ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 №3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. Т. Япуджян

Об одной динамической задаче плоской деформации ортотропного тела

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 21/VI 2021)

Ключевые слова: *плоская деформация, вынужденные колебания, смешанная задача, амплитуда колебаний, резонанс.*

Введение. Для решения плоских и пространственных задач теории упругости для стержней, балок, пластин и оболочек эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. В [1] построена асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. Установлена новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, позволившая решить новые классы статических и динамических задач для тонких тел, в частности, когда на лицевых поверхностях тонкого тела заданы отличные от классических (заданы соответствующие компоненты тензора напряжений) краевые условия: перемещения, смешанные условия [2]. Асимптотическое решение статической трехмерной задачи для ортотропной пластинки, свободно лежащей на абсолютно жесткой подстилке, получено в [3]. Та же задача для двухслойной анизотропной пластинки по нелинейной теории упругости рассмотрена в [4].

В настоящей работе рассматривается динамическая смешанная задача плоской деформации для полосы конечных размеров, лежащей на жесткой подстилке.

Постановка задач и вывод основных уравнений. Рассматриваются вынужденные колебания ортотропной полосы

$$D=\{(x,y):0\le \mathrm{x}\le l,-\mathrm{h}\le \mathrm{y}\le \mathrm{h},\mathrm{h}<<l\},$$

находящейся в условиях плоской деформации (рис. 1).

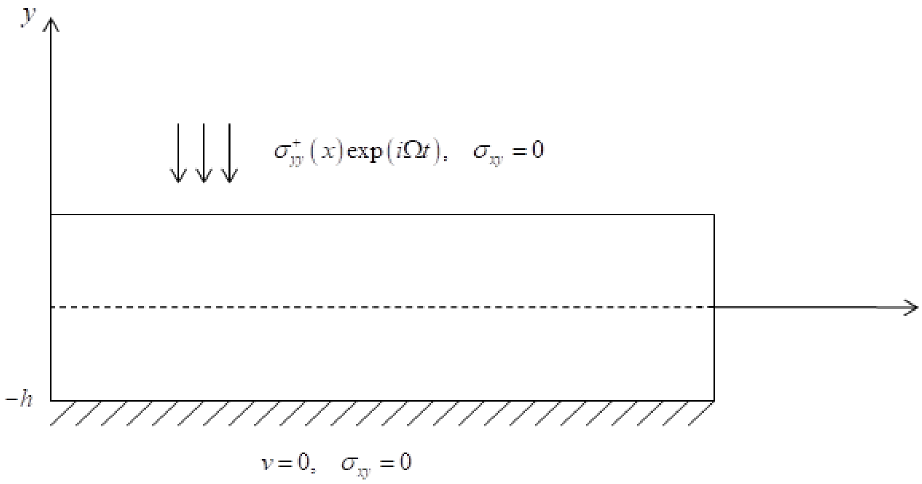

Рис. 1.

Считается, что полоса свободно лежит на жесткой подстилке, на верхнюю кромку полосы действует нормальная нагрузка, гармонично меняющаяся во времени. Требуется найти решение уравнений движения плоской деформации ортотропного тела

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\qquad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1}$$

при соотношениях упругости [5, 6]

$$\varepsilon_{xx}=\beta_{11}\sigma_{xx}+\beta_{12}\sigma_{yy}\quad \varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x};\qquad \varepsilon_{yy}=\beta_{12}\sigma_{xx}+\beta_{22}\sigma_{yy}\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y};\qquad \varepsilon_{xy}=a_{66}\sigma_{xy}\quad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

где

$$\beta_{11}=\left(a_{11}a_{33}-a_{13}^2\right)/a_{33};\quad \beta_{12}=\left(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{23}\right)/a_{33};\quad \beta_{22}=\left(a_{22}a_{33}-a_{23}^2\right)/a_{33};\quad \beta_{66}=a_{66}, \tag{3}$$

a_{ik} – постоянные упругости,

и при граничных условиях

$$\sigma_{yy}(y=h)=-\sigma_{yy}^{+}(x)\exp(i\Omega t);\quad \sigma_{xy}(y=h)=0;\qquad v(y=-h)=0;\quad \sigma_{xy}(y=-h)=0. \tag{4}$$

Граничные условия при $x = 0, l$ не конкретизируем, ими обусловлено появление пограничного слоя, которое можно рассматривать отдельно [1].

