

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 64

АВГУСТ, 2021

ВЫПУСК 3

ДИНАМИКА КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С КОНФОРМНО-СВЯЗАННЫМ СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

Р.М.АВАКЯН^{1,2}, Г.Г.АРУТЮНЯН¹, А.С.КОТАНДЖЯН¹,
А.В.ОВСЕПЯН^{1,2}, А.А.СААРЯН¹

Поступила 7 апреля 2021
Принята к печати 28 июля 2021

В работе рассматривается космологическая эволюция модели с конформно-связанным скалярным полем и с космологической постоянной. Такие модели возникают в двух типах теорий гравитации: в общей теории относительности и в скалярно-тензорных теориях с космологической функцией. Найдены точные решения при отсутствии негравитационной материи и проведен качественный анализ соответствующей динамической системы. Показано, что в поздних стадиях эволюции расширение является ускоренным, с решением де Ситтера в качестве аттрактора будущего для общего решения. Имеется также особое решение с экспоненциальным расширением, для которого плотность энергии скалярного поля равна нулю. В ранних стадиях общее решение описывает замедленное расширение, подобное радиационно-доминантному расширению в общей теории относительности.

Ключевые слова: *скалярно-тензорные теории гравитации: скалярное поле; космология*

1. *Введение.* Скалярные поля играют важную роль в современной космологии. В большинстве моделей инфляции в ранних стадиях расширения Вселенной доминантным источником космологической эволюции является скалярное поле, называемое инфлатоном (см., например, [1,2]). Квази-де ситтеровское ускоренное расширение в начальной стадии эволюции приводит к естественному решению ряда проблем Стандартной космологии Большого взрыва. В настоящее время активно рассматриваются также космологические модели, в которых источником ускоренного расширения Вселенной (темной энергии) в поздних стадиях являются скалярные поля, которые называют квинтэссенцией [3,4]. Другим классом скалярных полей являются поля в гравитационном секторе скалярно-тензорных теорий гравитации [5-9]. Эти теории являются наиболее популярной альтернативой общей теории относительности (ОТО). Частным случаем скалярно-тензорных теорий является теория Йордана-Бранса-Дикке (ЙБД).

В качестве другой альтернативы ОТО в настоящее время широко обсуждаются теории $f(R)$ -гравитации, в которых плотность лагранжиана гравитационного поля является заданной функцией скаляра кривизны R [8,10].

Исторически первая успешная модель инфляции Старобинского [11] основывается на теории гравитации с плотностью лагранжиана квадратичной, относительно R . Модели $f(R)$ -гравитации можно представить в виде скалярно-тензорных теорий, в которых функции скалярного поля в плотности лагранжиана определяются конкретным видом функции $f(R)$. Скалярно-тензорной теорией является также эффективная теория гравитации в низкоэнергетическом пределе теории струн. В этой теории в роли скалярного поля в гравитационном секторе выступает поле дилатона.

Скалярно-тензорные теории являются метрическими теориями гравитации и в конформном представлении Йордана негравитационная часть действия не зависит от скалярного поля. Конформным преобразованием метрического тензора действие можно привести к виду, где гравитационная часть плотности лагранжиана совпадает с соответствующей величиной в ОТО. Такое представление теории называется эйнштейновским. В этом представлении негравитационная часть действия, вообще говоря, зависит от скалярного поля. В данной работе будет рассмотрено промежуточное представление, в котором часть действия, содержащее скаляр кривизны R , совпадает с действием ОТО с конформно-связанным скалярным полем. Найдены точные решения для масштабного фактора и скалярного поля в соответствующей космологической задаче при наличии космологической постоянной и проведен качественный анализ поведения общего решения в ранние и поздние стадии расширения. Различные аспекты космологической динамики в теории ЙБД с космологическим скаляром рассмотрены в работах [12-15].

2. Конформные представления скалярно-тензорных теорий. Скалярно-тензорные теории являются метрическими теориями гравитации, которые в гравитационном секторе, помимо метрики $\tilde{g}_{\mu\nu}$, содержат дополнительное скалярное поле φ . В наиболее общем варианте действие теории в представлении Йордана имеет вид (см., например, [5])

$$S = \int \left[-\frac{1}{2} \varphi \tilde{R} + \frac{\zeta(\varphi)}{2\varphi} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \varphi \lambda(\varphi) + \tilde{L}_m(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi) \right] \sqrt{-\tilde{g}} d^4x, \quad (1)$$

где $\zeta(\varphi)$ - безразмерная функция связи, $\lambda(\varphi)$ - космологическая функция, $\tilde{L}_m(\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi)$ - плотность лагранжиана негравитационных полей Ψ , которая не зависит от скалярного поля. Конформным преобразованием метрики $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, $\Omega = \Omega(\varphi)$ действие приводится к виду

$$S = \int \left[-F_R(\varphi)R + F_\varphi(\varphi)g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \Omega^4 \varphi \lambda(\varphi) + L_m(\varphi, g_{\mu\nu}, \Psi) \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2)$$

