

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 64

МАЙ, 2021

ВЫПУСК 2

## К ВОПРОСУ ОБ ОБРАЗОВАНИИ НЕРАВНОВЕСНОГО ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА В ОБОЛОЧКАХ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

А.Ю.ИГНАТОВСКИЙ<sup>1,2</sup>

Поступила 30 октября 2020

Принята к печати 3 мая 2021

В работе обсуждается химический состав оболочки нейтронной звезды (ОНЗ) при высоких температурах и плотностях. Предложена модель нуклеосинтеза, основанная на приближении ядерного статистического равновесия (ЯСР). Проведено изучение зависимости результатов нуклеосинтеза от параметров среды в статическом приближении. Результаты текущей работы демонстрируют качественное сходство с более ранними работами других авторов. Показано, что предложенная модель даже в статическом приближении неплохо описывает распространенность ядер.

**Ключевые слова:** ядерная астрофизика: ядерное статистическое равновесие

1. *Введение.* В процессе равновесного звездного нуклеосинтеза образуются химические элементы вплоть до железа, имеющего наибольшую энергию связи на нуклон, чего не хватает для объяснения наблюдаемого изобилия элементов в природе [1]. Считается, что более тяжелые ядра образуются в так называемых s- и г-процессах медленного и быстрого присоединения нейтронов ядрами соответственно [2,3] (рассматриваются скорости захвата нейтронов  $\lambda_{(n,\gamma)}$  по отношению к бета-реакциям  $\lambda_\beta$ , для s-процесса  $\lambda_\beta \gg \lambda_{(n,\gamma)}$ , а для г-процесса  $\lambda_{(n,\gamma)} \gg \lambda_\beta$ ). Процессы нуклеосинтеза были классифицированы в работе [4]. Для протекания г-процесса необходима реализация определенных условий, например, в веществе должно быть достаточно свободных нейтронов [5]. При большом избытке нейтронов, когда отношение числа нейтронов к количеству зародышевых ядер  $n_n/n_{seeds}$  превышает 150, возможно образование даже сверхтяжелых ядер [6]. Ядра, захватывающие свободные нейтроны, образуют все более тяжелые изотопы при постоянном  $Z$  ( $Z$  - зарядовое число), постепенно энергия связи нейтрона в ядре уменьшается. По достижению определенного значения  $A$  ( $A$  - нуклонное число) реакция захвата нейтрона уравновешивается обратной реакцией фотоотщепления, после чего ядро претерпевает бета-распад с образованием элемента ( $Z+1, A$ ), который может присоединить еще некоторое количество нейтронов перед последующим бета-распадом. С помощью такого процесса возможно образование сверхтяжелых

ядер с большими значениями  $Z$  и  $A$ , которые в результате активности нейтронной звезды (НЗ) могут выноситься наружу в межзвездное пространство, входя в состав звезд следующего поколения, планет и других объектов [7].

Существуют различные сценарии, приводящие к выбросу вещества ОНЗ в окружающую среду: горячий ветер с поверхности НЗ [8]; различные динамические процессы, такие как эволюция тесной двойной системы НЗ различных масс [9] и слияние двух НЗ с последующим образованием массивной НЗ или черной дыры [10]. Также стоит отметить важность рассмотрения более глубоких слоев субядерной плотности НЗ, в которых возможно существование кластеров, состоящих из легких нейтрониизбыточных ядер, таких как  $^4\text{H}$  и  $^8\text{He}$  [11].

*2. Оболочки нейтронных звезд.* НЗ являются результатом гравитационного коллапса обычных звезд [12]. Степень нейтронизации таких компактных объектов на порядки выше, чем у звезд-предшественниц, что делает их кандидатами для образования тяжелых изотопов различных химических элементов. В работе рассматривается ОНЗ, которая имеет плотность  $10^9 - 10^{13} \text{ г см}^{-3}$ ; центральные области НЗ могут иметь плотности, превосходящие плотность атомного ядра  $10^{14} \text{ г см}^{-3}$ , из-за чего нельзя исключить наличие кварковой материи, для описания которой нужна специальная теория.

Начиная с температур  $T_9 = 3 - 5$  ( $T_9$  - температура, нормированная на  $10^9 \text{ К}$ ), фотоядерные реакции существенно влияют на относительную распространенность химических изотопов, скорости ядерных реакций много больше скоростей бета-реакций  $\lambda_{(\gamma, i)}, \lambda_{(i, \gamma)} \gg \lambda_\beta \text{ с}^{-1}$  ( $i = n; p$ ), в веществе много свободных нейтронов и протонов: в таких условиях применимо приближение ЯСР [13,14]. В текущей работе параметры среды  $T$  и  $\rho$  не меняются во времени. Считается, что в каждый момент времени выполнено ЯСР, что позволяет считать кинетику только по бета-реакциям, а для ядерных реакций - пользоваться соотношением Саха [15,16], о котором будет написано в следующем разделе. Для удобства введен безразмерный параметр  $R$ , равный отношению всех протонов системы к суммарному количеству нейтронов:

$$R = \frac{\sum_{A,Z} n(A, Z)Z + n_p}{\sum_{A,Z} n(A, Z)(A - Z) + n_n}, \quad (1)$$

где суммирование идет по всем ядрам. В современной литературе вместо параметра  $R$  чаще используется параметр  $Y_e$ , который характеризует количество электронов на барион и равен  $Y_e = \left( \sum_{A,Z} n(A, Z)Z + n_p \right) / \left( \sum_{A,Z} n(A, Z)A + n_n + n_p \right)$ . Переход от одного параметра к другому осуществляется с помощью  $Y_e = R/(R+1)$ .

При высокой плотности и температуре электроны можно считать релятивистскими, а вещество - полностью ионизованным:  $kT \sim m_e c^2$ ,  $v_e \sim c$  [17]. Среднее число электронов с энергией  $\varepsilon$  в ячейке фазового пространства задается функцией Ферми [18]:

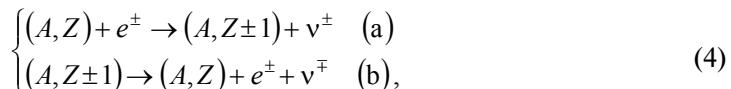
$$f_e = \left[ 1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_e}{kT}\right) \right]^{-1}, \quad (2)$$

где  $\mu_e$  - химический потенциал электрона. Энергия и импульс соответствующего электрона есть [19]:

$$\varepsilon = \left( m_e^2 c^4 + p^2 c^2 \right)^{1/2}, \quad p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

При высоких температурах  $kT \sim m_e c^2$  необходимо учитывать позитроны, аннигиляция пары  $e^- e^+$  рождает гамма-квант, химический потенциал которого в равновесии равен нулю  $\mu_\gamma = 0$ , тогда  $\mu_{e^+} = -\mu_e$  [17].

