

МНОГОСЛОЙНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ЗВЕЗДНЫЕ СКОПЛЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ПЛОТНОСТИ

Г.С.БИСНОВАТЫЙ-КОГАН

Поступила 14 февраля 2021

Рассмотрены различные решения кинетического уравнения, определяющие равновесие гравитирующего шара однородной плотности с квадратичным гравитационным потенциалом и линейной зависимостью гравитационной силы от радиуса. Получены новые аналитические решения для однородного шара с полый сферой и центральной массой внутри шара. Получены также решения, состоящие из произвольного числа сферических слоев с одинаковой плотностью, но с разными равновесными функциями распределения.

Ключевые слова: *Шаровые скопления; квадратичный потенциал; равновесие*

1. Введение. Однородные скопления с квадратичным гравитационным потенциалом, в силу своей простоты, аналитически рассматривались многими авторами, см. [1-7]. Были получены решения для однородных цилиндрических моделей эллиптического сечения, эллипсоидальных фигур однородной плотности, а также эллиптических плоских дисков с распределением поверхностной $\sigma(x, y)$ плотности в виде

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}}. \quad (1)$$

Равновесие бесстолкновительных самогравитирующих скоплений определяется решением, следующим из бесстолкновительного кинетического уравнения Больцмана с самосогласованным гравитационным полем, определяемым уравнением Пуассона. Этот подход впервые был сформулирован Д.Джинсом для исследования звездных скоплений [8,9], и впоследствии был использован А.А.Власовым для исследования бесстолкновительной плазмы в электрических и магнитных полях [10]. Аналитические равновесные решения для круговых и эллиптических дисков были получены в работах [3,11,12]. Для равновесных цилиндров с круговым и эллиптическим сечением решения были получены в работах [1,12,13]. Для однородных эллипсоидов и сфероидов (эллипсоидов вращения) решения были получены в [2,12]. В последнем случае решение получено для случая, когда в направлениях, перпендикулярных оси симметрии сфероиды, гравитационное притяжение уравновешивается

центробежной силой, и полученное таким же способом решение для однородного шара не обладает сферической симметрией в пространстве скоростей. Первая сферически-симметричная в пространстве скоростей, равновесная модель скопления, состоящая из звезд, вращающихся по круговым орбитам, была построена в работе Эйнштейна [14], в рамках общей теории относительности, для произвольного сферически-симметричного распределения плотности, в том числе однородного. Устойчивость ньютоновского аналога однородной модели из круговых гравитирующих частиц исследована в работах [15,16]. Однородная модель, сферически-симметричная в пространстве скоростей, была построена в [17], а модель с радиальными орбитами была рассмотрена в [18]. В настоящей работе получены решения для однородного шара с некруговыми траекториями частиц, сохраняющих сферическую симметрию в фазовом пространстве, у которых в центре находится полая сфера. Получены также новые решения, состоящие из произвольного числа сферических слоев с одинаковой плотностью, но с разными равновесными функциями распределения.

2. Интегралы движения и траектории частиц. Кинетическое уравнение для функции распределения звезд стационарного, сферически-симметричного скопления $f(r, v_r, v_t)$ с постоянной плотностью ρ , в сферической системе координат $(r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi)$, записывается в виде [19]

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{v_t^2}{r} - \frac{Gm}{r^2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_t}{r} \frac{\partial f}{\partial v_t} = 0, \quad 2\pi \iint f dv_r v_t dv_t = \frac{\rho}{m}, \quad m = \frac{4\pi}{3} \rho r^3. \quad (2)$$

Здесь интегрирование ведется по ограниченной области фазового пространства и используются условия

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0, \quad v_t^2 = v_\theta^2 + v_\phi^2. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) является функцией двух интегралов движения, углового момента L и полной энергии E :

$$L = r v_t, \quad M = \frac{4\pi}{3} \rho r_0^3, \quad (4)$$

$$E = \frac{v_r^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} + \frac{2\pi}{3} G \rho r^2 - \frac{3GM}{2r_0} = \frac{v_r^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} + \frac{2\pi}{3} G \rho r^2 - \frac{3GM}{2r_0}.$$