где R - скаляр кривизны метрики $g_{\mu\nu}$ и введены обозначения

$$\begin{aligned} F_R(\varphi) &= \frac{1}{2}\varphi\Omega^2, \quad L_m(\varphi, g_{\mu\nu}, \Psi) = \Omega^4 \tilde{L}_m(g_{\mu\nu}, \Psi), \\ F_\varphi(\varphi) &= \frac{\Omega^2}{\varphi} \left[\zeta(\varphi) - 3 \left(\varphi \frac{\Omega'}{\Omega} \right)^2 - 3\varphi \frac{\Omega'}{\Omega} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

с $\Omega' = d\Omega/d\varphi$. Выбором функции $\Omega(\varphi)$ можно получить различные конформные представления теории. Наиболее часто рассматривается эйнштейновское представление, для которого $\Omega^2 = 1/k\varphi$ и часть действия со скалярной кривизной совпадает с действием ОТО. Здесь и ниже $k = 8\pi G$, где G - ньютоновская гравитационная постоянная. Переопределением скалярного поля соответствующую часть в (2) можно привести к виду для действия минимально-связанного скалярного поля с потенциалом, определяемым космологической функцией $\lambda(\varphi)$.

Здесь мы рассмотрим другое конформное представление, в котором скалярная часть действия соответствует конформно-связанному скалярному полю. Это представление получается выбором

$$\Omega^2 = \frac{1-k\psi^2/6}{k\varphi}, \quad (4)$$

где ψ - новое скалярное поле и рассматривается область $\psi^2 < 6/k$. Это поле определяется таким образом, чтобы соответствующий кинетический член в действии принимал канонический вид, т.е. $(d\psi/d\varphi)^2 = 2F_\varphi(\varphi)$. С учетом выражения (3), это уравнение приводится к виду

$$\varphi \frac{d\bar{\Psi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \zeta(\varphi) + 1 \right]^{1/2} \left(1 - \bar{\Psi}^2 \right), \quad \bar{\Psi} = \sqrt{k/6}\psi. \quad (5)$$

Интегрирование этого уравнения приводит к результату

$$\bar{\Psi} = \frac{\chi(\varphi) - 1}{\chi(\varphi) + 1}, \quad \chi(\varphi) = \exp \left\{ \int [2\zeta(\varphi)/3 + 1]^{1/2} \frac{d\varphi}{\varphi} \right\}. \quad (6)$$

Заметим, что согласно (4), фактор конформного преобразования для рассматриваемого нами представления задается выражением

$$\Omega^2(\varphi) = \frac{2\chi(\varphi)}{k\varphi[\chi(\varphi) + 1]^2}. \quad (7)$$

Действие (2) в рассматриваемом конформном представлении запишется в виде

$$S = \int \left[-\frac{1}{2k} \left(1 - \frac{k}{6}\psi^2 \right) R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - V(\psi) + L_m(\varphi(\psi), g_{\mu\nu}, \Psi) \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (8)$$

где функция $\varphi(\psi)$ определяется из (6). Действие (8) соответствует действию ОТО с конформно-связанным скалярным полем ψ . В рассматриваемом

представлении это поле непосредственно взаимодействует с негравитационной матерней. Потенциальная энергия определяется космологической функцией:

$$V(\psi) = \frac{\lambda(\phi)}{4k^2\phi} (1 - \bar{\psi}^2)^2. \quad (9)$$

В частном случае теории ЙБД с ненулевой космологической функцией имеем $\zeta(\phi) = \zeta = \text{const}$ и поэтому

$$\chi(\phi) = (\phi/\phi_0)^{\sqrt{2\zeta/3+1}}, \quad (10)$$

где ϕ_0 - постоянная интегрирования. Заметим, что в теории ЙБД предполагается, что $2\zeta/3 + 1 > 0$. Для значений параметра ζ вне этой области в теории возникают неустойчивости.

В частном случае линейной космологической функции $\lambda(\phi) = 4k^2 V_0 \phi$, где V_0 - постоянная (множитель $4k^2$ выделен для удобства), потенциальная энергия имеет простой вид $V(\psi) = V_0(1 - \bar{\psi}^2)^2$. Такой потенциал скалярного поля широко используется в моделях спонтанного нарушения симметрий.

В данной работе мы рассмотрим простой вариант теории с $V(\psi) = \Lambda/k$, где Λ - постоянная при отсутствии негравитационной материи. В этом случае (8) сводится к ОТО с безмассовым конформно-связанным скалярным полем и с космологической постоянной Λ :

$$S = \int \left[-\frac{1}{2k} (R + 2\Lambda) + \frac{\psi^2 R}{12} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (11)$$

Заметим, что это соответствует конформному представлению скалярно-тензорной теории с действием (1) и с космологической функцией

$$\lambda(\phi) = \frac{k\Lambda\phi}{\chi^2(\phi)} [\chi(\phi) + 1]^4. \quad (12)$$

Вариация действия (11) по отношению скалярного поля приводит к уравнению движения