Предположение о постоянстве условий среды на временах эволюции системы имеет неточность. При температурах  $T_9 > 1$  Н3 быстро охлаждаются за счет нейтринных потерь энергии в ходе реакций [17]:



где  $v^-$  и  $v^+$  - нейтрино и антинейтрино, соответственно. При остывании в коре нейтронных звезд образуется неравновесный слой [20], в котором аккумулируется большое количество энергии. По мере остывания постепенно выключаются фотопреакции, реакции с заряженными частицами (вероятность туннелирования через кулоновский барьер падает с уменьшением температуры) [21]. В условии вырождения электронов бета-распад происходит при  $\varepsilon_\beta > \varepsilon_{f_e}$ , захват электронов при  $\varepsilon_{f_e} > \varepsilon_\beta$ , здесь  $\varepsilon_\beta$  - энергия бета-распада,  $\varepsilon_{f_e}$  - Ферми энергия электронов. При падении температуры  $T_9 < 4 - 5$  ядра быстро захватывают нейтроны  $\lambda_{(n, \gamma)} \gg \lambda_\beta$ , после образования ядер с большим избытком нейтронов с ними происходят бета-распады и захваты электронов в зависимости от значений  $\varepsilon_\beta$  и  $\varepsilon_{f_e}$  для каждого сорта ядер. В результате ядра аккумулируются в неравновесном слое, ограниченном по  $A$  и  $Z$  [20].

Ниже температуры  $T_9 = 3$  приближение ЯСР некорректно, реакции фотоотщеплений и захвата нейтронов и протонов необходимо считать по кинетической модели (КМ) [22,23]. Также химический состав может меняться при сжатии вещества [7,24].

3. *Модель.* Распределение элементов берется в равновесии по Саха:

$$\begin{cases} \mu(Z, A) + \mu_n = \mu(Z, A+1) \\ \mu(Z, A) + \mu_p = \mu(Z+1, A). \end{cases} \quad (5)$$

Нейтроны, протоны и нерелятивистские и невырожденные ядра, могут быть описаны идеальным больцмановским газом [18]:

$$\mu = kT \ln \frac{N}{\omega V} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2}, \quad (6)$$

где  $\mu$  - химический потенциал,  $T$  - температура,  $N/V = n$  - концентрация частиц,  $m$  - масса частицы,  $\omega$  - статистический вес,  $k$  и  $\hbar$  - постоянные Больцмана и Планка, соответственно. Из (5) и (6) получаем:

$$\frac{n(A, Z)}{\omega(A, Z)} = A^{3/2} \frac{n_p^Z n_n^{A-Z}}{2^A} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m_p kT} \right)^{3(A-1)/2} e^{Q(A, Z)/kT}. \quad (7)$$

Здесь  $\omega(A, Z) = \sum_i (2J_i + 1) \exp(-\varepsilon_i/kT)$ , где суммирование идет по основному и всем возбужденным состояниям,  $J$  - спин ядра,  $\varepsilon_i$  - энергия  $i$  возбужденного состояния над основным, а  $Q(A, Z) = c^2 (Zm_p + (A-Z)m_n - m(A, Z))$  является энергией связи ядра. В дальнейшем будем считать, что все вещество находится только в основном состоянии, тогда  $\omega(A, Z) = (2J+1)$ . Равенство (7) дает распределение Саха для концентрации любого элемента системы  $n(A, Z)$  как функции свободных нейтронов  $n_n$  и протонов  $n_p$ . Для моделирования процессов удобно ввести безразмерные величины:

$$x = \frac{cp}{kT}; \quad \alpha = \frac{m_e c^2}{kT}; \quad \beta = \frac{\mu_e}{kT}; \quad x_0 = \frac{\Delta_{Z'Z}}{kT}, \quad (8)$$

где  $\Delta_{Z'Z} = (m_{(A, Z)} - m_{(A, Z')})c^2$  есть разница энергий материнского и дочернего ядер. Концентрации электронов и позитронов находятся из условия на полное число частиц [18]:

$$N = \frac{\omega V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1}. \quad (9)$$

Интегрирование проводится по импульсному пространству. Совместно с условием электронейтральности это дает систему для нахождения концентрации электронов и позитронов:

$$\begin{cases} n_{e^\pm} = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{kT}{c\hbar} \right)^{3\infty} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + e^{\sqrt{x^2 + \alpha^2 \pm \beta}}} \\ n_p + n_{e^+} + \sum_{A, Z} Zn(A, Z) = n_{e^-} \\ \mu_{e^+} = -\mu_e. \end{cases} \quad (10)$$

Концентрации элементов системы изменяются в результате протекания различных бета-реакций (4), скорости которых даются ферми-интегралами [17]. Также для их подсчета нужны значения параметров  $Ft_{1/2}(A, Z)$  - сравнительный период полураспада<sup>1</sup>, которые можно посмотреть, например, в [25]:

$$\begin{cases} W^{(a)} = \frac{\omega_{Z'}}{\omega_Z} \frac{\ln 2}{(Ft)_{Z'}} \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right)^5 I_2 \\ W^{(b)} = \frac{\ln 2}{(Ft)_{Z'}} \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right)^5 I'_2, \end{cases} \quad (11)$$

где индексы (a) и (b) соответствуют (4), а общий вид  $I_2$  и  $I'_2$  дается интегральными выражениями [17]:

$$\begin{cases} I_k = \int_0^\infty \frac{x^k (x+x_0) \sqrt{(x+x_0)^2 - \alpha^2}}{1 + \exp(x+x_0 - \beta_\pm)} dx \\ I'_k = \int_0^{x_0-\alpha} \frac{(x_0-\alpha-x)^k (x+\alpha) \sqrt{x^2 + 2\alpha x}}{1 + \exp(\beta_\pm - x - \alpha)} dx. \end{cases} \quad (12)$$

Так как речь идет о больших концентрациях, то перейдем к следующим обозначениям  $Y(A, Z) = n(A, Z)/(\rho N_a)$ , где  $N_a$  - постоянная Авогадро,  $\rho$  - плотность. Тогда изменение любого элемента системы за счет бета-реакций дается выражением:

$$\begin{aligned} \frac{dY(A, Z)}{dt} = & -Y(A, Z) \left( W_{\beta}^{cap} + W_{\beta}^{dec} + W_{\beta^+}^{cap} + W_{\beta^+}^{dec} \right) + \\ & + Y(A, Z+1) \left( W_{\beta}^{cap} + W_{\beta}^{dec} \right) + Y(A, Z-1) \left( W_{\beta^+}^{cap} + W_{\beta^+}^{dec} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Критерием выбора времени интегрирования является выход концентраций всех элементов на постоянные значения (речь идет о временах порядка нескольких сотен секунд):  $R$  должно выходить на постоянное значение. Алгоритм счета в виде блок-схемы приведен на рис.1.

