{A}(\tau) \mathcal{L}(t - |\tau|), \quad \mathcal{A}(\tau) = \frac{1}{2} \left(e^{-(1-\lambda/2)|\tau|} - e^{-|\tau|} \right). \quad (15)$$

Функции $J_d(t, \tau)$ и $\mathcal{H}_d(t, \tau)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{J}_d(t, \tau) + \mathcal{H}'_d(t, \tau) + (1-\lambda)J_d(t, \tau) &= J_s(t, \tau), \\ \dot{\mathcal{H}}_d(t, \tau) + J'_d(t, \tau) + \mathcal{H}_d(t, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Граничные условия для них аналогичны (11), только вместо одной экспоненты надо взять разность, т.е. заменить множитель при $\mathcal{L}(0)$ на функцию $\mathcal{A}(\tau)$. В месте расположения источника (при $\tau = 0$) средняя интенсивность и поток рассеянного излучения непрерывны, причем

$$J_s(t, 0) = \mathcal{H}_d(t, 0) = 0.$$

Асимптотики функций $J_d(t, \tau)$, $\mathcal{H}_d(t, \tau)$ совпадают с асимптотиками функций $J_i(t, \tau)$ и $H_i(t, \tau)$, так как внеинтегральные слагаемые убывают быстрее интегралов.

Ввиду очевидной четности средней интенсивности и нечетности потока по τ в дальнейшем считаем $\tau \geq 0$, т.е. рассматриваем поле излучения с одной стороны от источника.

7. *Степенные источники.* Рассмотрим один довольно общий вид источников, мощность которых вблизи начала их действия допускает степенное разложение по времени:

$$\mathcal{L}(t) = t^\mu L(t), \quad L(t) = \sum_{l=0}^{\infty} L_l t^l, \quad (17)$$

где $\mu \geq 0$, а $L_0 \neq 0$. Для таких источников оказывается целесообразно ввести новые искомые функции (μ и λ - параметры)

$$J_d(t, \tau) = y^\mu J(t, \tau), \quad \mathcal{H}_d(t, \tau) = y^\mu H(t, \tau), \quad y = t - \tau.$$

Вновь введенные функции определяются уравнениями

$$J + H' + \frac{\mu}{y}(J - H) + (1-\lambda)J = \frac{1}{2} e^{-\tau} L(y), \quad \dot{H} + J' + \frac{\mu}{y}(H - J) + H = 0. \quad (18)$$

Граничные условия для них получаются из (11):

$$J(\tau, \tau) = H(\tau, \tau) = \mathcal{A}(\tau) L_0. \quad (19)$$

Поведение интегральных составляющих вблизи границы $t = \tau$ для степенных источников определяется формулами ($y \ll 1$)

$$\begin{aligned} J_i(\tau + y, \tau) &\sim \frac{y}{4} \left[\frac{L_0 G_{JJ}(\tau, \tau)}{\mu + 1} + \frac{y}{\mu + 2} \left(G_{JJ}(\tau, \tau) L_1 + \frac{L_0 G_{JJ}^{(1)}(\tau)}{\mu + 1} \right) \right], \\ H_i(\tau + y, \tau) &\sim \frac{y}{4} \left[\frac{L_0 G_{HH}(\tau, \tau)}{\mu + 1} + \frac{y}{\mu + 2} \left(G_{HH}(\tau, \tau) L_1 + \frac{L_0 G_{HH}^{(1)}(\tau)}{\mu + 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь значения функций Грина на границе приведены в (8), а

$$G_{JJ}^{(l)}(\tau) = -\frac{1}{4}e^{-\nu/2} \left(1 - \frac{\tau^2}{16}\right), \quad G_{HJ}^{(l)}(\tau) = -\frac{\tau}{8}e^{-\nu/2} \left(1 - \frac{\tau}{16}\right).$$