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi - \frac{1}{6} R \psi = 0, \quad (13)$$

где ∇_μ - оператор ковариантного дифференцирования. Соответствующие уравнения для метрического тензора имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}, \quad (14)$$

где симметричный тензор

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{2}{3} \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi - \frac{1}{3} \psi \nabla_\mu \nabla_\nu \psi + \frac{1}{6} g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \psi \nabla_\alpha \nabla^\alpha \psi - \nabla_\alpha \psi \nabla^\alpha \psi \right) + \\ & + \frac{1}{6} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) \psi^2, \end{aligned} \quad (15)$$

можно интерпретировать как тензор энергии-импульса поля ψ . Этот тензор является бесследовым независимо от выполнения уравнения поля (13). С учетом этого обстоятельства из (14) следует, что $R = -4\Lambda$ и уравнение для скалярного поля запишется в виде

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi + \frac{2}{3} \Lambda \psi = 0. \quad (16)$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения минимально-связанного скалярного поля с массой $m^2 = 2\Lambda/3$.

3. Решения грави-скалярной космологической модели. Рассмотрим однородную и изотропную космологическую модель с плоским пространством. Соответствующий интервал имеет

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2, \quad (17)$$

где $a(t)$ - масштабный фактор. При отсутствии негравитационной материи, система космологических уравнений рассмотренной выше модели примет вид

$$\dot{H} + 2H^2 = \frac{2}{3} \Lambda, \quad (18)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + \frac{2}{3} \Lambda \psi = 0, \quad (19)$$

$$\frac{k}{2} (\dot{\psi} + H\psi)^2 - 3H^2 + \Lambda = 0, \quad (20)$$

где точка над буквой означает производную по времени, а $H = \dot{a}/a$ - функция Хаббла. Система уравнений (18)-(20) инвариантна относительно преобразования $(t, H, \psi) \rightarrow (-t, -H, \psi)$ и поэтому можно ограничиться рассмотрением моделей расширения, для которых $H > 0$. Отметим также, что если $\psi(t)$ является решением уравнений (18)-(20), то функция $-\psi(t)$ также является решением.

Заметим, что уравнение Фридмана для плоской космологической модели ОТО имеет вид $H^2 = k\varepsilon/3$, где ε - плотность энергии негравитационной материи. Сопоставляя это с соотношением (20), заключаем, что величину $(\dot{\psi} + H\psi)^2/2$ можно интерпретировать как плотность энергии скалярного поля. В этом можно непосредственно убедиться, воспользовавшись выражением (15) для тензора энергии-импульса скалярного поля. Для плотности энергии $\varepsilon = T_0^0$ и давления $p = -T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3$ получаем

$$\varepsilon = 3p = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - \frac{1}{4}\psi(\ddot{\psi} - H\dot{\psi} + \dot{H}\psi). \quad (21)$$

Используя уравнения (18) и (19), выражения для плотности энергии и давления можно привести к виду

$$\varepsilon = 3 p = \frac{1}{2} (\dot{\psi} + H \psi)^2. \quad (22)$$

Отсюда следует, что уравнение состояния для скалярного поля совпадает с уравнением состояния для излучения. Конечно, этот результат можно было бы непосредственно получить из условия равенства нулю следа тензора энергии-импульса.

Скалярное поле не входит в уравнение (18) для функции Хаббла и после интегрирования получим $H(t) = H_{(e)} \tanh(2H_{(e)}t)$, где

$$\tau = H_{(e)} t, \quad H_{(e)} = \sqrt{\Lambda/3}, \quad (23)$$

а постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы $H(0) = 0$. Заметим, что $H_{(e)}$ - постоянная Хаббла модели де Ситтера в ОТО с космологической постоянной Λ . Для рассматриваемого решения $H^2 < \Lambda/3$ и поэтому оно не удовлетворяет уравнению (20). Это означает, что решение находится в классически недоступной области фазовой плоскости (H, ψ) . Другое решение уравнения (18) имеет вид

$$H(t) = H_{(e)} \coth(2\tau), \quad 0 \leq \tau < \infty. \quad (24)$$

Для этого решения $H^2 > \Lambda/3$ и соответствующие фазовые траектории принадлежат классически доступной области фазовой плоскости. Зависимость масштабного фактора от времени получается простым интегрированием (24):

$$a(t) = a_0 \sinh^{1/2}(2\tau), \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (25)$$

где a_0 - постоянная интегрирования. Функция замедления $q(t) = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$ дается выражением $q(t) = 2/\cosh^2(2\tau) - 1$.

