

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛИНИЙ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЯНИИ: ЛОРЕНЦЕВСКИЙ ПРОФИЛЬ

В.М.ЛОСКУТОВ, В.В.ИВАНОВ

Поступила 29 декабря 2006

Рассматривается многократное резонансное рассеяние излучения спектральной линии в атмосфере с равномерно распределенными в ней источниками неполяризованного излучения. Принимается, что профиль коэффициента поглощения лоренцевский и рассеяние происходит с полным перераспределением по частотам. Путем итеративного решения матричного нелинейного интегрального уравнения типа уравнения Амбарцумяна - Чандрасекара рассчитаны поляризационные характеристики выходящего излучения. В частности, найдено, что при чистом рассеянии предельная поляризация на краю диска составляет 5.421%. Дано сопоставление поляризационных характеристик выходящего излучения при трех различных профилях коэффициента поглощения - лоренцевском, доплеровском и прямоугольном (монохроматическое рассеяние).

Ключевые слова: *перенос излучения: поляризация: спектральные линии*

1. *Введение.* В статьях [1] и [2] была разработана аналитическая теория образования поляризованных линий в полубесконечных атмосферах за счет многократного резонансного рассеяния. Использовалось приближение полного перераспределения по частотам (ППЧ) внутри линии. В этих работах была разработана общая теория, применимая при произвольном коэффициенте поглощения в линии. Однако особое внимание было уделено важнейшему случаю доплеровского профиля, для которого теория была не только сильно детализирована по сравнению с общим случаем, но и доведена до числа. В частности, для случая доплеровского коэффициента поглощения было рассчитано изменение поляризации по диску и найдено предельное значение степени поляризации на краю диска звезды с чисто рассеивающей атмосферой (9.443%).

Настоящая работа фактически является продолжением этого цикла статей. Ее цель - детализировать и довести до числа развитую ранее теорию для коэффициента поглощения другого важнейшего частного вида - лоренцевского.

Отметим, что подход, близкий к развитому в наших работах [1,2], был использован затем Фриш [3,4] при изучении влияния эффекта Ханле на поляризационные параметры выходящего из атмосферы излу-

чения. Эти вопросы также подробно разбираются в монографиях [5,6].

Как известно, приближение ППЧ достаточно хорошо описывает перенос излучения в ядре линии (причем не только интенсивность, но и поляризацию). С крыльями линии положение гораздо сложнее. Однако, как мы постараемся показать в настоящей работе, рассмотрение ППЧ-поляризации, возникающей при лоренцевском профиле, интересно не только как еще один пример случая, когда многие существенные результаты удастся получить путем не слишком сложных расчетов, к тому же проводимых по хорошо зарекомендовавшей себя ранее методике. Выясняется, что сравнение результатов, полученных для лоренцевского профиля, с тем, что было найдено ранее для доплеровского случая, позволяет предложить новый вариант представления результатов поляризационных расчетов, который может оказаться полезным и для гораздо более сложного случая рассеяния с ЧПЧ.

Содержание настоящей работы следующее. Сначала дается сводка тех результатов развитой в [1,2] общей теории, на которых построены расчеты. В их основе лежит матричное нелинейное интегральное уравнение, обобщающее известное уравнение Амбарцумяна-Чандрасекара. Его решение позволяет находить вектор Стокса выходящего излучения без расчета поля излучения внутри атмосферы. Затем детализируется вид тех матричных функций, которые фигурируют в этом нелинейном уравнении. После этого для важнейшего случая консервативной атмосферы приводится результат численного решения основного матричного уравнения и дается сводка асимптотических формул, описывающих поведение решения при больших значениях аргумента (чему физически соответствуют далекие крылья линии). Вывод этих асимптотик вынесен в обширное *Приложение*. Далее обсуждаются представленные на ряде рисунков данные о поляризации резонансного излучения, выходящего из изотермической атмосферы. Приводится и кратко обсуждается предельная поляризация в лоренцевской линии на краю диска (5.421% для консервативной атмосферы). Предлагается новый способ представления данных о ходе поляризации по диску звезды, при котором поляризация рассматривается не как функция частоты, а как функция значения коэффициента поглощения. В конце статьи дается краткая сводка полученных результатов.

2. Основные формулы. Будем рассматривать стандартную задачу о резонансном рассеянии излучения спектральной линии в полубесконечной рассеивающей атмосфере с равномерным распределением первичных источников (подробнее см. [1,2]). По симметрии задачи поле излучения не зависит от азимута и поэтому все встречающиеся ниже вектора имеют размерность 2, а матрицы - 2×2 . Примем, что

для матричной функции перераспределения $R(x, \mu, x', \mu')$, описывающей преобразование параметров Стокса I, Q при элементарном акте рассеяния и отнесенных к системе координат, определяемой нормалью к атмосфере, можно использовать приближение полного перераспределения по частотам (введенное для задач с поляризацией в [7])

$$R(x, \mu, x', \mu') = \phi(x)\phi(x')P(\mu, \mu'). \quad (1)$$

Аргументами здесь служат безразмерная частота излучения x , отсчитанная от центра линии и измеренная в подходящих характерных ширинах, и угловая переменная μ - косинус зенитного угла (для падающего излучения - со штрихами, для рассеянного - без штрихов). Функция $\phi(x)$ - профиль коэффициента поглощения, $P(\mu, \mu')$ - не зависящая от азимута компонента фазовой матрицы. Она допускает факторизацию

$$P(\mu, \mu') = A(\mu)A^T(\mu'), \quad (2)$$

где

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{W}{8}}(1 - 3\mu^2) \\ 0 & \sqrt{\frac{W}{8}}3(1 - \mu^2) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь W - коэффициент деполаризации, определяемый квантовыми числами нижнего и верхнего уровней, при переходах между которыми возникает линия ($0 \leq W \leq 1$). При $W=0$ поляризации нет (скалярный случай), $W=1$ - так называемое дипольное рассеяние, когда поляризационные эффекты максимальны. Что же касается профиля коэффициента поглощения $\phi(x)$, то, как уже говорилось, он считается лоренцевским, т.е. принимается, что

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}. \quad (4)$$

Его нормировка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1. \quad (5)$$

Мы не будем приводить вывод и обсуждение основных соотношений, которые нам потребуются, а дадим их в готовом виде. Они заимствованы из наших работ [1,2], прямым продолжением которых является настоящая статья.