Здесь обозначения M , ρ , r_0 - соответственно, определяют массу, плотность и радиус сферического скопления, два из которых задаются произвольно. В определении энергии E произвольная постоянная выбирается из условия непрерывности энергии на границе с вакуумом, где остается только обращающаяся в нуль на бесконечности гравитационная энергия $E_g = -GM/r$, равная $E_{g_0} = -GM/r_0$ на границе скопления. Зависимости звездных скоростей от

радиуса, при различных значениях интегралов E , L имеют вид

$$v_r^2 = 2 \left(E + \frac{3GM}{2r_0} - \frac{L^2}{2r^2} - \frac{2\pi}{3} G \rho r^2 \right) = 2 \left(E' - \frac{L^2}{2r^2} - \frac{2\pi}{3} G \rho r^2 \right),$$

$$v_t = \frac{L}{r}, \quad E' = E + \frac{3GM}{2r_0}. \quad (5)$$

В [20] получено решение для траектории движения частицы в гравитационном потенциале $\Phi = kr^2/2$. Замкнутые траектории движения являются эллипсами с центром в начале координат. Максимальное и минимальное значение радиуса траектории $r_{\pm}$ достигается при $v_r = 0$, определяемое из (5) в виде

$$r_{\pm}^2 = \frac{3E'}{4\pi G \rho} \pm \sqrt{\left(\frac{3E'}{4\pi G \rho} \right)^2 - \frac{3L^2}{4\pi G \rho}}. \quad (6)$$

Радиус максимального удаления частицы от центра r_+ , равный большей полуоси эллипса траектории, соответствует нулевой радиальной скорости v_r и минимуму тангенциальной скорости v_t , так что

$$r_+^2 = \frac{3E'}{4\pi G \rho} + \sqrt{\left(\frac{3E'}{4\pi G \rho} \right)^2 - \frac{3L^2}{4\pi G \rho}}, \quad v_{r_+} = 0, \quad v_{t_+} = \frac{L}{r_+}. \quad (7)$$

Соответственно, при минимальном радиусе удаления частицы от центра, равном меньшей полуоси эллипса траектории, радиальная скорость проходит через ноль, а тангенциальная - через свой максимум.

$$r_-^2 = \frac{3E'}{4\pi G \rho} - \sqrt{\left(\frac{3E'}{4\pi G \rho} \right)^2 - \frac{3L^2}{4\pi G \rho}}, \quad v_{r_-} = 0, \quad v_{t_-} = \frac{L}{r_-}. \quad (8)$$

Максимум радиальной скорости v_{rm} достигается на радиусе r_{vrm} , при равенстве нулю производной dv_r^2/dr . Из (5) имеем

$$r_{vrm}^2 = \left(\frac{3L^2}{4\pi G \rho} \right)^{1/2}, \quad v_{rm}^2 = 2 \left[E' - \left(\frac{4\pi G \rho}{3} L^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (9)$$

При равенстве нулю подкоренного выражения в (6)-(8) получаем равенство $r_+ = r_-$, что определяет круговую орбиту, для которой

$$r^2 = r_+^2 = r_-^2 = \frac{3E'}{4\pi G \rho}, \quad v_{r_-} = 0, \quad v_* = v_{t_+} = v_{t_-} = \frac{L}{r}, \quad E' = L \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}}. \quad (10)$$

С учетом (4), отсюда получаем скорость движения по кругу

$$v_* = \pm r \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}}, \quad (11)$$

когда центробежная сила уравнивает гравитацию шара внутри радиуса r . При $L=0$ все частицы движутся по радиусам, так что

$$\begin{aligned} v_t = 0, \quad v_r = \sqrt{2\left(E' - \frac{2\pi}{3}G\rho r^2\right)}; \quad v_r = 0 \quad \text{при} \\ r = r_0, \quad E' = \frac{2\pi}{3}G\rho r^2 = \frac{GM}{2r_0}, \quad E = -\frac{GM}{r_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

3. Аналитические сферически-симметричные решения для шара.