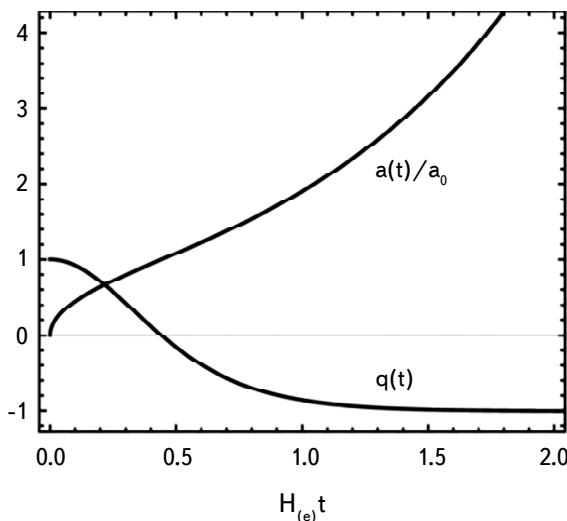


Рис.1. Зависимость масштабного фактора и функции замедления от времени.

Заметим, что уравнение (18) имеет также особое решение с $H = H_{(e)}$ и с масштабным фактором $a(t) = a_0 e^\tau$, $-\infty < \tau < +\infty$. Это соответствует решению де Ситтера ОТО и оно является аттрактором общего решения (19) при $t \rightarrow +\infty$. В этой предельной области космологическая эволюция доминирована космологической постоянной и роль скалярного поля мала. На рис.1 приведена зависимость масштабного фактора и функции замедления от времени. Отрицательные значения функции $q(t)$ соответствуют ускоренному расширению.

Рассмотрим теперь решение для скалярного поля. Для этого заметим, что с помощью уравнения (18) уравнение (19) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + H\psi) + 2H(\dot{\psi} + H\psi) = 0. \quad (26)$$

Это уравнение имеет частное решение, для которого $\dot{\psi} + H\psi = 0$ и, после интегрирования, $\psi = \text{const}/a$. Для этого решения из уравнения (20) следует, что $H = H_{(e)}$ и для масштабного фактора получаем решение де Ситтера. Таким образом, частное решение, соответствующее условию $\dot{\psi} + H\psi = 0$, имеет вид

$$a(t) = a_0 e^\tau, \quad \psi(t) = C_0 e^{-\tau}, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad (27)$$

с постоянной C_0 .

При $\dot{\psi} + H\psi \neq 0$, интегрирование уравнения (26) приводит к результату

$$\dot{\psi} + H\psi = C/a^2, \quad (28)$$

где C - постоянная интегрирования. Из уравнений (20), (23) следует соотношение между постоянными интегрирования: $C^2 = 2\Lambda a_0^4/k$. Как уже было отмечено выше, величину $(\dot{\psi} + H\psi)^2/2$ можно интерпретировать как плотность энергии скалярного поля. Согласно (28), в ходе расширения Вселенной эта плотность энергии уменьшается по закону $1/a^4$. По такому же закону меняется плотность энергии излучения. Этим объясняется тот факт, что в ранних стадиях эволюции в рассматриваемой модели имеет место расширение по закону $a \propto \sqrt{t}$. Уравнение (28) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(a\psi) = \frac{C}{a}, \quad (29)$$

интегрирование которого приводит к следующему результату

$$\psi(t) = \frac{\sqrt{6/k}}{\sinh^{1/2}(2\tau)} \left(\sqrt{2} \int_1^{\exp(\tau)} \frac{dy}{\sqrt{y^4 - 1}} + C_1 \right), \quad (30)$$

где C_1 - постоянная интегрирования. Здесь мы воспользовались тем, что при $\dot{\psi} + H\psi \neq 0$ общее решение для масштабного фактора дается выражением (25). Интеграл в правой части формулы (30) выражается через эллиптический

интеграл 1-го рода $F(w, u)$ (см., например, [16]) и окончательно получим

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{6}{k}} \frac{F(\arccos(e^{-\tau}), 1/\sqrt{2}) + C_1}{\sinh^{1/2}(2\tau)}, \quad 0 < \tau < \infty. \quad (31)$$

Таким образом, общее решение системы космологических уравнений (18)-(20) дается формулами (25), (31). Имеется также особое решение (27). Напомним, что если $\psi(t)$ является решением космологической задачи, то решением является также $-\psi(t)$. Функция $F(\arccos(e^{-\tau}), 1/\sqrt{2})$ в (31) является монотонно возрастающей функцией в области $0 \leq \tau < \infty$. При $\tau \ll 1$ эта функция приблизительно равна $\sqrt{2\tau}$, а при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к постоянному значению $F(\pi/2, 1/\sqrt{2}) \approx 2.086$.

Рассмотрим асимптотическое поведение общего решения. В поздних стадиях эволюции, $\tau > 1$, имеет место следующее асимптотическое поведение для скалярного поля

$$\psi \approx 2\sqrt{6/k} e^{-\tau} [F(\pi/2, 1/\sqrt{2}) + C_1]. \quad (32)$$

Это показывает, что в рассматриваемой области вклад скалярного поля экспоненциально подавлен. В ранних стадиях эволюции, $\tau \ll 1$, для масштабного фактора имеем $a(t) \sim \sqrt{\tau}$ и расширение является замедленным. Для определения асимптотического поведения скалярного поля в этой области воспользуемся разложением

$$F(\arccos(e^{-\tau}), 1/\sqrt{2}) = \sqrt{2\tau} \left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{6} \tau + \dots \right), \quad (33)$$