Асимптотическое решение задачи. Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}(x,y,t) = \sigma_{11}(x,y)\exp(i\Omega t); \quad (x,y:1,2);\\
&\sigma_{xy}(x,y,t) = \sigma_{12}(x,y)\exp(i\Omega t);\\
&u(x,y,t) = u_x(x,y)\exp(i\Omega t); \quad v(x,y,t) = u_y(x,y)\exp(i\Omega t).
\end{aligned} \tag{5}$$

Подставив (5) в уравнения (1) и (2) и перейдя к безразмерным координатам и перемещениям

$$x = l\xi; \quad y = h\zeta; \quad U = \frac{u_x}{l}; \quad V = \frac{u_y}{l}, \tag{6}$$

получим систему

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\Omega_*^2 U = 0 \quad \Omega_*^2 = \rho h^2\Omega^2 \quad \varepsilon = \frac{h}{l};$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\Omega_*^2 V = 0;\\
&\frac{\partial U}{\partial\xi} = \beta_{11}\sigma_{11} + \beta_{12}\sigma_{22}; \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta} = \beta_{12}\sigma_{11} + \beta_{22}\sigma_{22};\\
&\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta} + \frac{\partial V}{\partial\xi} = \beta_{66}\sigma_{12}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Решение сингулярно возмущенной системы (7) складывается из решений внешней задачи $\left(I^{out}\right)$ и пограничного слоя $\left(I^{b}\right)$:

$$I = I^{out} + I_b. \tag{8}$$

Решение внешней задачи будем искать в виде

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i+s} I^{(s)} \quad s = \overline{0,N}, \tag{9}$$

где $q_i = -1$ для $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$, $q_i = 0$ для U, V, $s = \overline{0,N}$ означает, что в (9) по немому (повторяющемуся) индексу *s* происходит суммирование по целочисленным значениям *s* от нуля до числа приближений *N*. Подставив (9) в систему (7) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты, при ε получим

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2U^{(s)}=0;\quad \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2V^{(s)}=0;$$
$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}=\beta_{11}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{12}\sigma_{22}^{(s)};\quad \frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=\beta_{12}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{22}\sigma_{22}^{(s)};\tag{10}$$
$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}=\beta_{66}\sigma_{12}^{(s)}.$$

Из системы (10) напряжения можно выразить через перемещения $U^{(s)}$ и $V^{(s)}$:

$$\sigma_{11}^{(s)}=-\frac{1}{\beta}\left(\beta_{12}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}-\beta_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)\quad \beta=\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2;$$
$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{\beta_{66}}\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right);\tag{11}$$
$$\sigma_{22}^{(s)}=\frac{1}{\beta}\left(\beta_{11}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}-\beta_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right).$$

Подставив значения $\sigma_{12}^{(s)},\sigma_{22}^{(s)}$ в первые два уравнения (10), для определения $U^{(s)},V^{(s)}$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\beta_{66}\Omega_*^2U^{(s)}=F_u^{(s-1)}\quad F_u^{(s-1)}=-\frac{\partial^2V^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-\beta_{66}\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi};$$
$$\frac{\partial^2V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\beta}{\beta_{11}}\Omega_*^2V^{(s)}=F_v^{(s-1)}\quad F_v^{(s-1)}=\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\frac{\partial^2U^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-\frac{\beta}{\beta_{11}}\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}.\tag{12}$$

Решениями уравнений (12) являются

$$U^{(s)}=B_1^{(s)}\cos\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\zeta+B_2^{(s)}\sin\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\zeta+U_ч^{(s)};$$
$$V^{(s)}=B_3^{(s)}\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\zeta+B_4^{(s)}\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\zeta+V_ч^{(s)},\tag{13}$$

где $U_ч^{(s)},V_ч^{(s)}$ – частные решения уравнений (12).