8. *Разложения при малых t и τ .* Отличительной особенностью задачи является то обстоятельство, что область изменения ее переменных имеет вид бесконечного треугольника, границы которого на плоскости (t, τ) - это исходящие из начала координат лучи $\tau = 0$ и $\tau = t$ при $t \geq 0$. Вблизи вершины этого треугольника весьма трудно произвести дискретизацию переменных, так что применять любой численный метод с самого начала действия источника, когда $t=0$, не представляется возможным (либо сильно затруднено). Поэтому имеет смысл несколько отойти от вершинной точки до какого-нибудь значения времени. Около этой точки переменные принимают малые значения и, если функция $L(t)$ имеет несколько производных при $t=0$, то все функции, включая искомые, раскладываются в окрестности указанной вершины по формуле Тейлора. Если функция $L(t)$ аналитическая, то возможны разложения в степенные ряды. Заметим, что по аргументу τ наши функции не аналитичны, так как зависят от $|\tau|$. Поэтому степенные разложения, которые мы будем получать для $\tau \geq 0$, нельзя распространять на отрицательные значения τ .

Нетрудно заметить, что при степенном источнике, мощность которого определяется формулами (17), в силу линейности уравнений можно разделить составляющие поля излучения, относящиеся к различным степеням разложения функции L и пропорциональные коэффициентам L_l , т.е. разложения средней интенсивности и потока записать в виде

$$J(t, \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} y^l L_l J_l(\tau, y), \quad H(t, \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} y^l L_l H_l(\tau, y), \quad (20)$$

где $y = t - \tau$.

Подставив формулы (20) в уравнения (18), найдем уравнения для функций, являющихся коэффициентами разложений:

$$J_l + H_l + \frac{\mu + l}{y}(J_l - H_l) + (1 - \lambda)J_l = \frac{\lambda}{2}e^{-\tau}, \quad \dot{H}_l + J_l + \frac{\mu + l}{y}(H_l - J_l) + H_l = 0. \quad (21)$$

Перейдем к переменным τ и y , от которых зависят введенные функции. Тогда новые уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_l}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(J_l - H_l) + \frac{\mu + l}{y}(J_l - H_l) + (1 - \lambda)J_l &= \frac{\lambda}{2}e^{-\tau}, \\ \frac{\partial J_l}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y}(J_l - H_l) - \frac{\mu + l}{y}(J_l - H_l) + H_l &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Сложение уравнений приводит к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(J_l + H_l) + (1 - \lambda)J_l + H_l = \frac{\lambda}{2}e^{-\tau}. \quad (23)$$

Из уравнений (22) при $y \rightarrow 0$ следует, что $J_l(\tau, 0) = H_l(\tau, 0)$, а в разложениях (20) при этом остаются только нулевые слагаемые $J_0(\tau, 0) = H_0(\tau, 0)$. Переход к такому же пределу в соотношении (23) с учетом этого равенства дает линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dJ_0(\tau, 0)}{d\tau} + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)J_0(\tau, 0) = \frac{\lambda}{4}e^{-\tau}, \quad (24)$$

которое легко интегрируется. Решение уравнения (24) дает зависящую от τ функцию во внеинтегральном слагаемом (15) в соответствии с граничным условием (19): $J_0(\tau, 0) = \mathcal{A}(\tau)$.

Из уравнений (21) или (22) видно, что показатель μ и номер l входят в них только в сумме. Поэтому целесообразно обозначить $\mu + l + 1 = z$ и считать эту сумму неявным аргументом функций $J_l(\tau, y)$ и $H_l(\tau, y)$. В связи с этим представим разложения этих функций при малых значениях времени и координаты в виде

$$J_l(\tau, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m J_{m,j}(\tau, \lambda) \tau^{m-j} y^j, \quad H_l(\tau, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m H_{m,j}(\tau, \lambda) \tau^{m-j} y^j, \quad (25)$$

где параметры λ и z указаны в качестве аргументов коэффициентов с двумя индексами. В дальнейшем эти аргументы будем часто опускать.

Совпадение функций при $y = 0$ требует, чтобы было $J_{m,0}(\tau, \lambda) = H_{m,0}(\tau, \lambda)$. Равенство нулю потока при $\tau = 0$ приводит к тому, что

$$H_l(0, y) = \sum_{m=0}^{\infty} H_{m,m}(\tau, \lambda) y^m = 0,$$

так что $H_{m,m}(\tau, \lambda) = 0$ при всех m .