при $0 \leq \tau \ll 1$. Из формулы (31) получим

$$\sqrt{\frac{k}{6}} \psi \approx \frac{C_1}{2\tau} + 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{6} \tau, \quad \tau \ll 1. \quad (34)$$

Отсюда следует, что для общего решения с $C_1 \neq 0$ имеем $\psi \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Для особого решения с $C_1 = 0$ получим $\psi \rightarrow \sqrt{6/k}$ при $t \rightarrow 0$. В этом же пределе, для масштабного фактора имеем $a(t) \approx a_0 \sqrt{2\tau}$. Такое поведение соответствует радиационно-доминантному расширению космологических моделей в рамках ОТО. Этого следовало было ожидать, поскольку в ранних стадиях расширения доминантным источником является безмассовое конформно-связанное скалярное поле и, согласно (22), соответствующее уравнение состояния совпадает с уравнением состояния для излучения. На рис.2 приведена зависимость скалярного поля от времени для различных значений постоянной C_1 в (31).

Заметим, что при $C_1 \geq 0$ для рассматриваемого решения $\psi > 0$. Для значений постоянной интегрирования в области $-F(\pi/2, 1/\sqrt{2}) < C_1 < 0$

скалярное поле является отрицательным в ранних стадиях и положительным в поздних стадиях эволюции. При $C_1 < -F(\pi/2, 1/\sqrt{2})$ скалярное поле отрицательно.

Таким образом, в поздних стадиях эволюции расширение является ускоренным и пространство-время де Ситтера является аттрактором будущего для общего решения космологической задачи. В ранних стадиях эволюции имеет место замедленное расширение по закону $a(t) \sim \sqrt{t}$.

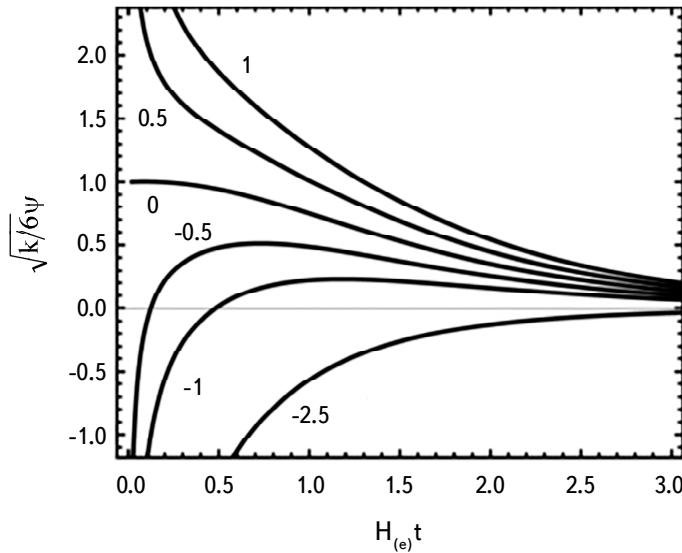


Рис.2. Зависимость скалярного поля от времени для различных значений постоянной интегрирования C_1 (числа возле кривых) в решении (31).

Для исследования фазовой картины динамической системы (см. следующий раздел) полезно также исследовать асимптотическое поведение отношения $\dot{\psi}/\psi$. Для этого можно воспользоваться соотношением $\dot{\psi}/\psi = C/(a^2 \psi) - H$. Из (25) следует, что при $\tau \gg 1$ имеем $\dot{\psi}/\psi \rightarrow -H_{(e)}$. При $t \rightarrow 0$ для особого решения с $C_1 = 0$ имеем $\dot{\psi}/\psi \approx -(\sqrt{2} - 1)H_{(e)}/12$. При $C_1 \neq 0$ имеет место асимптотика в пределе $t \rightarrow 0$.

Заметим, что решение для масштабного фактора (25) не содержит постоянной интегрирования C_1 в решении (31) для скалярного поля и является следствием факта, что эта постоянная не входит в выражение $\varepsilon = C^2 a^{-4}/2$ для плотности энергии скалярного поля. Отсюда следует, что характерные черты динамики расширения не зависят от значения постоянной C_1 и основным определяющим параметром является космологическая постоянная. В частности, для момента перехода замедленного расширения в ускоренную fazu имеем $t_0 = \text{arcch}(3)/(4H_{(e)}) \approx 0.44/H_{(e)}$. Для отношения плот-

ности энергии скалярного поля к плотности энергии $\varepsilon_\Lambda = \Lambda/k$, соответствующей космологической постоянной, имеем $\varepsilon/\varepsilon_\Lambda = (a_0/a)^4 = 1/\text{sh}^2(2H_{(e)}t)$. Это отношение экспоненциально подавлено при $H_{(e)}t > 1$ и доминантным источником расширения является космологическая постоянная. Конкретные значения постоянной C_1 могут быть важны при изучении тех явлений, которые непосредственно чувствительны к значению скалярного поля. Например, это может быть обусловлено дополнительными взаимодействиями скалярного поля с другими формами негравитационной материи.