Подставив (13) в (11), для определения напряжений получим формулы

$$\sigma_{11}^{(s)}=-\frac{1}{\beta}\left(-B_3^{(s)}\Omega_*\beta_{12}\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\zeta+B_4^{(s)}\Omega_*\beta_{12}\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\zeta+\beta_{12}\frac{\partial V_ч^{(s)}}{\partial\zeta}-\beta_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right);$$
$$\sigma_{22}^{(s)}=\frac{1}{\beta_{66}}\left(-B_1^{(s)}\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\sin\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\zeta+B_2^{(s)}\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\cos\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\zeta+\frac{\partial U_ч^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right); \quad (14)$$
$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{\beta}\left(-B_3^{(s)}\Omega_*\sqrt{\beta_{11}\beta}\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\zeta+B_4^{(s)}\Omega_*\sqrt{\beta_{11}\beta}\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\zeta+\beta_{11}\frac{\partial V_ч^{(s)}}{\partial\zeta}-\beta_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right).$$

Удовлетворив граничным условиям (4), которые приобретают вид

$$\sigma_{22}^{(s)}(\xi,1)=-\sigma_{yy}^{+(s)}\quad \sigma_{yy}^{+(0)}=\varepsilon\sigma_{yy}^{+}\quad \sigma_{yy}^{+(s)}=0,\ s\neq 0;\quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi,1)=0;$$
$$V^{(s)}(\xi,-1)=0;\quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi,-1)=0, \quad (15)$$

определим неизвестные $B_i^{(s)}$:

$$B_1^{(s)}=\frac{1}{2\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\sin\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}}\left(a^{(s)}-b^{(s)}\right);$$
$$B_2^{(s)}=-\frac{1}{2\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\cos\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}}\left(a^{(s)}+b^{(s)}\right);$$

$$a^{(s)}=\left(\frac{\partial U_ч^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=1}\qquad b^{(s)}=\left(\frac{\partial U_ч^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=-1},$$

$$B_3^{(s)}=-\frac{1}{\cos 2\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}}\left[\frac{\beta\sigma_{yy}^{+(s)}+c^{(s)}}{\Omega_*\sqrt{\beta_{11}\beta}}\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}+d^{(s)}\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\right]; \quad (16)$$

$$B_4^{(s)}=-\frac{1}{\cos 2\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}}\left[\frac{\beta\sigma_{yy}^{+(s)}+c^{(s)}}{\Omega_*\sqrt{\beta_{11}\beta}}\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}+d^{(s)}\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\right];$$

$$c^{(s)}=\left(\beta_{11}\frac{\partial V_ч^{(s)}}{\partial\zeta}-\beta_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=1}\qquad d^{(s)}=\left(V_ч^{(s)}\right)_{\zeta=-1}.$$

Подставив значения $B_i^{(s)}$ в формулы (13) и (14), для вычисления напряжений и перемещений получим

$$U^{(s)}=\frac{\cos\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\left(1+\zeta\right)a^{(s)}-\cos\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\left(1-\zeta\right)b^{(s)}}{\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\sin 2\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}}+U_{ч}^{(s)};$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=-\frac{1}{\beta_{66}\sin 2\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}}\left[\sin\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\left(1+\zeta\right)a^{(s)}+\sin\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\left(1-\zeta\right)b^{(s)}\right]+\frac{1}{\beta_{66}}M_{12}^{(s)};$$

$$V^{(s)}=-\frac{1}{\Omega_*\sqrt{\beta_{11}\beta}\cos 2\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}}\left[\left(\beta\sigma_{yy}^{+(s)}+c^{(s)}\right)\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)+\Omega_*\sqrt{\beta_{11}\beta}d^{(s)}\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1-\zeta\right)\right]+V_{ч}^{(s)}; \quad (17)$$

$$\sigma_{11}^{(s)}=\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}\beta\cos 2\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}}\left[\left(\beta\sigma_{yy}^{+(s)}+c^{(s)}\right)\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)+\Omega_*\sqrt{\beta_{11}\beta}d^{(s)}\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1-\zeta\right)\right]-\frac{1}{\beta}M_{11}^{(s)};$$

$$\sigma_{22}^{(s)}=-\frac{1}{\beta\cos 2\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}}\left[\Omega_*\sqrt{\beta_{11}\beta}d^{(s)}\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1-\zeta\right)+\left(\beta\sigma_{yy}^{+(s)}+c^{(s)}\right)\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)\right]+\frac{1}{\beta}M_{22}^{(s)};$$

$$M_{12}^{(s)}=\frac{\partial U_{ч}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi};\quad M_{11}^{(s)}=\beta_{12}\frac{\partial V_{ч}^{(s)}}{\partial\zeta}-\beta_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi};\quad M_{22}^{(s)}=\beta_{11}\frac{\partial V_{ч}^{(s)}}{\partial\zeta}-\beta_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}.$$

Решение, соответствующее $U^{(s)},\sigma_{12}^{(s)}$, описывает сдвиговые колебания. Решение же, соответствующее $V^{(s)},\sigma_{11}^{(s)},\sigma_{22}^{(s)}$, описывает продольные колебания (растяжение, сжатие).