3.1. *Однородный шар.* Функция распределения для однородного шара Эйнштейна с радиусом r_0 записана в [16] в виде

$$f = \frac{\rho}{\pi m} \delta(v_r) \delta\left(v_t^2 - \frac{4\pi G\rho}{3}r^2\right), \quad r \leq r_0. \quad (13)$$

Используя интегралы движения (4), (5) для шара с радиусом r_0 , решение можно записать в виде

$$f = \frac{\rho}{\pi m} \delta\left(2E' \pm 2L\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}\right) = \frac{\rho}{\pi m} \delta\left[v_r^2 + \left(v_t \pm \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}r\right)^2\right]. \quad (14)$$

В работе [17] рассмотрена функция распределения однородного шара, сферически-симметричная в фазовом пространстве, в виде

$$f = \frac{\rho}{\pi^2 m \Omega^2} \frac{\theta\left(\frac{L^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2} - E'\right)}{\sqrt{L^2 + \Omega^2 - 2E'}} = \frac{\rho}{\pi^2 m} \frac{\theta\left[(1-r^2)(1-v_t^2) - v_r^2\right]}{\sqrt{(1-r^2)(1-v_t^2) - v_r^2}}. \quad (15)$$

Здесь $\theta(x)$ - функция Хевисайда, равная единице при положительном, и нулю при отрицательном значении аргумента. В последнем выражении (15) положено $\Omega^2 = 4\pi G\rho/3 = 1$, и $2E' = v_r^2 + v_t^2 + \Omega^2 r^2 = v_r^2 + v_t^2 + r^2$. Выражение для плотности записывается в виде

$$\rho = \pi m \iint f dv_r dv_t^2 = \frac{\rho}{\pi} \iint \frac{\theta\left[(1-r^2)(1-v_t^2) - v_r^2\right]}{\sqrt{(1-r^2)(1-v_t^2) - v_r^2}} dv_r dv_t^2. \quad (16)$$

Пределы интегрирования по фазовому пространству определяются условием положительности аргумента функции $\theta(x)$. При этом условии после интегрирования по dv_t^2 и dv_r получаем [21]

$$\int_0^{1-v_r^2/(1-r^2)} \frac{d v_t^2}{\sqrt{(1-r^2)(1-v_t^2) - v_r^2}} = 2 \frac{\sqrt{1-r^2-v_r^2}}{1-r^2},$$

$$\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} d v_r \frac{\sqrt{1-r^2-v_r^2}}{1-r^2} = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

Таким образом, в выражении для ρ получаем тождество в (15), что подтверждает самосогласованность выбора функции распределения (15).

Функцию распределения для однородного шара с чисто радиальными орбитами можно записать в виде [18]

$$f = \frac{\rho}{\pi^2 m} \frac{\delta(v_t^2)}{\sqrt{-2E' + \frac{GM}{r_0}}} = \frac{\rho}{\pi^2 m} \frac{\delta(v_t^2)}{\sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}(r_0^2 - r^2) - v_r^2}}. \quad (18)$$

3.2. Шар с вырезанным ядром. Если все частицы имеют угловой момент L , то минимальное расстояние частицы от центра составляет $r_{min} = L/v_{t-}$, поэтому внутри такого шара образуется пустая сфера данного радиуса. Если плотность вещества вокруг этой сферы однородна, легко найти аналитически траектории частиц, летающих вне пустой сферы. Однако наличие пустой сферы приводит к отклонениям от квадратичной зависимости гравитационного потенциала в веществе, где траектории частиц становятся незамкнутыми. В таких условиях не удастся получить аналитического решения. Чтобы сохранить квадратичную зависимость и получить аналитическое решение для равновесного сферически-симметричного скопления, поместим в центр скопления тело, образованное при сжатии в точку массы $M_c = 4\pi\rho r_{min}^3/3$, равной массе однородного шара с радиусом войда, и с плотностью скопления. В этом случае гравитация в веществе вокруг поллой сферы будет такой же, как и в случае полностью однородного шара и соотношения (4)-(13) остаются справедливыми при $r \geq r_{min}$.