Подставив разложения (25) в уравнения (22), получим пару рекуррентных соотношений (аргументы z и λ опускаем):

$$\begin{aligned} (m+1-j)H_{m+1,j} + (z+j)(J_{m+1,j+1} - H_{m+1,j+1}) + (1-\lambda)J_{m,j} &= \frac{\lambda}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \delta_{j,0}, \\ (m+1-j)J_{m+1,j} - (z+j)(J_{m+1,j+1} - H_{m+1,j+1}) + H_{m,j} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Сложение двух равенств дает более простое соотношение, являющееся следствием (24)

$$(m+1-j)(J_{m+1,j} + H_{m+1,j}) + (1-\lambda)J_{m,j} + H_{m,j} = \frac{\lambda}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \delta_{j,0}.$$

При $j=0$ получается

$$(m+1)J_{m+1,0} + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)J_{m,0} = \frac{\lambda}{2} \frac{(-1)^m}{m!}, \quad (27)$$

откуда находим

$$J_{m,0} = H_{m,0} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{m!} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^m - 1 \right],$$

что представляет собой коэффициент разложения функции $\mathcal{A}(\tau)$.

Подстановка в соотношения (26) $m = 0, j = 0$ дает

$$H_{1,0} + z(J_{1,1} - H_{1,1}) + (1 - \lambda)J_{0,0} = \frac{\lambda}{2},$$

$$J_{1,0} - z(J_{1,1} - H_{1,1}) + H_{0,0} = 0.$$

С учетом того, что $J_{0,0} = H_{0,0} = 0, J_{1,0} = H_{1,0} = \lambda/4, H_{1,1} = 0$, это приводит к значению еще одного коэффициента: $J_{1,1} = \lambda/4 z$.

Вообще при определенном значении m появляется $2(m+2)$ новых коэффициента $J_{m+1,j}$ и $H_{m+1,j}$ где $j=0, 1, \dots, m+1$, но только $2(m+1)$ уравнений. Однако значения $J_{m+1,0} = H_{m+1,0}$ известны, а $H_{m+1,m+1} = 0$, так что одно уравнение оказывается даже излишним. Это уравнение - сумма первой пары уравнений (при $j=0$), т.е. (27), оно было решено при всех m . Процедура решения уравнений при всех m одинакова. Сначала находим разности коэффициентов с одним значением j , а затем их суммы, переходя от меньших j к большим. При этом величина z входит как параметр.

9. Разложения точных решений. Метод получения рекуррентных соотношений для коэффициентов разложений может быть применен к более сложным и общим уравнениям, в том числе с переменными коэффициентами при производных. Его применение предполагается осуществить при расчете полей излучения в расширяющемся космическом пространстве. В рассматриваемом случае возможно получение разложений функций, исходя из их точных формул.

Разлагая последовательно функции Бесселя и экспоненты, входящие в подынтегральные выражения в формулах (10), затем интегрируя по i' и выражая все слагаемые в виде функций τ и u , находим для средней интенсивности коэффициенты разложения при $m \geq 1$ и $1 \leq j \leq m$

$$J_{m,j}(z, \lambda) = \frac{\lambda}{4} \mathcal{B}_j(z) \sum_{k=0}^{[(m-j)/2]} \bar{J}_{m-1,k}(\lambda) \frac{(m-2k-1)!}{(m-2k-j)!}, \quad (28)$$

где квадратные скобки в верхнем пределе суммы означают взятие целой части, а

$$\mathcal{B}_j(z) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(-1)^i}{i!(j-i-1)!(z+i)}, \quad z = \mu + l + 1.$$

Коэффициент, стоящий под знаком суммы и зависящий от λ ,

определяется формулой

$$\bar{J}_{m,k}(\lambda) = \frac{(-1)^{k+m}}{k!} \sum_{n=k}^{[m/2]} \frac{\lambda^{2n} \lambda_1^{m-2n}}{2^{4n} n! (n-k)! (m-2n)!} \left(1 - \frac{\lambda}{4\lambda_1} \frac{m-2n}{n+1} \right), \quad (29)$$

где $\lambda_1 = 1 - \lambda/2$.