Для вычисления изменений концентрации элементов системы использован метод Рунге-Кутты 4 порядка точности с возможностью регулировать шаг. Для подпрограмм, вычисляющих перераспределение по Саха и концентраций электронов и позитронов (варьируя химический потенциал), реализован метод касательных Ньютона [26]. Относительные ошибки всех подпрограмм  $\delta \sim 10^{-6}$  и меньше.

Если подынтегральная функция представима в виде  $f(x)e^{-x}x^p$  (вид выражений (12)), где функция  $f(x)$  ограничена на любом конечном интервале

<sup>1</sup> <https://www-nds.iaea.org/relnsd/NdsEnsd/QueryForm.html>

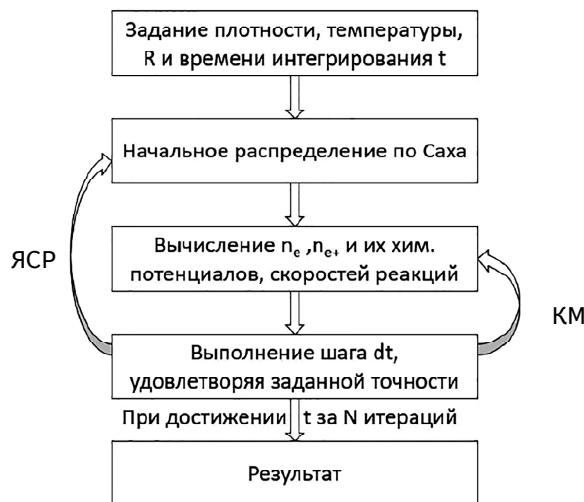


Рис.1. Блок-схема алгоритма.

и хорошо аппроксимируется каким-нибудь полиномом степени  $\leq 2n-1$ , то тогда верна следующая квадратурная формула [27,17]:

$$\int_0^\infty f(x) x^p e^{-x} dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (14)$$

где  $x_i$  - корни полинома Лагерра  $L_n^{(p)}$ , а коэффициенты  $A_i$  определяются системой линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i^k = (k+p)!, \quad (15)$$

*Таблица 1*

## ВКЛЮЧЕННЫЕ В СИСТЕМУ ИЗОТОПЫ

Элемент	<i>Z</i>	<i>A</i>	Элемент	<i>Z</i>	<i>A</i>
n	0	1	Sc	21	40-52
H	1	1	Ti	22	40-54
He	2	4	V	23	42-56
C	6	12	Cr	24	44-58
O	8	16	Mn	25	46-60
Ne	10	20	Fe	26	48-62
Mg	12	24	Co	27	50-64
Si	14	28	Ni	28	52-66
S	16	32	Cu	29	54-66
S	16	40	Zn	30	56-66
Cl	17	40-43	Ga	31	58-66
Ar	18	36-46	Ge	32	60-66
K	19	40-48	As	33	62-66
Ca	20	40-50	Se	34	66

где  $k=0, 1, \dots, n-1$ . Значения  $A_i$  и  $x_i$  для схемы, состоящей из 5 точек, можно найти, например, в [17].