Рассмотрим однородный шар радиуса r_0 с поллой сферой в центре с радиусом r_1 . Такая конфигурация возникает из скопления тел, движущихся по одинаковым эллипсам вокруг центра шара, у которых малая и большая полуоси эллипса r_1 и r_0 равны, соответственно, r_- и r_+ , определенных в (7) и (8). При заданных r_1 и r_0 находим интегралы движения частиц E' и L в виде

$$E'_0 = \frac{2\pi G \rho}{3}(r_0^2 + r_1^2), \quad L_0 = \frac{4\pi G \rho}{3} r_0^2 r_1^2. \quad (19)$$

Функция распределения однородного шара с вакуумной сферой в центре (см. рис.1), имеет вид

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\rho}{\pi^2 m} \frac{\delta\left(v_t^2 - \frac{L_0^2}{r^2}\right)}{\sqrt{2E'_0 - 2E'}} = \frac{\rho}{\pi^2 m} \frac{\delta\left(v_t^2 - \frac{4\pi G \rho}{3} \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right)}{\sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3} (r_0^2 + r_1^2) - v_r^2 - v_t^2 - \frac{4\pi G \rho}{3} r^2}} \\
 &= \frac{\rho}{\pi^2 m} \frac{\delta\left(v_t^2 - \frac{4\pi G \rho}{3} \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right)}{\sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3} \left(r_0^2 + r_1^2 - r^2 - \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right) - v_r^2}}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Решение (20) является обобщением решения (18) для чисто радиальных орбит на случай частиц с ненулевым угловым моментом: при $L_0 = r_1 = 0$ из (20) следует решение (18).

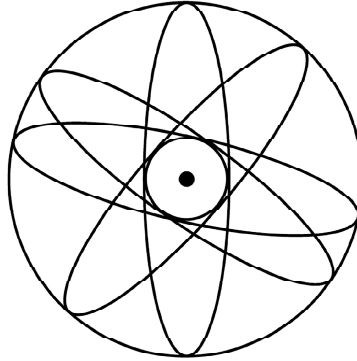


Рис.1. Схематическая фигура шара с полым ядром и центральным центром тяготения (например, сверхмассивная черная дыра) и траекториями частиц в виде одинаковых эллипсов с центрами в начале координат¹.

3.3. Многослойный шар однородной плотности. С помощью решений (18) и (20) можно построить более сложную равновесную модель шара однородной плотности, состоящего из нескольких слоев с различными функциями распределения. В центре шара с полым ядром вместо центральной тяготеющей массы можно поместить шар с радиальными орбитами и получить решение в виде

$$f = \frac{\rho}{\pi^2 m} \frac{\delta(v_t^2)}{\sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3} (r_1^2 - r^2) - v_r^2}} \quad \text{при } r \leq r_1; \tag{21}$$

¹ Данный рисунок сделал О.Ю.Цупко, которому автор выражает свою искреннюю благодарность.

$$f = \frac{\rho}{\pi^2 m} \frac{\delta \left(v_t^2 - \frac{4\pi G \rho}{3} \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right)}{\sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3} \left(r_1^2 + r_2^2 - r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - v_r^2}} \quad \text{при } r_1 \leq r \leq r_2. \quad (22)$$

Этот шар можно окружить еще одним слоем вещества с функцией распределения (22), в которой вместо границ слоя (r_1, r_2) , задать границы (r_2, r_3) . Таким же способом можно получить многослойную модель шара, где каждый слой определяется функцией распределения типа (22) и заданной толщиной $(r_{i+1} - r_i)$, где $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_0$, r_0 - внешняя граница шара однородной плотности.