Коэффициенты в разложении потока получаются аналогичными ($m \geq 1, 1 \leq j \leq m$):

$$\begin{aligned} H_{m+1}(z, \lambda) &= \frac{\lambda^2}{16} \mathcal{B}_1(z) \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \bar{H}_{m-1,k}(\lambda) \frac{(m-2k-1)!}{(m-2k-j)!}, \\ \bar{H}_{m,k}(\lambda) &= \frac{(-1)^{k+m}}{k!} \sum_{n=k}^{[m/2]} \frac{\lambda^{2n} \lambda_1^{m-2n}}{2^{4n} (n+1)! (n-k)! (m-2n)!}. \end{aligned} \quad (30)$$

Коэффициенты, найденные по точным формулам и из рекуррентных соотношений (26), совпадают.

10. Колоколообразные источники. Рассмотрим для примера конкретную зависимость мощности источников от времени, а именно источники, действующие конечное время t_s , поставляющие полную энергию, равную 1, и плавно выключающиеся. Для таких источников можно взять временные профили в виде

$$L(t) = c_\mu \frac{t_s^{1-\mu}}{t^2} \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{t_s} \right) \right] = 2c_\mu \frac{t_s^{1-\mu}}{t^2} \sin^2 \left(\pi \frac{t}{t_s} \right), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad \mu \geq 0, \quad (31)$$

где c_μ - нормирующий коэффициент.

Ввиду конечности времени действия источника в интегралах (10), нужно верхний предел считать равным $\min(t - |\tau|, t_s)$. Все остальные формулы справедливы без изменения. В частности, разложения для колоколообразного источника получаются, если принять во внимание разложение функции (31), у которого отличны от нуля только четные коэффициенты:

$$L_{2l} = 2f_\mu \frac{(-1)^l}{(2l+2)!} \left(\frac{2\pi}{t_s} \right)^{2l}, \quad L_{2l+1} = 0, \quad L_0 = L(0) = f_\mu = 2\pi^2 \frac{c_\mu}{t_s^{1+\mu}}.$$

Моменты мощности представляются рядами

Таблица 1

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИК ПРИ $t = 20$

τ	$J(t, \tau)$	$J_{as}(t, \tau)$	$\mathcal{H}(t, \tau)$	$H_{as}(t, \tau)$
0	0.062695	0.062687	0.0000000	0.0000000
5	0.046926	0.046928	0.0058817	0.0058821
10	0.018610	0.018589	0.0049194	0.0049089
14	0.048386	0.048526	0.0019490	0.0019418
18	0.004726	0.005010	0.0002925	0.0003137

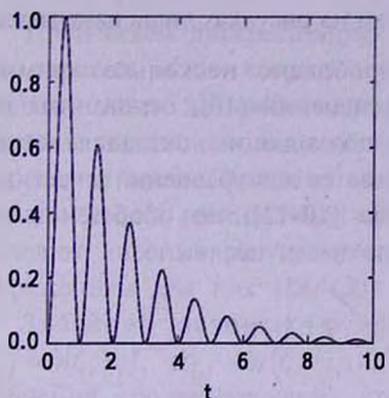


Рис.1. Внеинтегральное слагаемое в формуле (9) в зависимости от t при $t_2=1, \mu=2, \lambda=1$ и $\tau=0$ (1) 9.

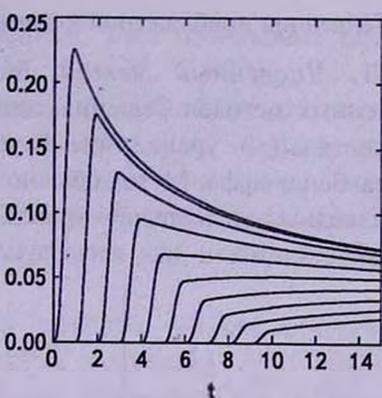


Рис.2. Интегральное слагаемое $J_1(t, \tau)$ в формуле (10) в зависимости от t при $t_2=1, \mu=2, \lambda=1$ и $\tau=0$ (1) 9.