Пусть $i(\mu, x)$ есть вектор Стокса выходящего излучения: $i = (I, Q)^T$. Он следующим образом выражается через матрицу $I(z)$ - матричное обобщение H -функции Амбарцумяна-Чандрасекара:

$$i(\mu, x) = A(\mu)I\left(\frac{\mu}{\phi(x)}\right)e, \quad \mu > 0, \quad (6)$$

где вектор $\mathbf{e}$ описывает поляризацию первичных источников. Если их излучение не поляризовано, то $\mathbf{e} = (1, 0)^T$. Матрица $\mathbf{I}(z)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$\mathbf{I}(z) \left(\epsilon^{1/2} + \int_0^\infty \mathbf{I}^T(z') \mathbf{G}(z') \frac{z' dz'}{z + z'} \right) = \mathbf{E}. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{E}$ - единичная матрица,

$$\epsilon^{1/2} = \text{diag}(\epsilon_I^{1/2}, \epsilon_Q^{1/2}), \quad (8)$$

где $\epsilon_I = 1 - \lambda_I$, $\epsilon_Q = 1 - \lambda_Q$, а λ_I - обычное альbedo однократного рассеяния и $\lambda_Q = (7W/10)\lambda_I$. Наконец, матрица $\mathbf{G}(z)$ выражается через так называемую характеристическую матрицу

$$\Psi(\mu) \equiv \frac{\lambda_I}{2} \mathbf{A}^T(\mu) \mathbf{A}(\mu) \quad (9)$$

следующим образом:

$$\mathbf{G}(z) = 2 \int_{x(z)}^\infty \phi^2(y) \Psi(z \phi(y)) dy, \quad (10)$$

где функция $x(z)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} x(z) &= 0, & |z| \leq 1/\phi(0), \\ \phi(x(z)) &= 1/|z|, & |z| > 1/\phi(0). \end{aligned} \quad (11)$$

Матрицы $\Psi(\mu)$ и $\mathbf{G}(z)$ симметричные.

3. *Матрица $\mathbf{G}(z)$.* При лоренцевском профиле имеем

$$\begin{aligned} x(z) &= 0, & |z| \leq \pi, \\ x(z) &= \sqrt{\frac{|z|}{\pi}}, & |z| > \pi. \end{aligned} \quad (12)$$

Простой в принципе, но громоздкий расчет по формуле (10) для элементов лоренцевской матрицы $\mathbf{G}(z)$ дает

$$\frac{2}{\lambda_I} G_{11}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, \\ \frac{1}{\pi^2} F_0(u); \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{2}{\lambda_I} G_{12}(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{W}{8}} \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{15}{8} \bar{z}^2 \right), \\ \sqrt{\frac{W}{8}} \frac{1}{\pi^2} \left\{ F_0(u) - \frac{15}{8} \bar{z}^2 F_1(u) \right\}; \end{cases} \quad (14)$$

$$\frac{2}{\lambda_I} G_{22}(z) = \begin{cases} \frac{W}{4} \frac{1}{2\pi} \left(5 - \frac{15}{2} \bar{z}^2 + \frac{567}{128} \bar{z}^4 \right), \\ \frac{W}{4} \frac{1}{\pi^2} \left(5 F_0(u) - \frac{15}{2} \bar{z}^2 F_1(u) + \frac{567}{128} \bar{z}^4 F_2(u) \right), \end{cases} \quad (15)$$

где обозначено $\bar{z} = z/\pi$ и $u = 1/\sqrt{\bar{z}}$ и в каждом из двух стоящих справа после фигурной скобки выражений верхнее относится к $z \leq \pi$, а нижнее - к $z > \pi$. Функции $F_i(u)$, $i = 0, 1, 2$, таковы:

$$F_0(u) = \arcsin u - u \sqrt{1-u^2}, \quad (16)$$

$$F_1(u) = \arcsin u - u \sqrt{1-u^2} \left(1 + \frac{2}{3} u^2 + \frac{8}{15} u^4 \right), \quad (17)$$

$$F_2(u) = \arcsin u - u \sqrt{1-u^2} \left(1 + \frac{2}{3} u^2 + \frac{8}{15} u^4 + \frac{16}{35} u^6 + \frac{128}{315} u^8 \right). \quad (18)$$

При $u < 1$, т.е. при $z > \pi$, функции F_i разлагаются в ряды

$$F_0(u) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{u^{2n+3}}{(2n+3)!!}, \quad (19)$$

$$F_1(u) = \frac{16}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{u^{2n+7}}{(2n+7)!!}, \quad (20)$$

$$F_2(u) = \frac{256}{63} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{u^{2n+11}}{(2n+11)!!}. \quad (21)$$

Для дальнейшего существенно, что элементы матрицы $G(z)$ при $z \rightarrow \infty$ имеют одинаковый порядок малости, именно, $O(z^{-3/2})$. Отметим также, что элемент $G_{11}(z)$ связан с G -функцией соответствующей скалярной задачи, изученной в [8], §2.7, соотношением $G_{11}(z) = (\lambda_I/2\pi) G(z/\pi)$.

4. *Матрица $I(z)$* . Согласно (6), для определения вектора Стокса выходящего излучения достаточно найти матрицу $I(z)$. Ее численные значения получаются путем итеративного решения нелинейного интегрального уравнения (7). Мы следовали той схеме, которая описана в [2]. Отличие состояло лишь в использовании несколько иной квадратурной формулы, что позволило при одинаковой задаваемой погрешности существенно уменьшить число узлов квадратуры и число итераций.

Ограничимся случаем дипольного рассеяния ($W=1$), при котором поляризация наиболее заметна. Значения элементов матрицы $I(z)$ для консервативного рассеяния ($\lambda_I=1$) даны в табл.1.

Сравним качественное поведение элементов I -матрицы при лоренцевском профиле и при двух других изученных ранее профилях - доплеровском (см. табл.2 в [2]) и прямоугольном (табл.1 в [9]). Элемент

МАТРИЦА $I(z)$ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНОГО ДИПОЛЬНОГО
($W = 1$) РАССЕЯНИЯ