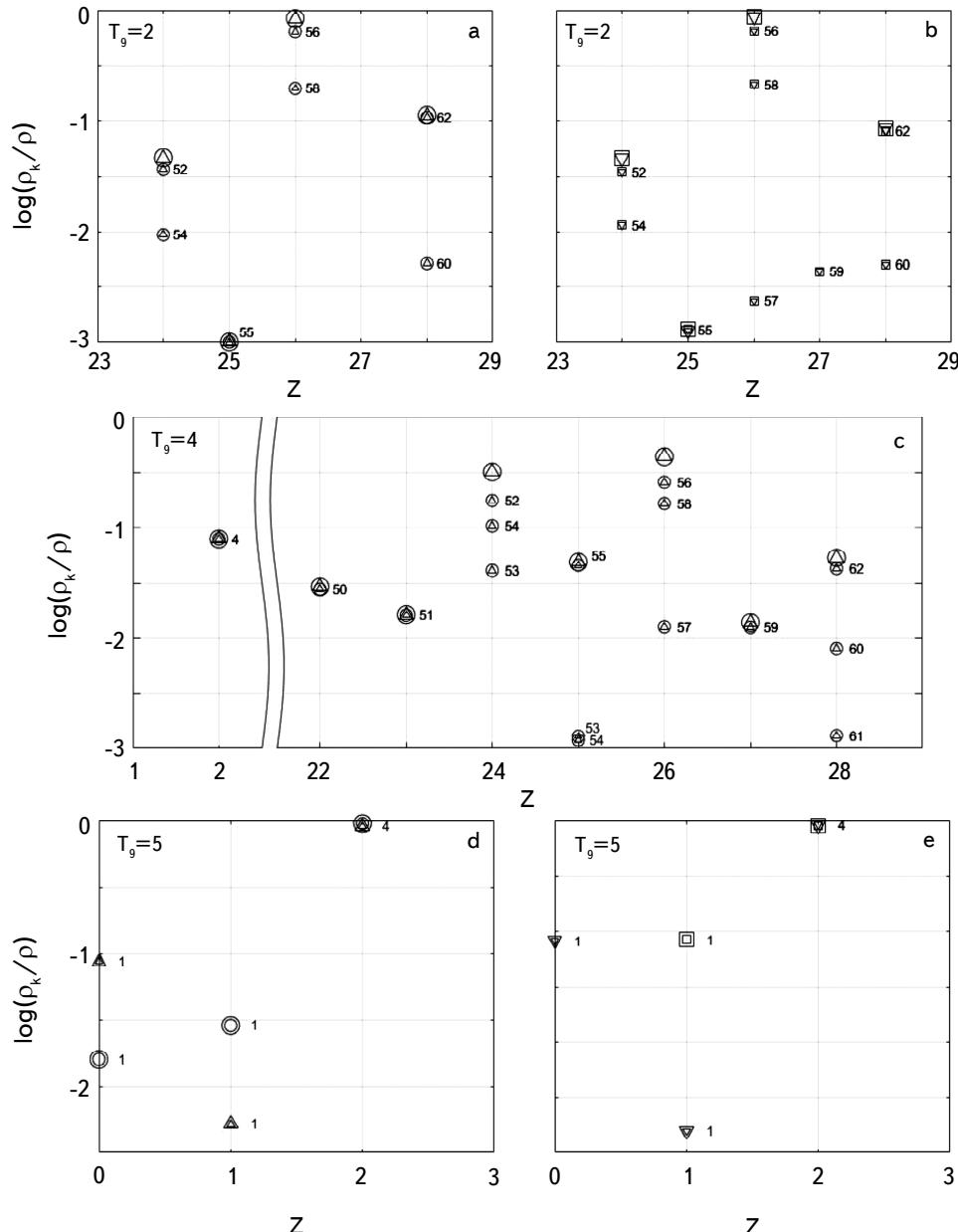


Рис.2. Состав ОН3; (a), (c), (d) - результаты текущей работы, (b) и (e) - работы [16];  $\Delta$  - начальное распределение изотопов текущей работы,  $\nabla$  - работы [16];  $\circ$  - конечное распределение изотопов текущей работы,  $\square$  - работы [16]; увеличенные метки обозначают суммарный вклад изотопов при одном зарядовом числе  $Z$ ; каждый изотоп подписан своим массовым числом  $A$ ;  $\log \rho = 4$  и  $T_g \in [2; 5]$ .

В табл.1 приведены рассматриваемые в текущей работе изотопы.

**4. Результаты и обсуждение.** Моделирование проводится так, что для каждой плотности  $\log \rho = 4, 6, 8, 10$  берутся разные значения температур

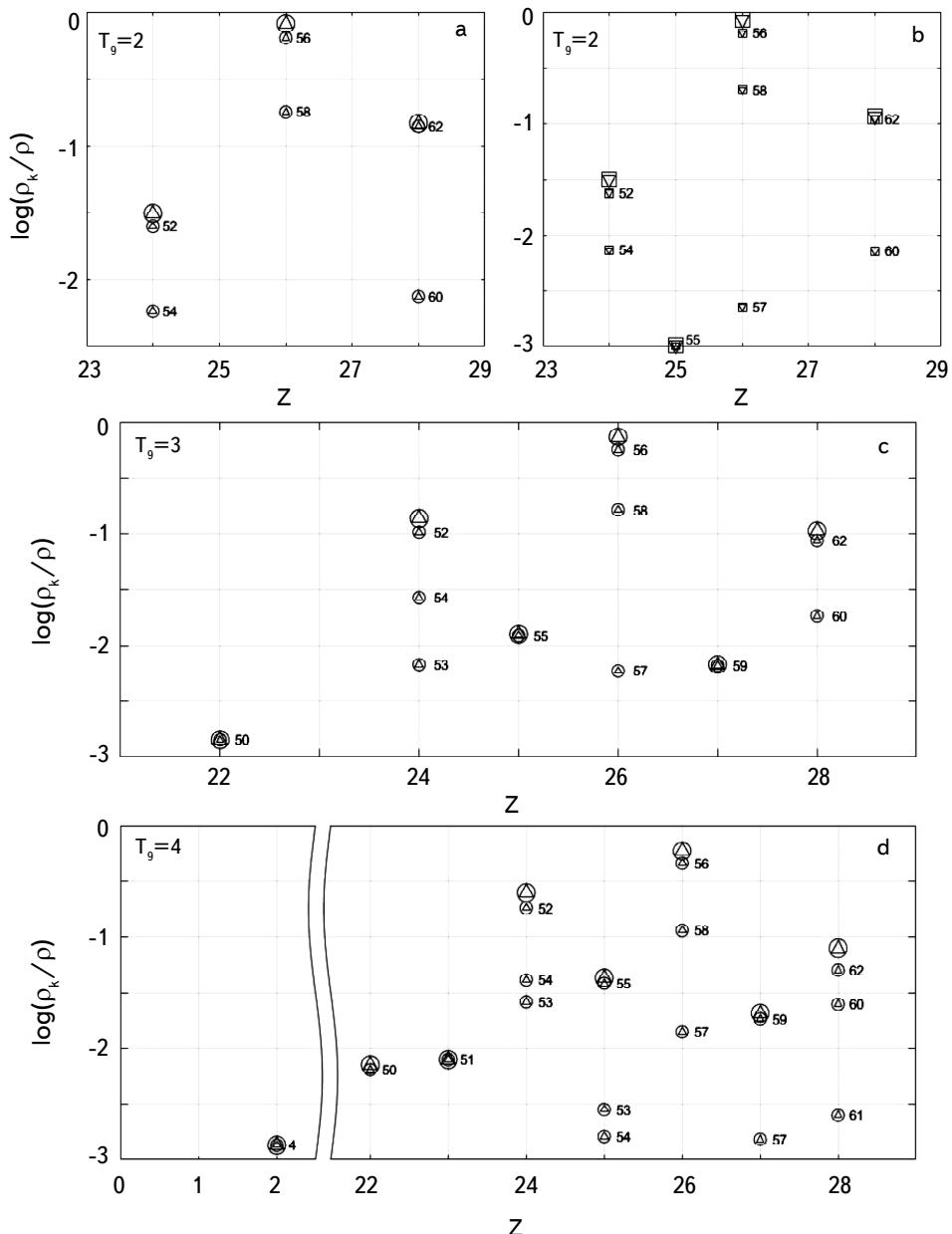


Рис.3. Состав ОНЗ; (а), (с), (д) - результаты текущей работы, (б) - работы [16].  $\log \rho = 6$  и  $T_g \in [2; 4]$ . Обозначения те же, что на рис.2.