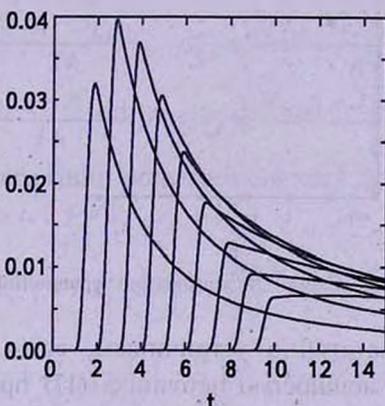


Рис.3. Интегральное слагаемое $H_1(t, \tau)$ в формуле (10) в зависимости от t при $t_2=1, \mu=2, \lambda=1$ и $\tau=0$ (1) 9.

$$L_n = 4\pi^2 c_\mu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (2\pi)^{2l}}{(2l+2)! 2l+1+\mu+n}.$$

Нормировочный коэффициент определяется условием $L_0 = 1$. В частности, $c_0 = 0.11223, c_1 = 0.41023, c_2 = 1, c_3 = 2$.

В табл.1 приведены для сравнения асимптотические (формулы(12)) и численно точные значения этих величин при $t=20$ и ряда значений τ . Естественно, что с ростом τ точность ухудшается.

На рис.1-3 приведены отдельно графики внеинтегральной части средней интенсивности и потока при $\tau \geq 0$ и входящих в выражения этих величин интегралов при $\lambda=1, \mu=2$ и $t_2=1$ в зависимости от времени для нескольких значений τ . Кривые соответствуют тем значениям τ , с которых они начинаются на оси абсцисс.

Тенденция приближения к асимптотикам на рисунках лишь намечается.

11. *Численный метод.* Было опробовано несколько прямых численных методов решения системы уравнений (16), основанных на дискретизации уравнений. Наиболее подходящим оказался метод Лэкса-Вендроффа. Метод обычно описывается для уравнений в частных производных с нулевой правой частью [10-13], но обобщение на случай системы и на ненулевую правую часть несложно.

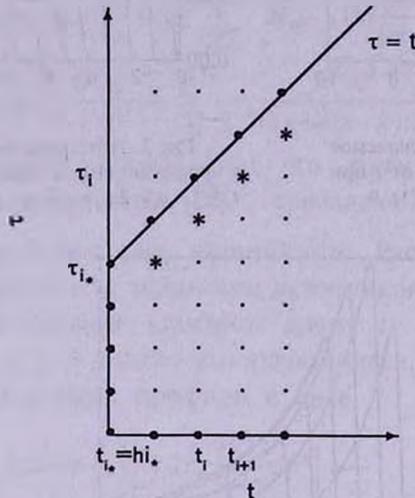


Рис.4. Схема дискретизации уравнений.

Метод оказался достаточно устойчивым, если его применять к уравнениям вида (16) с мощностью источника (17) при целых значениях параметра μ . Продемонстрируем действие численного метода для случая чистого рассеяния $\lambda = 1$. Опустим для краткости индекс d . Уравнения примут вид

$$\dot{j} + \mathcal{H}' = \frac{1}{2} e^{-\tau} \mathcal{L}(y), \quad \dot{\mathcal{H}} + \mathcal{J}' + \mathcal{H} = 0. \quad (32)$$

Если искомые функции уже найдены при некотором значении времени t для ряда значений координаты τ , то согласно выбранному методу значения для следующих значений времени и тех же значений координаты находятся с помощью разложения по формуле Тейлора второго порядка:

$$\begin{aligned} j(t + \Delta t, \tau) &= j(t, \tau) + \dot{j}(t, \tau) \Delta t + \ddot{j}(t, \tau) \frac{(\Delta t)^2}{2}, \\ \mathcal{H}(t + \Delta t, \tau) &= \mathcal{H}(t, \tau) + \dot{\mathcal{H}}(t, \tau) \Delta t + \ddot{\mathcal{H}}(t, \tau) \frac{(\Delta t)^2}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Производные по времени выражаются через производные по координате с помощью уравнений (32).