z	I_{11}	I_{12}	I_{21}	I_{22}
0.0E+00	9.98742E-01	5.01396E-02	-5.01396E-02	9.98742E-01
1.0E-01	1.03737E+00	6.06678E-02	-4.33375E-02	1.03552E+00
2.0E-01	1.06596E+00	6.72242E-02	-3.92986E-02	1.05952E+00
3.0E-01	1.09093E+00	7.24224E-02	-3.61773E-02	1.07909E+00
4.0E-01	1.11362E+00	7.67928E-02	-3.36063E-02	1.09594E+00
5.0E-01	1.13463E+00	8.05815E-02	-3.14170E-02	1.11085E+00
6.0E-01	1.15433E+00	8.39304E-02	-2.95131E-02	1.12428E+00
7.0E-01	1.17294E+00	8.69313E-02	-2.78326E-02	1.13654E+00
8.0E-01	1.19065E+00	8.96484E-02	-2.63328E-02	1.14782E+00
9.0E-01	1.20756E+00	9.21285E-02	-2.49824E-02	1.15829E+00
1.0E+00	1.22378E+00	9.44075E-02	-2.37577E-02	1.16806E+00
1.2E+00	1.25442E+00	9.84681E-02	-2.16159E-02	1.18584E+00
1.4E+00	1.28304E+00	1.01995E-01	-1.97999E-02	1.20170E+00
1.6E+00	1.30996E+00	1.05101E-01	-1.82373E-02	1.21603E+00
1.8E+00	1.33541E+00	1.07865E-01	-1.68769E-02	1.22908E+00
2.0E+00	1.35960E+00	1.10348E-01	-1.56809E-02	1.24106E+00
2.5E+00	1.41543E+00	1.15599E-01	-1.32387E-02	1.26728E+00
3.0E+00	1.46588E+00	1.19836E-01	-1.13620E-02	1.28942E+00
3.5E+00	1.51206E+00	1.23350E-01	-9.87656E-03	1.30852E+00
4.0E+00	1.55475E+00	1.26325E-01	-8.67358E-03	1.32528E+00
5.0E+00	1.63179E+00	1.31119E-01	-6.85081E-03	1.35352E+00
6.0E+00	1.70014E+00	1.34844E-01	-5.54311E-03	1.37666E+00
8.0E+00	1.81807E+00	1.40328E-01	-3.81279E-03	1.41287E+00
1.0E+01	1.91820E+00	1.44231E-01	-2.73888E-03	1.44043E+00
1.2E+01	2.00571E+00	1.47191E-01	-2.02091E-03	1.46242E+00
1.4E+01	2.08374E+00	1.49534E-01	-1.51521E-03	1.48056E+00
1.6E+01	2.15437E+00	1.51450E-01	-1.14498E-03	1.49590E+00
1.8E+01	2.21903E+00	1.53056E-01	-8.65715E-04	1.50912E+00
2.0E+01	2.27877E+00	1.54427E-01	-6.50019E-04	1.52068E+00
2.5E+01	2.41130E+00	1.57138E-01	-2.86452E-04	1.54430E+00
3.0E+01	2.52576E+00	1.59171E-01	-6.91454E-05	1.56269E+00
4.0E+01	2.71806E+00	1.62075E-01	1.59858E-04	1.58997E+00
5.0E+01	2.87743E+00	1.64097E-01	2.64580E-04	1.60966E+00
6.0E+01	3.01455E+00	1.65613E-01	3.15378E-04	1.62479E+00
8.0E+01	3.24411E+00	1.67782E-01	3.50072E-04	1.64694E+00
1.0E+02	3.43386E+00	1.69295E-01	3.50609E-04	1.66271E+00
2.0E+02	4.09465E+00	1.73198E-01	2.82382E-04	1.70443E+00
5.0E+02	5.16059E+00	1.76914E-01	1.64764E-04	1.74500E+00
1.0E+03	6.14323E+00	1.78920E-01	9.95747E-05	1.76698E+00
2.0E+03	7.31002E+00	1.80413E-01	5.72950E-05	1.78325E+00
5.0E+03	9.19586E+00	1.81805E-01	2.62558E-05	1.79827E+00
1.0E+04	1.09376E+01	1.82536E-01	1.41759E-05	1.80608E+00

$I_{11}(z)$ во всех трех случаях неограниченно растет при $z \rightarrow \infty$, но скорость роста зависит от вида профиля. Элемент $I_{12}(z)$ монотонно возрастает, стремясь к конечному пределу при $z \rightarrow \infty$. При лоренцевском и при

доплеровском профилях элемент $I_{21}(z)$ при не слишком больших z отрицателен, затем меняет знак, проходит через максимум и стремится к 0 при $z \rightarrow \infty$. Изменение знака $I_{21}(z)$ при больших z означает, что в далеких крыльях линии даже при консервативном рассеянии происходит поворот плоскости поляризации. Однако этот результат представляет лишь академический интерес, так как величина появляющейся в далеких крыльях отрицательной поляризации слишком мала, чтобы быть измеримой (более подробное обсуждение этого применительно к случаю доплеровского профиля см. в конце раздела 2.3 работы [2]). При монохроматическом рассеянии $I_{21}(z)$ монотонно возрастает при всех z , оставаясь отрицательной и стремясь к 0 при $z \rightarrow \infty$. Наконец, поведение $I_{22}(z)$ качественно подобно поведению $I_{12}(z)$.

Приведем теперь асимптотические выражения для элементов лоренцевской матрицы $I(z)$ при $z \rightarrow \infty$ для важнейшего случая $W=1$, $\lambda_I=1$. Их вывод см. в *Приложении*. Мы имеем

$$I_{11}(z) \sim I(z) \sim \left(\frac{9}{2\pi}\right)^{1/4} z^{1/4}, \quad (22)$$

$$I_{22}(z) = \sqrt{\frac{10}{3}} - \frac{A_{22}}{\sqrt{z}} + \dots, \quad (23)$$

$$I_{12}(z) = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{A_{12}}{\sqrt{z}} + \dots, \quad (24)$$

$$I_{21}(z) = \frac{Q}{z} + \dots \quad (25)$$

Здесь $I(z)$ - скалярная I -функция, связанная с консервативной лоренцевской H -функцией, детально изученной в [8], §5.7, следующим образом: $I(z) = H(z/\pi)$. Далее,

$$A_{22} = \frac{40 \cdot 17}{49 \cdot 11} \sqrt{\frac{5\pi}{6}} = 2.04129, \quad (26)$$

$$A_{12} = \frac{20 \cdot 17}{7^3 \cdot 11} \sqrt{\frac{5\pi}{6}} = 0.206201. \quad (27)$$

и, наконец,

$$Q = 0.197486. \quad (28)$$

Для вычисления асимптотической константы Q было использовано следующее ее интегральное представление:

$$Q = \frac{10}{3} \int_0^\infty [(k_{12}G_{11}(z) - G_{12}(z))I_{11}(z) + (k_{12}G_{12}(z) - G_{22}(z))I_{21}(z)]zdz, \quad (29)$$

в котором

$$k_{12} = -\frac{1}{7\sqrt{2}}. \quad (30)$$

Отметим, что

$$A_{12} = -k_{12}A_{22} \quad (31)$$

и

$$I_{12}(\infty) = -k_{12}I_{22}(\infty). \quad (32)$$

Приведем также нетривиальное интегральное соотношение между элементами матриц G и I , которое мы использовали для проверки точности вычислений:

$$\int_0^{\infty} (G_{11}(z)I_{12}(z) + G_{12}(z)I_{22}(z))zdz = 0. \quad (33)$$

Отметим тот несколько неожиданный факт, что при лоренцевском профиле функция $I_{21}(z)$ при $z \rightarrow \infty$ ведет себя так же, как и при монохроматическом рассеянии, хотя постоянные Q в двух случаях, разумеется, разные, причем не только по величине, но и по знаку (ср. формулу (25) с формулой (64) в [9]). При доплеровском же профиле поведение $I_{21}(z)$ существенно иное, именно, $I_{21}(z) \sim O(z^{-1/2} \ln(z/\sqrt{\pi})^{-9/4})$ (формула (68) в [2]).