4. Качественное рассмотрение космологической задачи. В данном разделе исследована эволюция рассмотренной выше модели методами качественной теории динамических систем. Эти методы позволяют выяснить основные особенности космологической динамики без явного решения соответствующих уравнений и широко используются в задачах, где точные решения отсутствуют или слишком сложны (см., например, [17,18]). Качественный анализ космологической эволюции скалярно-тензорных теорий, возникающих в низко-энергетическом пределе теорий струн, рассмотрен в работах [19–23]. Скалярно-тензорные модели, соответствующие теориям $f(R)$ -гравитации, исследованы в [24].

Для описания космологической эволюции и поведения решений в асимптотических областях удобно записать уравнения (18), (19) в виде автономной динамической системы. Введя безразмерные переменные

$$x = \frac{H}{H_{(e)}}, \quad y = \frac{\dot{\psi}}{H_{(e)}\psi} = \frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{d\tau}, \quad (35)$$

получим следующую автономную динамическую систему второго порядка:

$$\frac{dx}{d\tau} = 2 - 2x^2, \quad \frac{dy}{d\tau} = -y^2 - 3xy - 2, \quad (36)$$

где определение τ приведено в (23). Для моделей расширения $x > 0$. В терминах тех же переменных уравнение (20) представится в виде

$$\frac{k}{6}\psi^2(x+y)^2 - x^2 + 1 = 0. \quad (37)$$

Отсюда следует, что моделям расширения в классически доступной области фазового пространства (x, y) соответствует $x \geq 1$. Из (36) следует, что прямая $x = 1$ является фазовой траекторией этой системы. Можно убедиться, что прямая $y = -x$ также является фазовой траекторией. Она соответствует рассмотренному выше частному решению $\psi = C_0/a$.

В области фазовой плоскости $x \geq 1$ особыми точками системы (36) являются точки (x, y) с координатами

$$A_1 = (1, -1), \quad A_2 = (1, -2). \quad (38)$$

Обе эти точки лежат на границе классически доступной области. Собственные числа $(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)})$ точки A_i равны

$$(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}) = (-4, -1), \quad (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}) = (-4, 1). \quad (39)$$

Отсюда следует, что точка A_1 является устойчивым узлом, а точка A_2 - седлом. В окрестности точки A_1 фазовые траектории, соответствующие общему решению, входят в эту точку касательно к фазовым траекториям $x=1$. Неустойчивыми сепаратрисами седла A_2 являются фазовые траектории $x=1$. На рис.3 приведен фазовый портрет моделей расширения динамической системы (36).

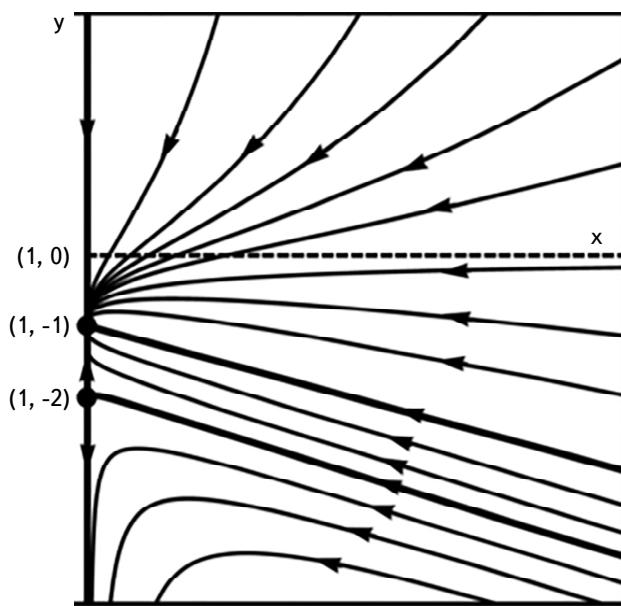


Рис.3. Фазовый портрет космологических моделей расширения в плоскости (x, y) .

Для решений, соответствующих фазовым траекториям на прямой $x=1$, имеем $a(t) = a_0 e^{H_{(e)} t}$. Эти решения описывают де ситтеровское расширение с различным поведением скалярного поля в областях $-\infty < y < -2$, $-2 < y < -1$ и $-1 < y < +\infty$. Де ситтеровское расширение соответствует также фазовой траектории $y = -x$ (на рис.3 жирная траектория, входящая в устойчивый узел A_1). Устойчивая сепаратриса седловой точки A_2 (жирная траектория) разделяет фазовую плоскость на две части. В области ниже сепаратрисы имеем $y \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, а для траекторий выше сепаратрисы $y \rightarrow -1$ при $t \rightarrow +\infty$. Экспоненциальное де ситтеровское расширение является атTRACTором будущего для всех моделей.