Найденные решения будут конечными, если $\sin 2\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\neq 0$, $\cos 2\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\neq 0$. В противном случае будет возникать резонанс.

Резонансными частотами будут

$$\Omega=\frac{1}{2h\sqrt{\rho\beta_{66}}}\pi n;\quad \Omega=\frac{1}{4h}\sqrt{\frac{\beta_{11}}{\rho\beta}}\pi\left(2n+1\right);\quad n\in Z. \quad (18)$$

Математически точные решения во внешней задаче. Если функция $\sigma_{yy}^{+}(x)$ является алгебраическим многочленом, итерационный процесс обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена, в результате получается математически точное решение внешней задачи. Для иллюстрации сказанного пусть $\sigma_{yy}^{+}=a_0+a_1\xi$. Используя формулы (17), имеем:

при $s=0$

$$U^{(0)}=0;\quad \sigma_{12}^{(0)}=0;$$

$$V^{(0)}=-\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\frac{\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)}{\Omega_*\cos 2\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}}\sigma_{yy}^{+(0)}; \quad (19)$$

$$\sigma_{11}^{(0)}=\frac{\beta_{12}\cos\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)}{\beta_{11}\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\sigma_{yy}^{+(0)}\quad \sigma_{yy}^{+(0)}=\varepsilon\sigma_{yy}^{+}\quad \sigma_{yy}^{+(s)}\equiv 0,\, \mathrm{s}\neq 0;$$

$$\sigma_{22}^{(0)}=-\frac{\cos\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)}{\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\sigma_{yy}^{+(0)},$$

при $s=1$

$$U^{(1)}=\frac{\varepsilon a_1\left(\beta-\beta_{12}\beta_{66}\right)}{\Omega_*^2\left(\beta-\beta_{11}\beta_{66}\right)\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\left[\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}\beta_{66}}}\frac{\cos\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\left(1+\zeta\right)\sin 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}{\sin 2\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}}-\frac{\cos\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)}{\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\right];\tag{20}$$

$$V^{(1)}=0;$$

$$\sigma_{11}^{(1)}=0;$$

$$\sigma_{12}^{(1)}=\frac{\varepsilon a_1}{\Omega_*\beta_{66}}\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\left(\frac{\beta-\beta_{12}\beta_{66}}{\beta_{11}\beta_{66}-\beta}+1\right)\frac{1}{\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\left[\frac{\sin\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\left(1+\zeta\right)\sin 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}{\sin 2\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}}-\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)\right];$$

$$\sigma_{22}^{(1)}=0,$$

при $s=2$

$$U^{(2)}=V^{(2)}=0;\quad \sigma_{11}^{(2)}=\sigma_{12}^{(2)}=\sigma_{22}^{(2)}=0.\tag{21}$$

Следовательно, имеем математически точное решение:

$$\sigma_{11}=\varepsilon^{-1}\sigma_{11}^{(0)}+\sigma_{11}^{(1)}=\frac{\beta_{12}\cos\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)}{\beta_{11}\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\left(a_0+a_1\xi\right);$$

$$\sigma_{12}=\varepsilon^{-1}\sigma_{12}^{(0)}+\sigma_{12}^{(1)}=\sigma_{12}^{(1)};$$

$$\sigma_{22}=\varepsilon^{-1}\sigma_{22}^{(0)}+\sigma_{22}^{(1)}=-\frac{\cos\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)}{\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\left(a_0+a_1\xi\right);$$

$$u_x = lU = l\left(U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)}\right) = l\varepsilon U^{(1)} \qquad (22)$$

$$u_x = \frac{h\varepsilon a_1\left(\beta - \beta_{12}\beta_{66}\right)}{\Omega_*^2\left(\beta - \beta_{11}\beta_{66}\right)\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\left[\sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}\beta_{66}}}\frac{\cos\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}\left(1+\zeta\right)\sin 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}{\sin 2\Omega_*\sqrt{\beta_{66}}} - \frac{\cos\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)}{\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\right];$$

$$u_y = lV = l\left(V^{(0)} + \varepsilon V^{(1)}\right) = lV^{(0)}$$

$$u_y = -\frac{h\sqrt{\beta}\sin\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}\left(1+\zeta\right)}{\Omega_*\sqrt{\beta_{11}}\cos 2\Omega_*\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta_{11}}}}\left(a_0 + a_1\xi\right).$$