5. Поляризация выходящего излучения. Рассмотрим теперь степень поляризации выходящего излучения $p(\mu, x)$, которая определяется формулой

$$p(\mu, x) = -\frac{Q(\mu, x)}{I(\mu, x)}. \quad (34)$$

Если первичные источники дают неполяризованное излучение, то достаточно знать только элементы I_{11} и I_{21} матрицы I . Согласно (6), при консервативном рассеянии с $W=1$ явные выражения для параметров Стокса $I(\mu, x)$ и $Q(\mu, x)$ через элементы матрицы $I(z)$ имеют вид

$$I(\mu, x) = I_{11}\left(\frac{\mu}{\phi(x)}\right) + \sqrt{\frac{1}{8}}(1-3\mu^2)I_{21}\left(\frac{\mu}{\phi(x)}\right), \quad (35)$$

$$Q(\mu, x) = \sqrt{\frac{1}{8}}3(1-\mu^2)I_{21}\left(\frac{\mu}{\phi(x)}\right). \quad (36)$$

На рис.1 показано изменение степени поляризации $p(\mu, x)$ в пределах линии для разных μ при консервативном рассеянии. Предельное значение степени поляризации на краю диска ($\mu=0$) равно

$$p(0, x) = 5.421\%, \quad W=1. \quad (37)$$

При почти консервативном рассеянии ($\epsilon_f \ll 1$) имеем

$$p(0, x) = (5.421 - 20.0\sqrt{\epsilon_f})\%, \quad W = 1. \quad (38)$$

Зависимость $p(\mu, x)$ от направления выходящего излучения для разных частот в пределах линии представлена на рис.2.

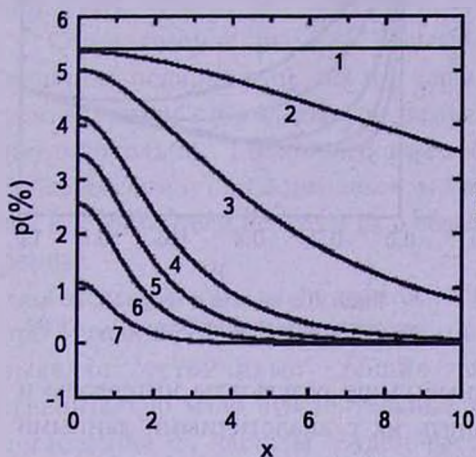


Рис.1. Степень поляризации излучения в резонансной линии, выходящего из консервативной изотермической атмосферы (лоренцевский профиль, $W=1$). По оси абсцисс-безразмерная частота x . Числа у кривых - значения μ : 1-0.0, 2-0.001, 3-0.01, 4-0.05, 5-0.1, 6-0.2, 7-0.5.

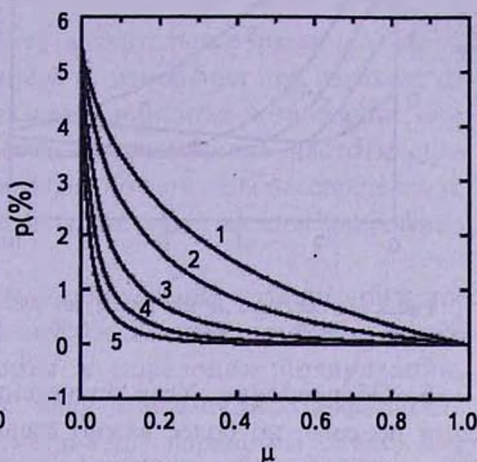


Рис.2. Изменение по диску степени поляризации излучения, выходящего из консервативной изотермической атмосферы (лоренцевский профиль, $W=1$). Числа у кривых - безразмерные частоты x : 1-0.0, 2-1.0, 3-2.0, 4-3.0, 5-4.0.

Мы уже упоминали о том, что изменение знака $I_{21}(z)$ должно приводить к изменению знака поляризации в крыле линии даже при строго консервативном рассеянии. Согласно данным табл.1, $I_{21}(z)$ обращается в 0 при $z = z_0 \approx 33$. Отсюда, согласно (36) и (34), заключаем, что при консервативном рассеянии поляризация обращается в 0 на частоте

$$x_0 = \left(\frac{33}{\pi\mu} - 1 \right)^{1/2}, \quad (39)$$

так что, например, при $\mu = 0.5$ имеем $x_0 \approx 4.5$. На больших частотах поляризация хотя и отрицательна, но столь мала, что об измерении ее не может быть и речи.

Введение даже небольшого истинного поглощения заметно изменяет поведение поляризации. Поворот плоскости поляризации, т.е. изменение знака $p(\mu, x)$, происходит на тем меньших частотах, чем больше роль поглощения. Отрицательная поляризация уже при $\lambda_f = 0.99$ достигает $\sim 1\%$, т.е. вполне измерима. Поведение поляризации при $\lambda_f = 0.99$ представлено на рис.3 и 4. Эти рисунки аналогичны, соответственно, рис.1 и 2.

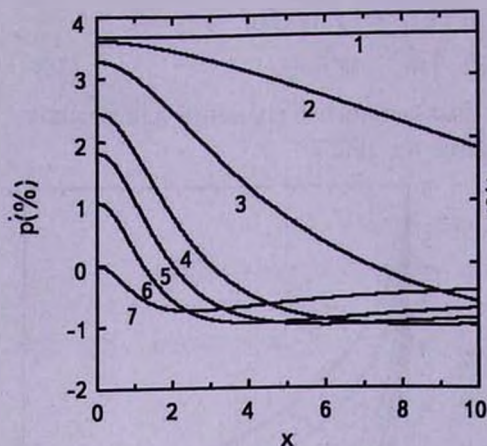


Рис.3. То же, что и на рис.1, но для неконсервативной атмосферы с $\lambda_f = 0.99$.