В центральной области многослойного шара, наряду с конфигурацией с радиальными орбитами (18), может располагаться шар с круговыми орбитами (13), а также шар с более сложной функцией распределения (15). Вместо любого шарового слоя при $r_k < r < r_{k+1}$ с функцией распределения (20), может располагаться слой с круговыми орбитами и функцией распределения (13).

4. Обсуждение. Решения кинетического уравнения для однородного шара из гравитирующих частиц (звезд) были получены различными авторами, многие из которых рассматривали функции распределения, не имеющие сферической симметрии [2,5,6]. Рассматривались также три типа моделей со сферически-симметричной функцией распределения: модель с круговыми орбитами [14], модель с радиальными орбитами [18] и модель более общего типа [17]. В настоящей работе получены новые решения для однородного шара, имеющие в центре полую сферу с центральной тяготеющей массой, что может имитировать область галактического ядра со сверхмассивной черной дырой в центре. Полученные решения описывают модель с эллиптическими траекториями, промежуточную между моделью с радиальными ($L = 0$) и круговыми ($v_r = 0$) траекториями. На основе этих решений получаем многослойную сферическую модель однородной плотности как с полым, так и с заполненным ядром, с различными функциями распределения в ядре и в отдельном слое, которые должны принадлежать одному из четырех, указанных выше, базовых решений.

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ 20-02-000455.

Институт космических исследований РАН, Москва,
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва,
Московский физико-технический институт МФТИ, Долгопрудный,
e-mail: gkogan@iki.rssi.ru

MULTILAYER SPHERICAL STELLAR CLUSTERS WITH UNIFORM DENSITY

G.S.BISNOVATYI-KOGAN

Solutions of the kinetic equations are presented which describe equilibrium of a gravitating uniform sphere with a quadratic gravitational potential, and linear radial dependence of a gravitational force. New solutions are obtained for a uniform sphere with an empty spherical space and central point mass inside. We obtain also solutions describing a sphere, consisting of spherical layers at the same density, but with different equilibrium distribution functions.

Keywords: *spherical clusters: quadratic potential: equilibrium*

ЛИТЕРАТУРА

1. K.C.Freeman, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **133**, 47, 1966.
2. K.C.Freeman, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **134**, 1, 1966.
3. K.C.Freeman, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **134**, 15, 1966.
4. C.Hunter, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **166**, 633, 1974.
5. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович, Динамика и эволюция звездных систем, М.-Л. Наука, с.138, 1975.
6. В.Л.Поляченко, А.М.Фридман, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, М., Наука, 1976.
7. Б.П.Кондратьев, Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур, М., Наука, 1989.
8. J.H.Jeans, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **76**, 70, 1915.
9. J.H.Jeans, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **76**, 567, 1916.
10. А.А.Власов, ЖЭТФ, **8**, 291, 1938.
11. C.Hunter, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **126**, 299, 1963.
12. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович, Астрофизика, **6**, 387, 1970, (Astrophysics, **6**, 207, 1970).
13. Г.С.Бисноватый-Коган, Астрофизика, **7**, 121, 1971, (Astrophysics, **7**, 70, 1971).
14. A.Einstein, Annals of Mathematics, Second Series, **40**, 922, 1939.
15. А.М.Михайловский, А.М.Фридман, Я.Г.Эпельбаум, ЖЭТФ, **59**, 1608, 1970.
16. Г.С.Бисноватый-Коган, Астрофизика, **7**, 223, 1971, (Astrophysics, **7**, 127, 1971).
17. В.Л.Поляченко, И.Г.Шухман, Астрон. ж., **50**, 721, 1973, (Sov. Astron., **17**, 460, 1974).
18. В.Л.Поляченко, Астрофизика, **27**, 295, 1987, (Astrophysics, **27**, 512, 1987).
19. G.L.Samt, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **112**, 155, 1952.
20. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Механика, М., Физматгиз, 1965.
21. I.S.GradshTEyn, I.M.Ryzhik, Table of integrals, series and products, New York: Academic Press, ed. by Yu.V.Geronimus, M.Yu.Tseytlin, (4th ed.), 1965.