$T_9 = 2, 3, \dots, 10$ . Значение параметра  $R$  при начальном распределении всегда берется 0.85 ( $Y_e \approx 0.46$ ), чтобы иметь возможность сравнить результаты с [16] для маленьких плотностей  $\log \rho = 4, 6, 8$ . В графики с результатами включены только 3 наиболее распространенных изотопа для каждого  $Z$ , массовая доля которых превышает 0.1%. Результаты вычислений отображены графически на рис.2-8. Почти совпадающие концентрации различных изотопов одного элемента

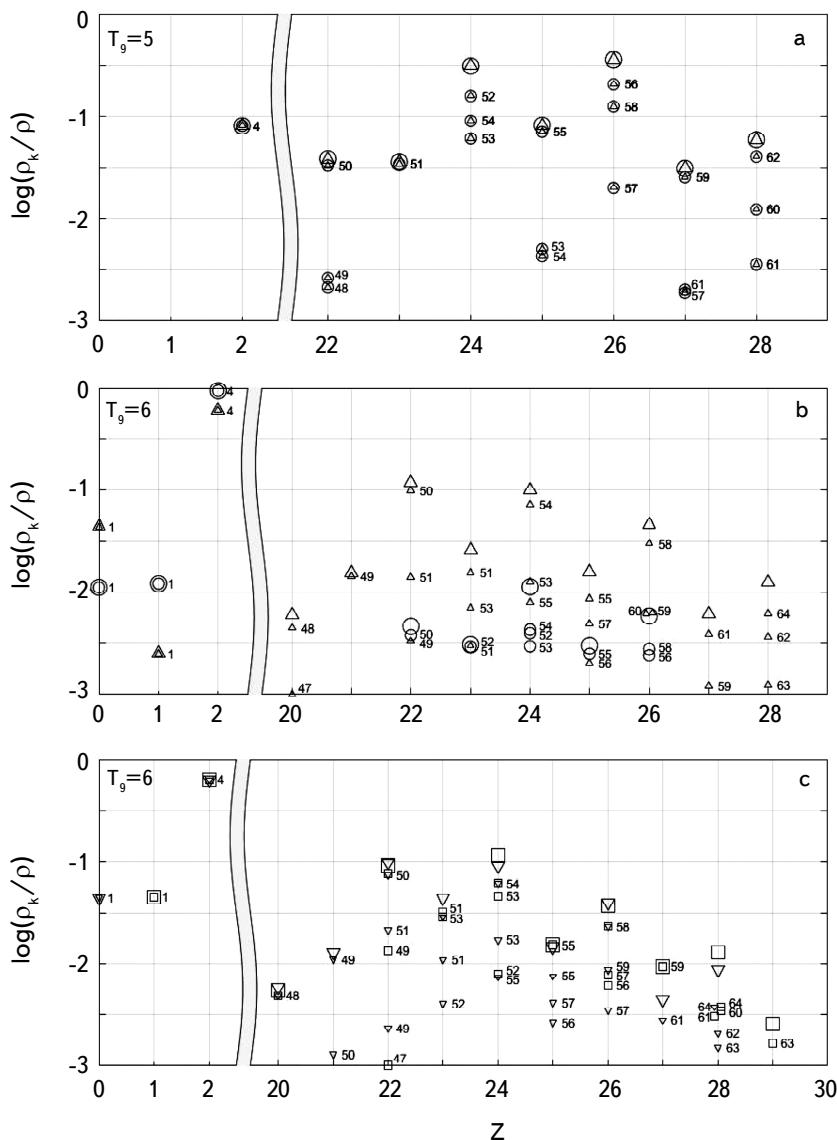


Рис.4. Состав ОНЗ; (a), (b) - результаты текущей работы, (c) - работы [16].  $\log \rho = 6$  и  $T_9 \in [5; 6]$ . Обозначения те же, что на рис.2.

раздвинуты по горизонтали.

При температурах ниже  $T_g = 4 - 5$  конечный состав почти не отличается от начального для всего диапазона взятых плотностей ввиду низкой скорости

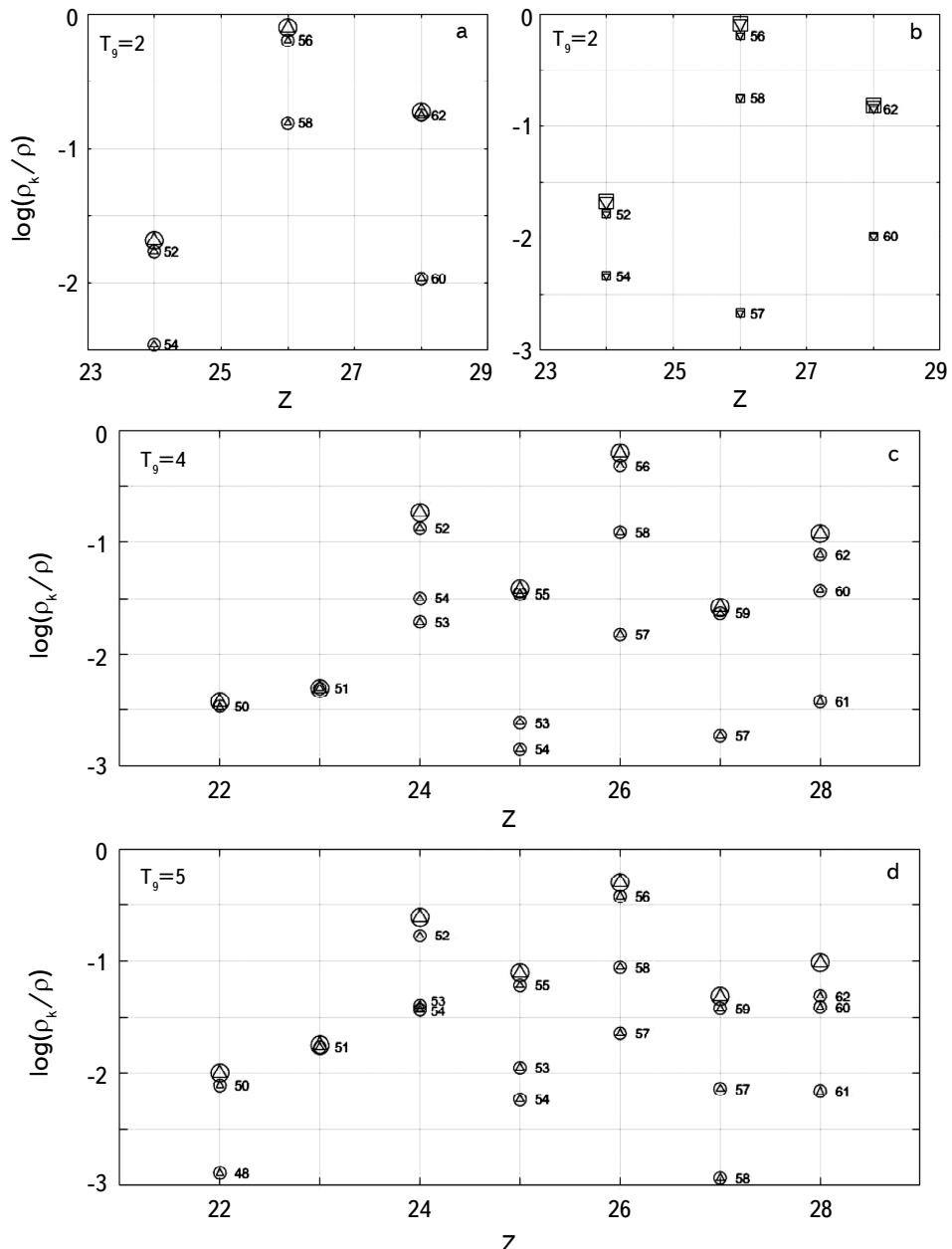


Рис.5. Состав ОНЗ; (a), (c), (d) - результаты текущей работы, (b) - работы [16].  
 $\log p = 8$  и  $T_g \in [2;5]$ . Обозначения те же, что на рис.2.