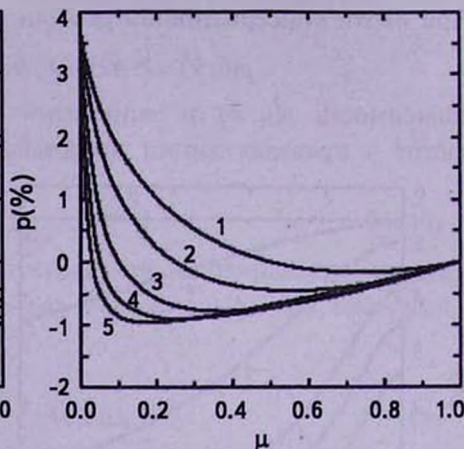


Рис.4. То же, что и на рис.2, но для неконсервативной атмосферы с $\lambda_f = 0.99$.

6. Обсуждение. Хотя приведенные выше результаты интересны и сами по себе, но более важно сравнить их с аналогичными данными для коэффициентов поглощения других видов.

Сопоставим, прежде всего, предельные значения степени поляризации на краю диска при консервативном дипольном рассеянии для разных профилей коэффициента поглощения. Для прямоугольного профиля (мономатическое рассеяние) имеем 11.713% - известный поляризационный предел Соболева-Чандрасекара [10,11]. Для доплеровского коэффициента поглощения, согласно [2], имеем 9.443%, наконец, лоренцевскому профилю отвечает приведенное выше значение 5.421%.

Мы видим, что изменение вида профиля коэффициента поглощения приводит к заметному изменению поляризации выходящего излучения. Чем медленнее коэффициент поглощения убывает, тем меньше предельная поляризация на краю диска звезды с чисто рассеивающей атмосферой. Причина этого вполне понятна. Чем больше роль ухода фотонов в крылья линии, где коэффициент поглощения мал, тем менее крутым становится спад степени возбуждения атомов к границе атмосферы. В итоге угловая анизотропия выходящего излучения, т.е. потемнение к краю диска, с увеличением роли переноса в крыльях уменьшается. Между тем, как хорошо известно, именно потемнение к краю и является причиной появления поляризации у выходящего излучения.

Для уяснения того, насколько вид коэффициента поглощения сказывается на поляризационных характеристиках выходящего излучения, поучительно сравнить рис.1, относящийся к лоренцевскому профилю, с аналогичным рисунком для доплеровского профиля (рис.5).

Одна черта имеет общий характер и проявляется при любом профиле, в том числе и прямоугольном (монокроматическое рассеяние). Она состоит в том, что при неконсервативном рассеянии всегда происходит поворот плоскости поляризации при отходе от касательного направления выходящего излучения (рис.3 и 4). Это имеет место и при монокроматическом рассеянии (см. [12]).

Сопоставление рис.1 и 5 выявляет значительные различия как в величине поляризации, так и в характере ее изменения при переходе от центра линии к крыльям при разных коэффициентах поглощения. Это неудивительно, поскольку даже сами безразмерные частоты при доплеровском и при лоренцевском профилях по сути дела несопоставимы, так как множители перевода их в обычные (размерные) частоты совершенно разные.

Имеется любопытная возможность сопоставления хода поляризации при разных профилях коэффициента поглощения, которая четко выявляет устойчивые общие черты в поведении поляризации, сравнительно мало чувствительные к виду зависимости коэффициента поглощения от частоты. Будем рассматривать параметры Стокса как функции угловой переменной μ и значения коэффициента поглощения.

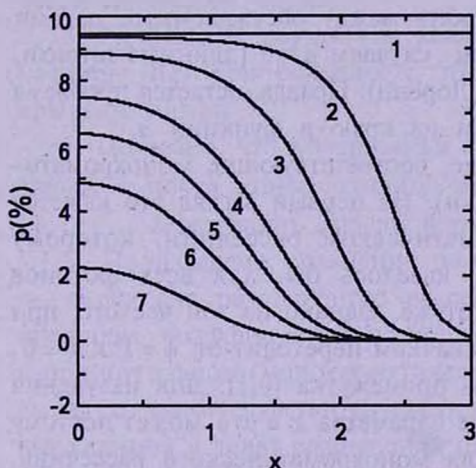


Рис.5. То же, что на рис.1, но для доплеровского профиля.

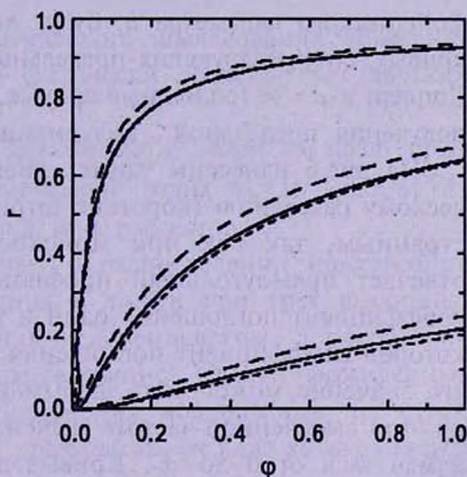


Рис.6. Поляризация g в долях поляризации на краю как функция значения коэффициента поглощения ϕ в долях его максимального значения (в центре линии). Верхняя группа кривых - $\mu = 0.001$, средняя группа кривых - $\mu = 0.1$, нижняя группа - $\mu = 0.5$. Сплошные кривые - лоренцевский профиль, штриховые с длинными штрихами - доплеровский профиль, с короткими - монокроматическое рассеяние (прямоугольный профиль).

ϕ (а не частоты x). Тогда (35)-(36) можно переписать так:

$$I(\mu, \phi) = I_{11}\left(\frac{\mu}{\phi}\right) + \sqrt{\frac{1}{8}}(1 - 3\mu^2)I_{21}\left(\frac{\mu}{\phi}\right), \quad (40)$$

$$Q(\mu, \phi) = \sqrt{\frac{1}{8}}3(1 - \mu^2)I_{21}\left(\frac{\mu}{\phi}\right). \quad (41)$$

Обозначим, далее,

$$r(\mu, \phi) \equiv \frac{p(\mu, \phi)}{p(0, \phi)} \quad (42)$$

и $\phi \equiv \phi/\phi(0)$. Соответственно этому, перестроим рис.1 и 5 следующим образом. По оси ординат будем откладывать степень поляризации, выраженную в долях ее значения на краю диска, т.е. величину $r(\mu, \phi)$, а по оси абсцисс - вместо частоты x отвечающее данному x значение коэффициента поглощения ϕ (оно нормировано на 1 в центре линии). Результат представлен на рис.6. Кривые, соответствующие доплеровскому профилю (длинные штрихи), отличаются от кривых для лоренцевского профиля (сплошные линии) не очень сильно, форма обеих групп кривых в общих чертах одна и та же. Можно с уверенностью утверждать, что кривые, отвечающие фойгтовским профилям с разными значениями фойгтовского параметра a , будут лежать между обсуждаемыми парами кривых, соответствующих предельным случаям $a=0$ (длинные штрихи, Доплер) и $a=\infty$ (сплошные кривые, Лоренц). Правда, остается проблема получения предельной поляризации на краю в функции a .