Произведем дискретизацию переменных, взяв одинаковые шаги h по времени и по координате: $t_i = hi$, $\tau_j = hj$, $i = 0(1)i_0$, $j = 0(1)i$. Область точек дискретизации схематически изображена на рис.4. В качестве начального момента времени возьмем $t_* = t_{i_*} = i_*h$, номер i_* определим ниже. Значения искоемых функций в этот момент рассчитываем по их разложениям (20) и (25). Коэффициенты разложений находим либо из рекуррентных соотношений (26), либо по точным выражениям для них (28)-(30).

Значения искоемых функций в узловых точках обозначим $J_{i,j} = \mathcal{J}(t_i, \tau_j)$, $\mathcal{H}_{i,j} = \mathcal{H}(t_i, \tau_j)$, а мощности источника $\mathcal{L}_{i-j} = \mathcal{L}(h(i-j))$. Значения соответствующих производных отмечаем, как и раньше, точкой и штрихом. Штрихом же отмечается производная по аргументу функции $\mathcal{L}(r)$. Численные значения производных по координате вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} J'_{i,j} &\approx \frac{J_{i,j+1} - J_{i,j-1}}{2h}, & J''_{i,j} &\approx \frac{J_{i,j+1} - 2J_{i,j} + J_{i,j-1}}{h^2}, \\ \mathcal{H}'_{i,j} &\approx \frac{\mathcal{H}_{i,j+1} - \mathcal{H}_{i,j-1}}{2h}, & \mathcal{H}''_{i,j} &\approx \frac{\mathcal{H}_{i,j+1} - 2\mathcal{H}_{i,j} + \mathcal{H}_{i,j-1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

В результате дискретизации получаем систему дискретных рекуррентных уравнений при $i > i_*$, $j = 1, \dots, i-1$

$$\begin{aligned} J_{i+1,j} &= \frac{h}{4} e^{-jh} [2\mathcal{L}_{i-j} + h\mathcal{L}'_{i-j}] - \left(1 - \frac{h}{2}\right) \frac{\mathcal{H}_{i,j+1} - \mathcal{H}_{i,j-1}}{2} + \frac{J_{i,j+1} + J_{i,j-1}}{2}, \quad (35) \\ \mathcal{H}_{i+1,j} &= \frac{h^2}{4} e^{-jh} [\mathcal{L}_{i-j} + \mathcal{L}'_{i-j}] - h \left(1 - \frac{h}{2}\right) \mathcal{H}_{i,j} + \frac{\mathcal{H}_{i,j+1} + \mathcal{H}_{i,j-1}}{2} - \frac{J_{i,j+1} - J_{i,j-1}}{2}. \end{aligned}$$

Из граничных условий (19) следует, что

$$J_{i,i} = \mathcal{H}_{i,i} = \frac{f_{\mu}}{2} (i-j)^{\mu} (e^{-hi/2} - e^{-hi}) \quad (36)$$

при всех i . Значения искоемых функций под границей $t = \tau$, в точках при $j = i$, отмеченных на рис.4 звездочками, получались интерполяцией по формуле Ньютона с тремя точками $j = i+1, i-1, i-2$:

$$J_{i+1,i} = J_{i+1,i-1} + \frac{J_{i+1,i+1} - J_{i+1,i-2}}{3}, \quad \mathcal{H}_{i+1,i} = \mathcal{H}_{i+1,i-1} + \frac{\mathcal{H}_{i+1,i+1} - \mathcal{H}_{i+1,i-2}}{3}. \quad (37)$$

Поток в источнике равен нулю, а значение функции \mathcal{J} при $\tau = 0$ находилось экстраполяцией. Таким образом, при всех i

$$\mathcal{H}_{i,0} = \mathcal{H}_{i+1,0} = 0, \quad J_{i,0} = 3(J_{i,1} - J_{i,2}) + J_{i,3}. \quad (38)$$

Применялся следующий порядок вычислений. Сначала для выбранного шага h вычислялись значения искоемых функций по их разложениям для $i = i_*$. Затем последовательно осуществлялся переход ко все большим значениям i : при $j = 1, \dots, i-1$ от i к $i+1$ - по

формулам (35), при $j = i+1$ - по (36), а при $j=0$ и $j=i$ - по уже вычисленным значениям согласно (38) и (37).