реакций (рис.2а, с, рис.3а, с, д, рис.4а, рис.5а, с, д). В работе [16], где использовалась КМ, также нет отличий в начальном и конечном составах при низких температурах (рис.2б, рис.3б, рис.5б). Стоит отметить качественное

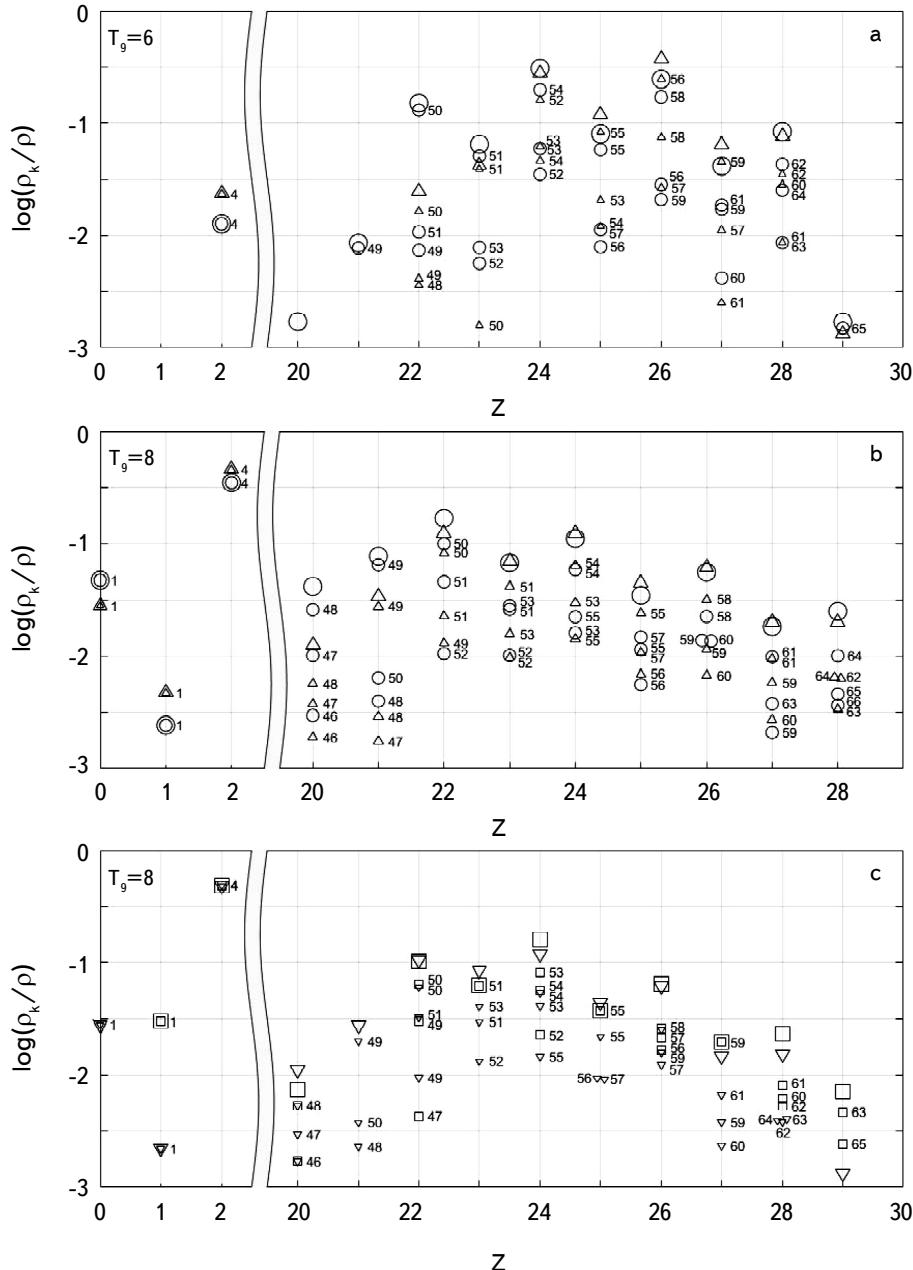


Рис.6. Состав ОНЗ; (а), (б) - результаты текущей работы, (с) - работы [16].  $\log \rho = 8$  и  $T_g \in [6; 8]$ . Обозначения те же, что на рис.2.

сходство с результатами [28], где на диаграмме 1 отображены области, на которых в зависимости от условий среды ( $\rho, T$ ) доминируют те или иные компоненты системы.