На рис.6 нанесены также кривые, соответствующие монохроматическому рассеянию (короткие штрихи). На первый взгляд это кажется странным, так как при монохроматическом рассеянии, которому отвечает прямоугольный профиль, казалось бы, для всех фотонов коэффициент поглощения один и тот же. Однако на той частоте, при которой коэффициент поглощения скачком переходит от $\phi=1$ к $\phi=0$, его значение может быть любым из промежутка $[0,1]$. Для излучения на этой выделенной частоте значение параметра $z \equiv \mu/\phi$ может поэтому изменяться от 0 до ∞ . Кривые для монохроматического рассеяния, нанесенные на рис.6 короткими штрихами, построены с использованием значений элементов I-матрицы, отвечающей монохроматическому рассеянию (см. [9]). Тот факт, что кривые для монохроматического рассеяния лежат ближе к кривым для лоренцевского профиля, чем для доплеровского, представляется несколько неожиданным. На объяснении этого факта мы останавливаться не будем, ограничившись его констатацией.

При переходе от традиционного описания (рис.1 и 5) к только что предложенному (рис.6), мы фактически перешли от классификации

"фотонов" (точнее, любых параметров поля излучения) по частотам к классификации их по длинам пробега. Подобная идея в принципе не нова. Впервые она была высказана в давней работе В.А.Амбарцумяна [13] (разумеется, не применительно к описанию поляризации, а совсем в другой связи). Она же лежит в основе использования OPDF (Opacity Probability Distribution Function) при расчетах моделей звездных атмосфер. Можно надеяться, что описание поляризационных характеристик поля излучения в терминах значения коэффициента поглощения (а не частоты), может оказаться полезным не только при ППЧ, но и при более рафинированном подходе, основанном на использовании ЧПЧ.

7. Заключение. Кратко резюмируем основные результаты работы.

1. Развита ранее в [1,2] общая теория многократного резонансного рассеяния в приближении полного перераспределения по частотам детализирована для частного случая лоренцевского коэффициента поглощения.

2. Представлены результаты численного решения матричного нелинейного интегрального уравнения типа Амбарцумяна-Чандрасекара для матрицы $I(z)$, обобщающей обычную скалярную H -функцию на рассматриваемый случай.

3. Приведены результаты аналитического исследования поведения матрицы $I(z)$ при больших z , что физически соответствует далеким крыльям линии.

4. Показано, что поляризация в лоренцевской линии на краю диска звезды с почти консервативной атмосферой равна $(5.421 - 20.0 \cdot \sqrt{\epsilon_I})\%$, где ϵ_I - вероятность гибели фотона при рассеянии.

5. Произведено сравнение данных о распределении поляризации по диску для резонансного рассеяния в линии при трех различных профилях коэффициента поглощения - лоренцевском, доплеровском и прямоугольном (монокроматическое рассеяние). Сделан неожиданный вывод о малой чувствительности изменения поляризации по диску, выраженной в долях ее значения на краю диска, от вида коэффициента поглощения, если эту относительную поляризацию рассматривать как функцию значения коэффициента поглощения (а не частоты).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-8542.2006.2 и гранта РФФИ 06-02-17096.

Астрономический институт им. В.В.Соболева

Санкт-Петербургского университета,

Россия, e-mail: vml@astro.spbu.ru

viva@pobox.spbu.ru

Приложение. Задача настоящего *Приложения* - дать вывод формул (22)-(33) и привести некоторые дополнительные сведения. Если не оговорено противное, считается, что мы имеем дело с консервативным дипольным рассеянием с лоренцевским коэффициентом поглощения.

A1. Вспомогательные результаты. Будем исходить из линейного интегрального уравнения для матрицы $I(z)$ (формула (I.74), т.е. формула (74) из работы [1])

$$T(z)I(z) = \epsilon^{1/2} - \int_0^{\infty} G(z')I(z') \frac{z'dz'}{z-z'}, \quad (A1)$$

где (см. (I.54))

$$T(z) = E - 2z^2 \int_0^{\infty} \frac{G(z')dz'}{z^2 - z'^2}. \quad (A2)$$

Для лоренцевского профиля параметр γ , фигурирующий в общей теории, развитой в [1] и [2] - так называемый характеристический показатель - равен $\gamma = 1/4$. При лоренцевском профиле формула (I.98), дающая *главный член* асимптотики матрицы $G(z)$ при $z \rightarrow \infty$, принимает вид

$$G(z) \sim k_1 G(z) \sim k_1 \frac{1}{3\sqrt{\pi}} z^{-3/2}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (A3)$$

где $G(z)$ - скалярная G -функция [$G(z) = G_{11}(z)$]. Фигурирующая в последней формуле числовая матрица k_1 при консервативном дипольном рассеянии с лоренцевским профилем ($\lambda_I = 1$, $W = 1$, $\gamma = 1/4$), как следует из (I.81), (I.46) и (I.48), равна

$$k_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{7\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{7\sqrt{2}} & \frac{89}{11 \cdot 14} \end{pmatrix}. \quad (A4)$$

Элементы матрицы k_1 будут обозначаться k_{ik} . Отметим, что $k_{12} = k_{21}$.

Главный член асимптотики матрицы $T(z)$ при $z \rightarrow \infty$, согласно (I.105)-(I.106), имеет вид (заметим, что в формуле (I.106) опечатка: в правой части вместо знака минус должен стоять 'плюс')

$$T(z) \sim \epsilon - k_1 \frac{\sqrt{\pi}}{3} z^{-1/2}. \quad (A5)$$

Таким образом, три элемента матрицы $T(z)$ (11, 12 и 21) являются величинами порядка $O(z^{-1/2})$, а четвертый, 22, при консервативном рассеянии имеет вид

$$T_{22}(z) \sim \frac{3}{10} + O(z^{-1/2}). \quad (A6)$$

На этом подготовительный этап завершен, все формулы, которые понадобятся нам для вывода асимптотик элементов матрицы $I(z)$, собраны вместе.

A2. Асимптотика $I_{11}(z)$. Начнем с асимптотики $I_{11}(z)$ (формула (22)). Ее вывод дословно повторяет вывод соответствующей асимптотики при доплеровском профиле (см. формулы (53)-(61) в [2]). Единственное отличие состоит в том, что при доплеровском профиле удастся получить полное асимптотическое разложение (идущее по обратным степеням $\ln(z/\sqrt{\pi})$), в случае же лоренцевского профиля приходится довольствоваться лишь главным членом разложения, который, впрочем, обеспечивает при тех же значениях z даже большую точность, чем полное асимптотическое разложение при доплеровском профиле.