В ходе расчетов при увеличении номера i приходилось увеличивать шаг, принимая за исходные вычисленные значения для последнего из достигнутых i . Первыми принимались значения $h = 1/2^m$, $t_* = 1/8$ ($i_* = 2^{m-3}$), причем, $m = 8+10$ выбиралось в зависимости от t_* . При $t = 5$, а затем при $t = 12$ шаг удваивался. Расчет производился до такого значения номера $i = i_0$, при котором искомые функции выходили на свои асимптотики с той же точностью, что и точные значения.

Сравнение найденных численно значений функций $J(t_i, \tau_j)$ и $H(t_i, \tau_j)$ с вычисленными по точным формулам показало, что при $m = 8$ и $t_* = 1$ максимальная относительная ошибка составляет 10^{-3} , при $t_* = 2 \cdot 10^{-4}$. Ошибка возрастает при уменьшении параметра t_* , так как функция (31) становится уже и выше (ближе к δ -функции). Для достижения приемлемой точности требуется уменьшение шага дискретизации.

Близкая численная схема, основанная на методе прогноз-коррекция, разработана Мак-Кормаком и описана в [14]. Она также может применяться при решении рассматриваемых уравнений.

12. *Заключение.* Таким образом, полученные точные решения уравнений позволили выбрать метод, пригодный для их численного решения, и оценить необходимые его параметры для достижения определенной точности. Как уже говорилось, метод предполагается применить для расчета эволюции свечения и поляризации источников во Вселенной в эпохи, близкие к эпохе рекомбинации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-8542.2006.2.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Астрономический институт им. В.В.Соболева,
Россия, dinagimer@gmail.com skirusheva@mail.ru

TIME-DEPENDENT MONOCHROMATIC SCATTERING OF RADIATION IN ONE-DIMENSIONAL MEDIUM: ANALITICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS

D.I.NAGIRNER, S.L.KIRUSHEVA

The exact explicit solution is obtained of the problem of time-dependent radiation field in the one-dimensional infinite medium with mono-

chromatic isotropic scattering, arbitrary distribution of sources and arbitrary dependence of their power with time. The aim of this solution is to choose a method for numerical solving of non-stationary radiation transfer problems. The Lax-Wendroff method seems to be the most suitable. Because of assumption that radiation delay is due to finite speed of light the following difficulty arises when numerical method is applied: the region of variation of variables (coordinate τ and time t) has triangle form (inequality $\tau \leq t$). The difficulty is overcome by expansion of searched functions in series when the values of time and coordinate are small. The comparison of numerical and exact solutions obtained for the point source with definite dependence of its power of time and conservative scattering permitted to estimate the values of steps in variables for achieving desirable accuracy. The numerical method is supposed to be applied for calculating the intensity and polarization of radiation of sources in the early Universe at the epochs close to epoch of recombination.

Key words: *radiation scattering: time dependent*

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В.Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. ГИТТЛ, 1956, с.392.
2. В.В.Соболев, Астрон. ж., 29. I. №4, 406, 1952; II. №5, 517, 1952.
3. И.Н.Минин, Вестник Ленинградского университета, №13, 138, 1959.
4. И.Н.Минин, Вестник Ленинградского университета, №19, 124, 1962.
5. Н.Б.Енгибарян, Астрофизика, 1, 167, 1965.
6. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 1, 285, 1965.
7. Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков, Строение и эволюция Вселенной., Наука, М., 1975, с.736.
8. J.A.Peacock, Cosmological Physics. Cambridge University Press, 1999, p.682.
9. Г.Бейтмен, А.Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, том I, Преобразования Фурье, Лапласа и Меллина, Наука, М., 1969.
10. W.F.Ames, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Press, New York, 1992.
11. L.Lapidus, G.F.Pinder, Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering, John Wiley & Sons, New York, 1982.
12. M.Pinsky, Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications, Springer Verlag, New York, 1991.
13. G.D.Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, third edition, Oxford University Press, New York, 1985.
14. П.Роч, Вычислительная гидродинамика, М., Мир, 1980, с.616.