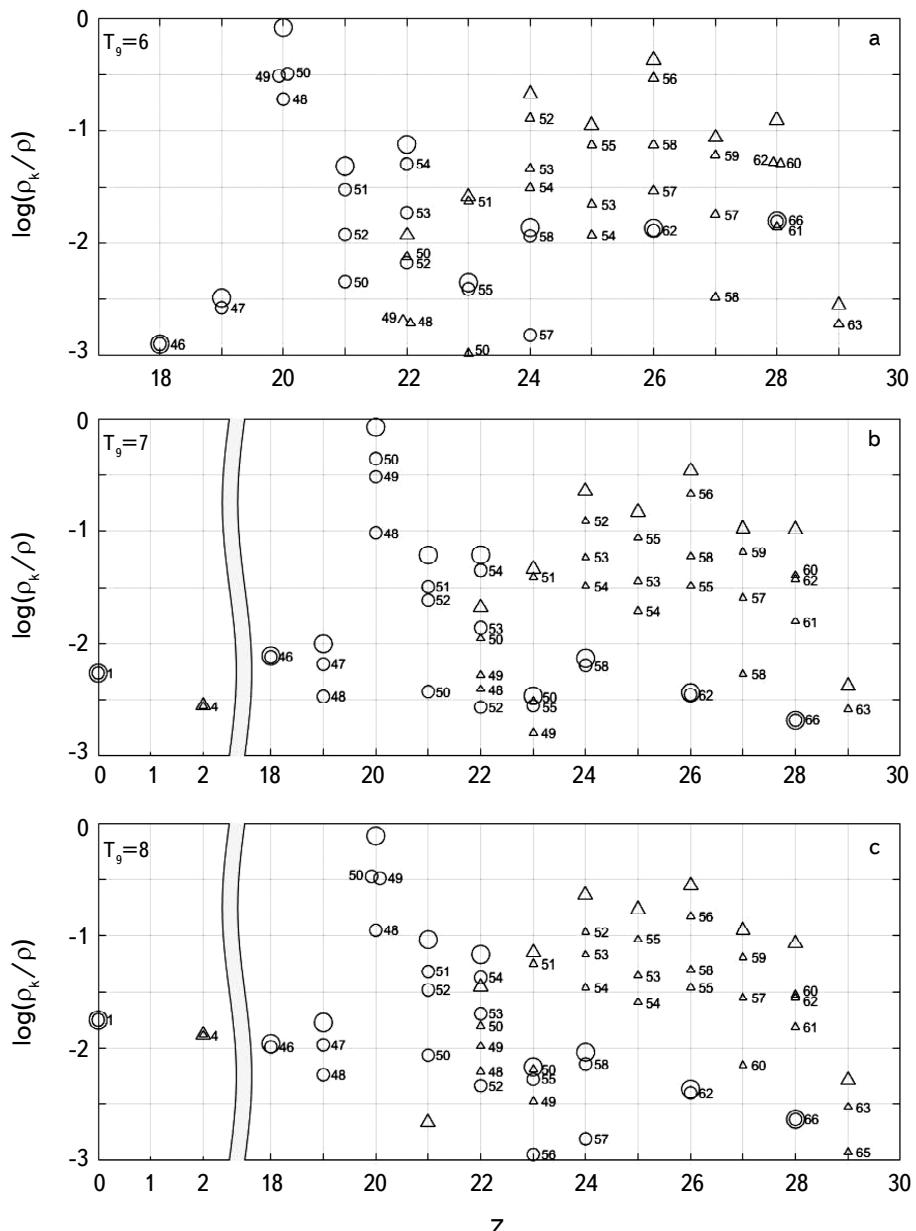


Рис.7. Состав ОН3; (а), (б), (с) - результаты текущей работы.  $\log p = 10$  и  $T_g \in [6; 8]$ . Обозначения те же, что на рис.2.

При высоких температурах и плотностях преобладает кальций (рис.6а, б, с) и рис.8а, б, с), вклад свободных нейтронов становится существенное. С ростом плотности электроны больше вырождаются  $T \ll T_d$  (здесь  $T_d$  - температура вырождения) и заполняют сферу Ферми [18], делая распад нейтрона запрещенным в силу принципа запрета Паули [21].

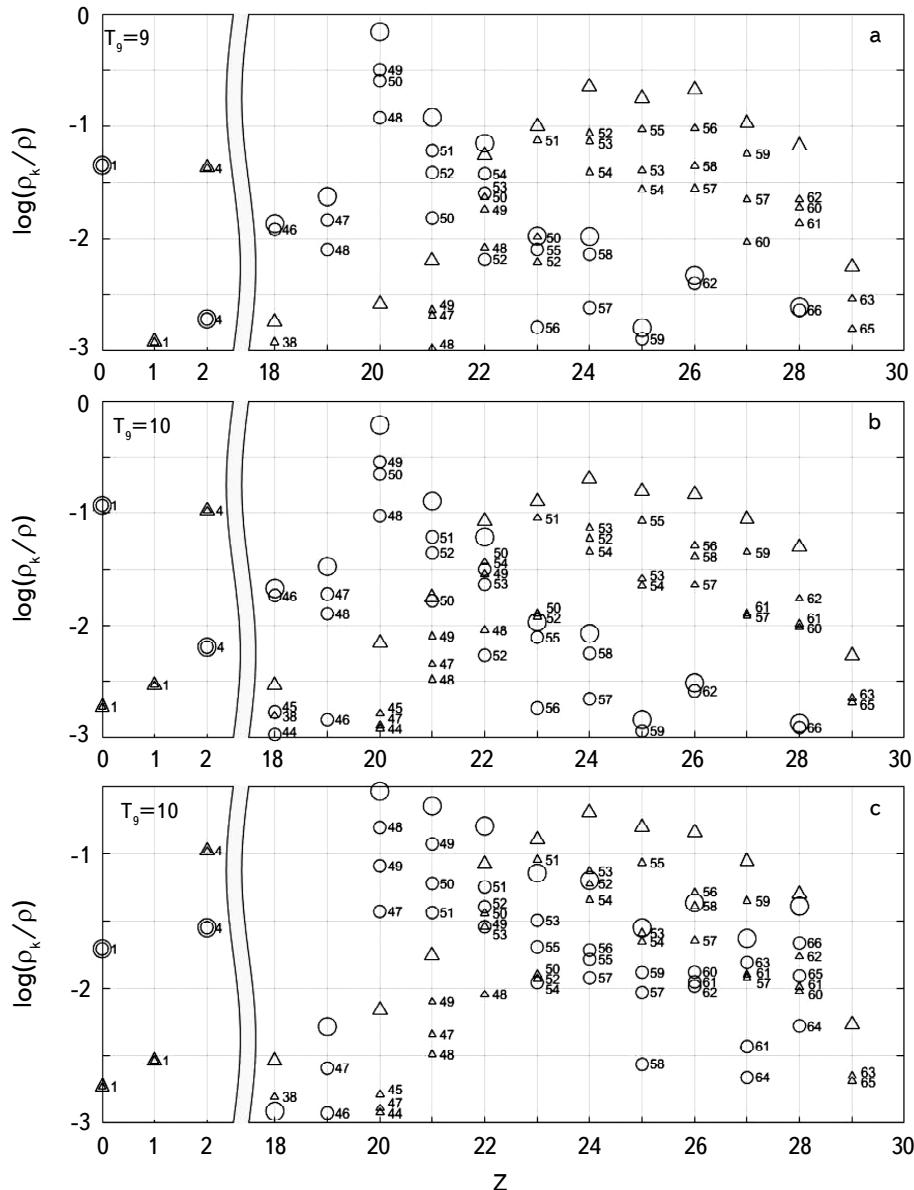


Рис.8. Состав ОНЗ; (а), (б), (с) - результаты текущей работы.  $\log \rho = 10$  и  $T_9 \in [9; 10]$ . Обозначения те же, что на рис.2.