A3. Главный член асимптотики $I_{22}(z)$. В качестве следующего шага получим главный член асимптотики (23), т.е. докажем, что

$$I_{22}(\infty) = \sqrt{\frac{10}{3}}. \quad (A7)$$

Выпишем в явном виде уравнение, являющееся компонентом 22 матричного уравнения (A1):

$$T_{12}(z)I_{12}(z) + T_{22}(z)I_{22}(z) = \sqrt{\frac{3}{10}} - \int_0^{\infty} (G_{12}(z')I_{12}(z') + G_{22}(z')I_{22}(z')) \frac{z'dz'}{z-z'}. \quad (A8)$$

Устремляем здесь $z \rightarrow \infty$. Так как элемент $I_{12}(z)$ описывает поляризацию, он не должен быть расходящимся при $z \rightarrow \infty$. Далее, согласно (A5) $T_{21}(z) = O(z^{-1/2})$, и мы будем иметь

$$T_{12}(z)I_{12}(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (A9)$$

Второй член слева в (A8) дает, согласно (A6),

$$T_{22}(z)I_{22}(z) \rightarrow \frac{3}{10} I_{22}(z). \quad (A10)$$

Интеграл, стоящий в (A8), стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Поэтому заключаем, что

$$\frac{3}{10} I_{22}(z) \rightarrow \sqrt{\frac{3}{10}}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (A11)$$

откуда и следует (A7).

A4. Главный член асимптотики $I_{12}(z)$. Теперь докажем, что

$$I_{12}(\infty) = -k_{12}I_{22}(\infty) = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{5}{3}}. \quad (A12)$$

Уравнение, являющееся компонентом 12 матричного уравнения (A1), из которого мы будем сейчас исходить, имеет вид:

$$T_{11}(z)I_{12}(z) + T_{12}(z)I_{22}(z) = \int_0^{\infty} (G_{11}(z')I_{12}(z') + G_{12}(z')I_{22}(z')) \frac{z'dz'}{z-z'}. \quad (A13)$$

Устремляя в нем $z \rightarrow \infty$ и учитывая (A5), находим

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{3} z^{-1/2} (I_{12}(z) + k_{12}I_{22}(z)) \sim \frac{1}{z} \int_0^{\infty} (G_{11}(z')I_{12}(z') + G_{12}(z')I_{22}(z')) z'dz'. \quad (A14)$$

Здесь мы предположили, что стоящий справа интеграл сходится (в чем мы убедимся чуть позже). Так как $T(z) = O(z^{-1/2})$, то, чтобы левая часть была порядка z^{-1} или выше, величина $I_{12}(z) + k_{12}I_{22}(z)$ должна быть, по крайней мере, $O(z^{-1/2})$. В комбинации с (A7) это немедленно дает (A12).

A5. Асимптотическая постоянная A_{22} . Для ее получения обратимся снова к уравнению (A8). Подставим в левую часть разложения всех фигурирующих в ней функций и удержим члены до $O(z^{-1/2})$ включительно:

$$\begin{aligned} k_{12} \frac{\sqrt{\pi}}{3} z^{-1/2} \cdot \frac{1}{7} \sqrt{\frac{5}{3}} + \left(\frac{3}{10} + k_{22} \frac{\sqrt{\pi}}{3} z^{-1/2} \right) \left(\sqrt{\frac{10}{3}} - A_{22} z^{-1/2} \right) + \dots = \\ = \sqrt{\frac{10}{3}} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} (G_{11}(z')I_{12}(z') + G_{12}(z')I_{22}(z')) z'dz'. \end{aligned} \quad (A15)$$

Члены, не зависящие от z , сокращаются, а приравнивание к нулю суммы всех членов порядка $z^{-1/2}$ дает возможность найти значение A_{22} , декларируемое ранее (формула (26)).

A6. Асимптотическая постоянная A_{21} . Подставив теперь в последнее соотношение разложения $I_{22}(z)$ и $I_{11}(z)$ из (23) и (24), получим

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{3} (A_{12} - k_{12}A_{22}) \frac{1}{z} + o(z^{-1}) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} (G_{11}(z')I_{12}(z') + G_{12}(z')I_{22}(z')) z'dz'. \quad (A16)$$

Изучим поведение при $z \rightarrow \infty$ подынтегральной функции в стоящем справа интеграле. Мы имеем

$$\begin{aligned} (G_{11}(z')I_{12}(z') + G_{12}(z')I_{22}(z')) z' = \\ = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{z'^{3/2}} \left(I_{12}(\infty) - \frac{A_{12}}{\sqrt{z'}} + k_{12} \left(I_{22}(\infty) - \frac{A_{22}}{\sqrt{z'}} \right) \right) z' + \dots, \end{aligned} \quad (A17)$$

что в силу уже доказанного равенства (32) равно

$$-\frac{1}{3\sqrt{\pi}} (A_{12} + k_{12}A_{22}) \frac{1}{z'} + \dots \quad (A18)$$

Очевидно, что для того, чтобы интеграл сходился, необходимо, чтобы

$$A_{12} + k_{12}A_{22} = 0. \quad (A19)$$

Поскольку A_{22} нам уже известно, тем самым найдено A_{21} . Кроме того, так как в силу последнего соотношения левая часть в (A16) с точностью до членов порядка z^{-1} равна нулю, должен быть равен нулю и стоящий справа интеграл. Тем самым мы доказали приведенное в основном тексте статьи интегральное соотношение (33).

A7. Асимптотика $I_{21}(z)$. Обратимся к асимптотике $I_{21}(z)$, именно, докажем, что $I_{21}(z) = O(1/z)$ (формула (28)) и найдем выражение для численного коэффициента в этой формуле.

Выпишем в явном виде скалярные уравнения, являющиеся компонентами 11 и 21 матричного уравнения (A1). Домножив первое из них на k_{12} и почленно вычтя из результата второе уравнение, получим

$$(k_{12}T_{11}(z) - T_{12}(z))I_{11}(z) + (k_{12}T_{12}(z) - T_{22}(z))I_{21}(z) = \\ = \int_0^{\infty} [(k_{12}G_{11}(z') - G_{12}(z'))I_{11}(z') + (k_{12}G_{12}(z') - G_{22}(z'))I_{21}(z')] \frac{z'dz'}{z' - z}. \quad (A20)$$

Образовав подобную разность, мы заработали в подынтегральной функции более высокий порядок малости при расходящейся при $z' \rightarrow \infty$ функции $I_{11}(z')$. Выпишем порядки величин различных членов в последнем уравнении:

$$\frac{(k_{12}T_{11}(z) - T_{12}(z))I_{11}(z)}{O(z^{-1/2}) O(z^{1/4})} + \frac{(k_{12}T_{12}(z) - T_{22}(z))I_{21}(z)}{O(1) + O(z^{-1/2}) O(z^{-1})} = \\ = \int_0^{\infty} \frac{[(k_{12}G_{11}(y) - G_{12}(y))I_{11}(y) + (k_{12}G_{12}(y) - G_{22}(y))I_{21}(y)]}{O(y^{-1/2}) O(y^{1/4}) O(y^{-1/2}) O(y^{-1})} \frac{ydy}{y - z}. \quad (A21)$$

Отсюда при $z \rightarrow \infty$ немедленно следует, что

$$I_{21}(z) \sim \frac{Q}{z},$$

а Q дается формулой (29).