Из формул (20) следует, что при $a_1 = 0, U^{(1)} = 0, \sigma_{12}^{(1)} = 0$ и согласно формулам (19) - (20)

$$u_x = 0; \quad \sigma_{12} = 0, \qquad (23)$$

что означает отсутствие сдвиговых колебаний. Если же $a_1 \neq 0$, т.е. нагрузка переменна: $\sigma_{yy}^{+}\left(\xi\right)$, тогда продольные колебания порождают также сдвиговые колебания ($u_x \neq 0, \sigma_{12} \neq 0$). Однако амплитуда колебаний будет на порядок меньше амплитуд основных (продольных) колебаний.

Заключение. Найдено асимптотическое решение динамической смешанной задачи плоской деформации для ортотропной полосы, лежащей на жесткой подстилке. Найдены амплитуды вынужденных колебаний, установлены условия возникновения резонанса. Показано, что один тип колебаний (например, продольные) порождает колебания другого типа (например, сдвиговые), если внешние воздействия переменны по координате.

Институт механики НАН РА
e-mail: varujan.yapujyan@mail.ru

В. Т. Япуджян

Об одной динамической задаче плоской деформации ортотропного тела

Решена динамическая смешанная задача плоской деформации для полосы конечных размеров, лежащей на жесткой подстилке. На верхнюю кромку полосы действует нормальная нагрузка, гармонично меняющаяся во времени. Нижняя кромка свободно лежит на жесткой подстилке – нормальное перемещение и касательное напряжение равны нулю. Найдено асимптотическое решение внешней задачи. Указаны случаи, когда решение становится математически точным. Показано, что при переменной внешней нагрузке один тип колебаний (например про-

дольный) порождает колебания противоположного типа (сдвиговые). Определены амплитуды колебаний и значения резонансных частот.

Վ. Տ. Յափուջյան

Օրթոտրոպ մարմնի հարթ դեֆորմացիայի մի դինամիկական խնդրի մասին

Վերջավոր չափերի շերտի համար լուծված է հարթ դեֆորմացիայի խառը դինամիկական խնդիր, երբ շերտը հենված է կոշտ հենարանին: Շերտի վերին նիստի վրա ազդում է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ բեռ: Ստորին նիստը ազատ հենված է կոշտ հենարանին, նորմալ տեղափոխությունը և շոշափող լարումը հավասար են զրոյի: Գտնված է արտաքին խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը: Նշված են այն դեպքերը, երբ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ: Ցույց է տրված, որ արտաքին, ըստ կոորդինատի, փոփոխական բեռի դեպքում մի տիպի տատանումը (օրինակ՝ երկայնական) առաջացնում է հակառակ տիպի տատանում (սահքային): Որոշված են տատանման ամպլիտուդները և ռեզոնանսային հաճախությունների արժեքները:

V. T. Yapujyan

About a Dynamic Problem of the Flat Deformation of the Orthotrope Body

A mixed dynamic problem of the flat deformation is solved for the layer of finite sizes when the layer lies on the hard base. A normal load which is harmonically changed according to time, functions on the layer of the upper edge. The lower edge is based loosely on the hard base: the normal movement and tangent tension are equal to zero. The asymptotic solution of the upper problem is found. Some cases are shown when the determination becomes mathematically exact. It is shown that during the changeable upper loading, one type of oscilation (for instance, the longitudinal) creates oscilation of the opposite type (moving). The amplitudes of the oscilation and the significance of the resonance frequency are determined.

Литература

1. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. London. World Scientific. 2015. 376 p. (*Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.)
2. *Агаловян Л. А.* – Изв. НАН РА. Механика. 2017. Т. 70. № 1. С. 3-21.
3. *Агаловян Л. А., Товмасян А. Б.* – Изв. НАН РА. Механика. 1993. Т. 46. № 3 -4. С. 3-11.
4. *Саркисян Н. С., Хачатрян А. М.* – Изв. НАН РА. Механика. 2017. Т. 70. № 1. С. 64-73.
5. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. 1977. М. Наука. 416 с.
6. *Агаловян Л. А.* – ДНАН РА. 2021. Т. 121. № 1. С. 54-60.