Стоит иметь в виду, что при  $T_9 \geq 1$  НЗ быстро охлаждаются благодаря процессам (4). В таком случае результаты, полученные в этой работе в условиях высоких температур - некорректны. При быстром охлаждении постепенно и неодновременно закрываются различные каналы ядерных реакций: сначала исчезает процесс слияния тяжелых заряженных ядер (не учитываются в текущей работе), затем фотоотщепления протонов и нейтронов [7]. Нарушается ЯСР, в результате чего необходимо применять КМ для ядерных реакций вместо использования распределения Саха. Для сравнения построены рис.8б и с: одинаковые условия, время эволюции системы в случае (б) составляет 500 с, в случае (с) - 5 с. Как видно из графиков, химический состав существенно отличается. После нескольких секунд потерь энергии температура может упасть до тех значений, когда бета-реакции практически не меняют имеющийся состав. В итоге эволюция химического состава рис.8с пойдет по другому пути и распределение рис.8б не реализуется.

*5. Заключение.* В текущей работе исследовался химический состав ОНЗ при постоянных условиях среды в приближении ЯСР. Предложенная модель даже в статическом приближении неплохо описывает распространенность ядер. Однако, как было отмечено в предыдущей главе, охлаждение горячей НЗ из-за нейтринных потерь энергии может нарушить ЯСР и изменить траекторию эволюции системы (неодновременное закрытие различных каналов ядерных реакций).

Для того чтобы модифицировать статическую модель в динамическую, необходимо использовать КМ для учета реакций захвата нейтронов и протонов при падении температуры ниже значений  $T_9 = 3 - 5$ . Также нужен учет современных ядерных данных для вычисления реакций  $(n, \gamma)$ ,  $(p, \gamma)$  и обратных им реакций фотоотщеплений. Из-за неодновременного выключения различных типов реакций реализуется ситуация частичного равновесия, когда реакции с протонами практически отсутствуют, в то время как скорости реакций с нейтронами по-прежнему быстрее бета-реакций. В таких условиях необходимо использовать КМ для реакций с протонами, но считать, что реализовано равновесие по реакциям с нейтронами.

Автор благодарит Г.С.Бисноватого-Когана за постановку задачи, продолжительные обсуждения, ценные замечания и конструктивную критику. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-02-00455.

<sup>1</sup> Институт космических исследований, РАН,

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт, e-mail: Lirts@phystech.edu

# ON THE ISSUE OF THE FORMATION OF NON-EQUILIBRIUM LAYER OF NEUTRON STAR SHELL

A.Y.IGNATOVSKIY<sup>1,2</sup>

The chemical composition of the neutron star shell at high temperatures and densities is discussed. A model of nucleosynthesis based on the nuclear statistical equilibrium approximation is proposed. The investigation of the dependence of the nucleosynthesis results on the parameters of the medium in the static approximation is carried out. The results of the current work demonstrate a qualitative similarity with the earlier work of other authors. It is shown that the proposed model, even in the static approximation, describes well the abundance of nuclei.

**Keywords:** *nuclear astrophysics: nuclear statistical equilibrium*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *A.G.W.Cameron*, Space Sci. Rev., **15**, 1973.
2. *A.G.W.Cameron*, Astrophys. Space Sci., **82**, 123, 1982.
3. *P.A.Seeger, W.A.Fowler, D.D.Clayton*, Astrophys. J. Suppl., **11**, 121, 1965.
4. *E.M.Burbidge, G.R.Burbidge, W.A.Fowler et al.*, Reviews of modern physics, **29**, 547, 1957.
5. *I.V.Panov*, Physics of Atomic Nuclei, **79**, 159, 2016.
6. *I.V.Panov, H.-Th.Janka*, Astron. Astrophys., **494**, 829, 2009.
7. *G.S.Bisnovatyi-Kogan, V.M.Chechetkin*, Astrophys. Space Sci., **26**, 3, 1974.
8. *A.Arcones, F.-K.Thielemann*, Journal of Physics G, **40**, 2013.
9. *I.V.Panov, A.V.Yudin*, Astron. Lett., **46**, 552, 2020.
10. *C.Freiburghaus, S.Rosswog, F.-K.Thielemann*, Astrophys. J., **525**, 121, 1999.
11. *I.V.Panov, A.V.Yudin*, Physics of Atomic Nuclei, **82**, 403, 2019.
12. Г.С.Бисноватый-Коган, Релятивистская астрофизика и физическая космология, М., КРАСАНД, 2010.
13. *V.S.Imshennik, S.S.Filippov, A.M.Khokhlov*, Pis'ma Astron. Zh., **7**, 219, 1981.
14. *A.G.W.Cameron, J.J.Cowan, J.W.Truran*, Astrophys. Space Sci., **91**, 235, 1982.
15. *W.Hillebrandt*, Space Sci. Rev., **21**, 639, 1978.
16. *F.E.Clifford, R.J.Tayler*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **129**, 104, 1965.
17. Г.С.Бисноватый-Коган, Физические вопросы теории звездной эволюции, М., НАУКА, 1989.
18. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика: Статистическая физика часть 1, М., ФИЗМАТЛИТ, 2002.

19. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика: Теория поля, М., ФИЗМАТЛИТ, 2016.
20. Г.С.Бисноватый-Коган, В.М.Чечеткин, УФН, **127**, 263, 1979.
21. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика: Квантовая механика (нерелятивистская теория), М., ФИЗМАТЛИТ, 2002.
22. F.-K.Thielemann, I.V.Panov, S.I.Blinnikov, Astron. Lett., **27**, 239, 2001.
23. S.I.Blinnikov, I.V.Panov, Astron. Lett., **22**, 39, 1996.
24. K.Sato, Progress of theoretical physics, **62**, 1979.
25. B.Singh, J.L.Rodriguez, S.S.M.Wong et al., Nuclear Data Sheets, **84**, 487, 1998.
26. H.P.William, A.T.Saul, T.V.William et al., Numerical Recipes in Fortran, 77, Press Syndicate of the University of Cambridge, 1992.
27. G.S.Bisnovatyi-Kogan, Ya.M.Kazhdan, Soviet Astron., **10**, 604, 1967.
28. V.S.Imshennik, D.K.Nadezhin, Soviet Astron., **9**, 1154, 1966.