A8. Альтернативное представление постоянной Q . Будем исходить из уравнения, являющегося компонентом 21 матричного уравнения (A1):

$$T_{21}(z)I_{11}(z) + T_{22}(z)I_{21}(z) = \int_0^{\infty} (G_{21}(z')I_{11}(z') + G_{22}(z')I_{21}(z')) \frac{z'dz'}{z' - z}. \quad (A22)$$

Привлечем уравнение для консервативной скалярной функции $I(z)$ (формула (I.74); напомним, что $T_{11}(z) = T(z)$ и $G_{11}(z) = G(z)$, где $T(z)$ и $G(z)$ относятся к скалярному случаю):

$$T_{11}(z)I(z) = \int_0^{\infty} G_{11}(z')I(z') \frac{z'dz'}{z' - z}. \quad (A23)$$

Воспользуемся тем, что согласно (A3) и (A5) при $z \rightarrow \infty$

$$T_{21}(z) \sim k_{12}T_{11}(z), \quad G_{21}(z) \sim k_{12}G_{11}(z). \quad (A24)$$

Домножим (A23) на k_{12} и вычтем почленно из (A22):

$$\begin{aligned} & (T_{21}(z)I_{11}(z) - k_{12}T_{11}(z)I(z)) + T_{22}(z)I_{21}(z) = \\ & = \int_0^{\infty} [(G_{21}(z')I_{11}(z') - k_{12}G_{11}(z')I(z')) + G_{22}(z')I_{21}(z')] \frac{z'dz'}{z' - z}. \end{aligned} \quad (A25)$$

Понятно, что вычтя из $G_{12}(z')I_{11}(z')$ величину $k_{12}G_{11}(z')I(z')$, мы добились того, что в этой разности главные члены асимптотик сократились. Эта разность стремится к нулю при больших z достаточно быстро, чтобы обеспечить сходимость интеграла в правой части (A25) при $z \rightarrow \infty$. Что касается левой части, то при $z \rightarrow \infty$, как легко убедиться, она ведет себя следующим образом:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{3}(I(z) - I_{11}(z))\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{3}{10}I_{21}(z), \quad z \rightarrow \infty. \quad (A26)$$

Разность $I(z) - I_{11}(z)$ должна стремиться к 0 быстрее, чем $z^{-1/2}$, на что, в частности, указывают численные данные, приводимые в табл. I. Поэтому первым слагаемым в (A26) можно пренебречь по сравнению со вторым. В итоге из (A25) при $z \rightarrow \infty$ находим

$$I_{21}(z) \sim \frac{Q}{z}, \quad (A27)$$

где

$$Q = \frac{10}{3} \int_0^{\infty} [(G_{21}(z')I_{11}(z') - k_{12}G_{11}(z')I(z')) + G_{22}(z')I_{21}(z')] z' dz'. \quad (A28)$$

Это альтернативное по отношению к (A12) представление асимптотической постоянной Q .

A9. Замечания. В заключение сделаем два замечания. Сопоставление (33) и (A28) показывает, что существует следующее любопытное интегральное соотношение, связывающее решения скалярной и матричной задач:

$$\int_0^{\infty} G_{11}(z)(I(z) - I_{11}(z))z dz = \int_0^{\infty} G_{12}(z)I_{21}(z)z dz. \quad (A29)$$

Второе замечание состоит в следующем. Внимательное рассмотрение численных значений $I_{21}(z)$ при больших z показывает, что они превосходно воспроизводятся следующим выражением:

$$I_{21}(z) = \frac{0.197884}{z} - \frac{0.55}{z^{5/4}}. \quad (A30)$$

При $z > 10^4$ эта эмпирическая формула обеспечивает не менее 4

значащих цифр. Попыток строго доказать эту формулу и получить явное выражение для численной постоянной 0.55 мы не предпринимали.

POLARIZED LINE FORMATION BY RESONANCE SCATTERING: LORENTZ PROFILE

V.M.LOSKUTOV, V.V.IVANOV

We consider multiple resonance scattering of radiation of a spectral line in an atmosphere with uniformly distributed primary sources of unpolarized radiation. It is assumed that there is complete frequency redistribution, with Lorentzian profile of the line absorption coefficient. Using the matrix non-linear equation of the Ambartsumian-Chandrasekhar type, we calculate the polarization characteristics of the emergent radiation. In particular, it is found that the limiting limb polarization for purely scattering atmosphere is 5.421%. The polarization parameters of the emergent radiation are compared for three absorption profiles, namely, Doppler, Lorentz and rectangular one (i.e., monochromatic scattering).

Key words: *radiative transfer: polarization: spectral lines*

ЛИТЕРАТУРА

1. V.V.Ivanov, S.I.Grachev, V.M.Loskutov, *Astron. Astrophys.*, **318**, 315, 1997.
2. V.V.Ivanov, S.I.Grachev, V.M.Loskutov, *Astron. Astrophys.*, **321**, 968, 1997.
3. H.Frisch, *Astron. Astrophys.*, **338**, 683, 1998.
4. H.Frisch, Resonance polarization and Hanle effect, pp.97-113 in *Solar Polarization*, K.N.Nagendra, J.O.Stenflo (editors), Kluwer, Dordrecht, 1999.
5. J.O.Stenflo, *Solar Magnetic Fields-Polarized Radiation Diagnostics*, Kluwer, Dordrecht, 1994.
6. E.Landi Degl'Innocenti, M.Landolfi, *Polarization in Spectral Lines*, Kluwer, Dordrecht, 2004.
7. S.Dumont, A.Omont, J.C.Pecker, D.Rees, *Astron. Astrophys.*, **54**, 675, 1977.
8. В.В.Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
9. V.V.Ivanov, A.M.Kasaurov, V.M.Loskutov, *Astron. Astrophys.*, **307**, 332, 1996.
10. В.В.Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
11. С.Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, Изд. иностр. лит., М., 1953.
12. В.М.Лоскутов, В.В.Соболев, *Астрофизика*, **15**, 243, 1979.
13. В.А.Амбарцумян, Труды Астрон. общ. Ленингр. ун-та, **6**, 7, 1936.