Мы рассмотрели космологическую эволюцию в рамках модели, описываемой действием (11). Она соответствует ОТО с конформно-связанным скалярным полем. Если рассматривать модель как конформное представление скалярно-тензорной теории с действием (1) и с космологической функцией (12), то следует иметь в виду, что негравитационная материя движется по геодезическим метрикам $\tilde{g}_{\mu\nu}$ представления Йордана и представляет интерес рассматривать космологическую эволюцию в этом представлении. Для соответствующего линейного элемента имеем

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 - \tilde{a}^2(\tilde{t}) \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2, \quad (40)$$

где \tilde{t} и $\tilde{a}(\tilde{t})$ синхронная временная координата и масштабный фактор йордановского представления. Они связаны с соответствующими величинами конформного представления (11) соотношениями

$$d\tilde{t} = \Omega dt, \quad \tilde{a}(\tilde{t}) = \Omega a(t), \quad (41)$$

где функция $\Omega = \Omega(\varphi)$ дается выражением (7). В этом выражении, согласно (6),

$$\chi(\varphi) = \frac{1 + \bar{\psi}}{1 - \bar{\psi}}. \quad (42)$$

В поздних стадиях расширения, $\tau \rightarrow \infty$, имеем $\bar{\psi} \propto e^{-\tau}$ и поэтому $\chi(\varphi) - 1 \propto e^{-\tau}$. Отсюда следует, что для регулярных функций $\zeta(\varphi)$ поле φ стремится к постоянному значению при $\tau \rightarrow \infty$. Например, в теории ЙБД имеем (10) и $\varphi \rightarrow \varphi_0$. Из соотношения (7) следует, что в поздних стадиях к постоянному значению стремится также функция $\Omega(\varphi)$: $\Omega(\varphi) - 1/\sqrt{k\varphi_0} \propto e^{-\tau}$. Таким образом, в поздних стадиях эволюции экспоненциальное расширение имеет место как в конформном, так и в йордановском представлениях.

Заметим, что в приведенном выше рассмотрении действие (8) соответствует конформному представлению скалярно-тензорной теории (1). В такой интерпретации зависимость плотности лагранжиана L_m в (8) от скалярного поля ψ определяется соотношениями (3), (6) и (7). Мы могли бы рассматривать (8) как действие независимой теории, соответствующую ОТО с конформно-связанным скалярным полем. В этой интерпретации взаимодействие скалярного поля с негравитационной материи определяется зависимостью плотности лагранжиана L_m от поля ψ , которая, вообще говоря, может быть произвольной. В простейшем варианте L_m не зависит от ψ и скалярное поле непосредственно не взаимодействует с негравитационной материи. Представленные выше решения описывают динамику метрики и скалярного поля при отсутствии негравитационных полей Ψ и являются решениями космологической задачи в обоих вариантах интерпретации действия (8). В космологических моделях, учитывающих также наличие поля Ψ , эти решения, вообще говоря, будут

различными.

В рассмотренной выше модели космологическая постоянная Λ и связанная с ней постоянная Хаббла $H_{(e)}$ являются свободными параметрами. Выбором конкретных значений этих параметров можно описывать ускоренное расширение в период инфляции в ранней Вселенной и ускоренное расширение в настоящую эпоху. В большинстве моделей инфляции источником ускоренного расширения (инфлатоном) является медленно меняющееся скалярное поле [1,2]. Соответствующее уравнение состояния хорошо аппроксимируется уравнением состояния для космологической постоянной. Поэтому можно ожидать, что приведенные выше решения можно использовать для приблизительного описания ускоренного расширения, управляемым скалярным полем в режиме медленного скатывания. Заметим, что в качестве источника инфляции может выступать также потенциальная энергия $V(\psi)$ поля ψ в (8), которая определяет характерный масштаб параметра Хаббла. Заметим, что в моделях инфляции с единственным скалярным полем в качестве инфлатона, характерное значение параметра Хаббла равно $H_{\text{inf}} \approx 8 \times 10^{13} \sqrt{r/0.1} \text{ GeV}$, где r - тензорно-скалярное отношение. Согласно наблюдательным данным космической обсерватории Planck [27] $r < 0.063$.

5. Заключение. Рассмотрена эволюция Вселенной, описываемая действием (11). Это действие соответствует двум типам теорий гравитации: ОТО с конформно-связанным скалярным полем и с космологической постоянной и конформному представлению скалярно-тензорной теории с космологической функцией (12). Модель точно интегрируема и в зависимости от времени масштабного фактора и скалярного поля даются соотношениями (25) и (31). Имеется также особое решение (27), которое является аттрактором будущего для общего решения. Величину $3(\dot{\psi} + H\psi)^2/2$ в уравнении Фридмана (20) можно интерпретировать как плотность энергии скалярного поля. Для особого решения она равна нулю и соответствующее расширение является экспоненциальным для всех t . Для общего решения с $\dot{\psi} + H\psi \neq 0$ плотность энергии скалярного поля меняется по закону $1/a^4$ и это поле является доминантным в ранних стадиях эволюции. Соответствующее расширение является замедленным с масштабным фактором $a(t) \propto \sqrt{t}$. По такому же закону расширяется Вселенная в радиационно-доминантной стадии при отсутствии скалярного поля. Это объясняется тем, что в обоих случаях плотность энергии, как функция от масштабного фактора, меняется как $1/a^4$. Заметим, что для минимально-связанного безмассового скалярного поля с возрастанием масштабного фактора плотность энергии убывает быстрее, по закону $1/a^6$.

Для наглядного представления поведения общего решения космологической задачи в ранних и поздних стадиях эволюции нами также проведено

качественное исследование соответствующей автономной динамической системы на фазовой плоскости (x, y) , оси которой соответствуют функции Хаббла и относительной скорости изменения скалярного поля. Соответствующая фазовая картина изображена на рис.3.

Работа выполнена при поддержке Комитета по науке Министерства образования, науки, культуры и спорта РА в рамках проекта 20RF-059.

¹ Кафедра теоретической физики им. Г.С.Саакяна, ЕГУ, Армения,

² Институт прикладных проблем физики НАН РА,

е-mail: rolavag@ysu.am hagohar@ysu.am anna.kotanjyan@ysu.am
 ahovs@mail.ru saharian@ysu.am

COSMOLOGICAL DYNAMICS WITH A CONFORMALLY COUPLED SCALAR FIELD

R.M.AVAGYAN^{1,2}, G.H.HARUTUNYAN¹, A.S.KOTANJYAN¹,
 A.V.HOVSEPYAN^{1,2}, A.A.SAHARIAN¹

We consider a cosmological model with a conformally coupled scalar field and the cosmological constant. These models arise in two types of theories of gravity: in General Relativity and scalar-tensor theories with a cosmological function. The exact solutions are found in the absence of non-gravitational matter and qualitative analysis of the corresponding dynamical system is carried out. It is shown that at the late stages of the evolution the expansion is accelerated and the de Sitter solution is a future attractor for the general solution. There is also a special solution with an exponential expansion, for which the energy density of the scalar field vanishes. At the early stages, the general solution describes a decelerated expansion similar to the radiation-dominated expansion in General Relativity.

Keywords: *scalar-tensor theories of gravity: scalar field: cosmology*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.Linde*, Particle Physics and Inflationary Cosmology, *Contemp. Concepts Phys.*, **5**, 2005; arXiv:hep-th/0503203.
2. *J.Martin, C.Ringeval, V.Vennin*, *Phys. Dark Univ.*, **5-6**, 75, 2014.
3. *K.Bamba, S.Capozziello, S.Nojiri et al.*, *Astrophys. Space Sci.*, **342**, 155, 2012.
4. *P.Brax*, *Rep. Prog. Phys.*, **81**, 016902, 2018.
5. *C.M.Will*, Theory and Experiment in Gravitational Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
6. *V.Faraoni*, Cosmology in Scalar-Tensor Gravity, Springer, 2004.
7. *Y.Fujii, K.-I.Maeda*, The Scalar-Tensor Theory of Gravitation. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
8. *T.Clifton, P.G.Ferreira, A.Padilla et al.*, *Phys. Rep.*, **513**, 1, 2012.
9. *I.Quiros*, *Int. J. Mod. Phys. D*, **28**, 1930012, 2019.
10. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, *Phys. Rep.*, **505**, 59, 2011.
11. *A.A.Starobinsky*, *Phys. Lett. B*, **91**, 99, 1980.
12. *R.M.Avagyan, G.H.Harutyunyan, V.V.Papoyan*, *Astrophysics*, **48**, 381, 2005.
13. *R.M.Avagyan, G.H.Harutyunyan*, *Astrophysics*, **48**, 532, 2005.
14. *R.M.Avagyan, G.H.Harutyunyan, A.V.Hovsepyan et al.*, *Astrophysics*, **57**, 304, 2014.
15. *R.M.Avagyan, G.H.Harutyunyan, S.V.Sushkov*, *Astrophysics*, **60**, 142, 2017.
16. Handbook of Mathematical Functions. Edited by M.Abramowitz, I.A.Stegun, National Bureau of Standards, Washington, 1972.
17. *I.Wainwright, G.F.R.Ellis*, Dynamical Systems in Cosmology. Cambridge University Press., Cambridge, 1977.
18. *A.A.Coley*, Dynamical Systems and Cosmology, Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2003.
19. *A.A.Saharian*, *Astrophysics*, **40**, 335, 1997.
20. *A.A.Saharian*, *Astrophysics*, **42**, 87, 1999.
21. *A.A.Saharian*, *Astrophysics*, **42**, 222, 1999.
22. *A.A.Saharian*, *Class. Quantum Grav.*, **16**, 2057, 1999.
23. *A.L.Mkhitaryan, A.A.Saharian*, *Astrophysics*, **49**, 415, 2006.
24. *R.M.Avagyan, E.V.Chubaryan, G.H.Harutyunyan et al.*, *Gen. Rel. Grav.*, **48**, 21, 2016.
25. Planck Collaboration: Y.Akrami et al., *Astron. Astrophys.*, **641**, A10, 2020.