

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОЙ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Д.М.СЕДРАКЯН¹, А.А.ГЕВОРГЯН¹, А.Ж.ХАЧАТРЯН²,
В.Д.БАДАЛЯН¹,

Поступила 31 марта 2006

Исследуется характер переноса электромагнитного излучения через изотропную квазипериодическую среду конечных размеров с линейно или экспоненциально изменяющимися в одном направлении параметрами модуляции диэлектрической проницаемости. Показано, что квазипериодичность диэлектрических свойств приводит к образованию запрещенной зоны, значительно более широкой, чем соответствующая зона для идеально периодических сред. Приведены простые приближенные формулы для ширины и центральной длины волны запрещенной зоны.

Ключевые слова: *радиация; электромагнитическая; рассеяние*

1. *Введение.* Определение амплитуд прохождения и отражения электромагнитной волны при ее падении на неоднородную среду конечной толщины по-прежнему является одной из наиболее интересных и практически важных задач теории распространения волн [1,2].

В последнее время эта проблема приобрела особую актуальность в связи с развитием технологий по созданию искусственных периодических структур. Среди них наибольший интерес вызывают фотонные кристаллы (ФК) - специальный класс искусственных сред с периодическим изменением диэлектрических свойств в пространственном масштабе порядка оптической длины волны [3]. Такие системы широко используются в технике миллиметрового и субмиллиметрового диапазона длин волн, в лазерной технике, в оптической связи. ФК позволяют полностью контролировать распространение света; в них наблюдается явление локализации световых волн [3-6].

Большой интерес в астрофизике и оптике представляют не только периодические, но и квазипериодические среды (КС). Периодичность и неупорядоченность являются двумя крайностями богатого спектра диэлектрических сред. КС, будучи непериодическими структурами, все еще считаются детерминированно порожденными и могут быть рассмотрены как удобные модели для описания общей картины прохождения электромагнитной волны через частичноупорядоченные слои вещества. Возникновение при этом у КС запрещенной энергетической зоны делает их уникальными

объектами для физических исследований и практического применения.

Изучению прохождения потока микрочастиц или распространения волн через слои неоднородных сред посвящено значительное число теоретических работ. Для описания переноса света в мутной среде, В.А.Амбарцумяном, начиная с 1938г., была разработана разновидность метода сложения слоев [7,8], основанная на известном "принципе инвариантности". Хорошо известен ряд других методов для описания распространения волн в неоднородной среде: методы теории возмущений, погружения, трансфер-матриц, фазовых функций, функций Грина и другие [9-15]. Несмотря на то что эти методы позволяют, в принципе, описать почти все эффекты, возникающие при распространении электромагнитной волны в неоднородной среде, они тем не менее обладают рядом недостатков, делающих их применение затруднительным в конкретных приложениях.

Недавно был предложен новый метод [16-18], позволяющий точно описать рассеяние света в одномерной (1D) диэлектрической пластине с произвольным показателем преломления. Отличие используемого [16-18] подхода от общепринятых заключается в том, что задача рассеяния электромагнитной волны в неоднородном 1D диэлектрике сводится к решению задачи Коши для системы из двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с заданными начальными условиями. Формулировка волновой задачи в виде задачи Коши позволяет получить конечные результаты в случае знания аналитического решения уравнений или проводить эффективные расчеты в тех случаях, когда обычные методы встречают непреодолимые трудности. В настоящей работе указанный метод применен к задаче рассеяния световой волны в 1D КС.

2. *Основные формулы.* Рассмотрим 1D КС, в которой зависимость диэлектрической проницаемости от координаты x описывается законом

$$\epsilon(x) = \epsilon_0 \left(1 + a(x) \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\sigma(x)} x \right) \right), \quad (1)$$

где $a(x)$, $\sigma(x)$ - некоторые непрерывные функции (параметры модуляции), зависящие от x ; $\epsilon_0 = \epsilon(0)$. Сначала рассмотрим линейный профиль

изменения параметров $a(x)$ и $\sigma(x)$: $a(x) = \left(\frac{a_{max} - a_{min}}{d} \right) x + a_{min}$,

$\sigma(x) = \left(\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{d} \right) x + \sigma_{min}$, где d - толщина слоя, а a_{min} , a_{max} , σ_{min} , σ_{max}

- константы. Модулированная среда такого типа может быть создана, например, сильным световым или ультразвуковым полем, при наличии температурного градиента вдоль оси x . Мы рассмотрим случай немагнитных сред, т.е. положим $\mu = 1$. Будем также предполагать, что поглощение отсутствует.

Согласно теории [16-18], комплексные амплитуды прохождения $t^{s,p}$ и отражения $r^{s,p}$, s и p - поляризованных электромагнитных волн, в диэлектрическом слое с непрерывным показателем преломления и граничащего с обеих сторон с однородной средой (с диэлектрической проницаемостью ϵ_1), могут быть выражены через реальные функции $H_{1,2}^{s,p}(x)$ и $N_{1,2}^{s,p}(x)$ в точке $x = d$ с помощью следующих формул:

$$\frac{1}{t^{s,p}} = \frac{1}{2} \exp\{ik_{0x}d\} \left[(H_1^{s,p}(d) + N_2^{s,p}(d)) - i(N_1^{s,p}(d) - H_2^{s,p}(d)) \right], \quad (2)$$

$$\frac{r^{s,p}}{t^{s,p}} = -\frac{1}{2} \exp\{ik_{0x}d\} \left[(H_1^{s,p}(d) - N_2^{s,p}(d)) - i(N_1^{s,p}(d) + H_2^{s,p}(d)) \right]. \quad (3)$$

Функции $H_{1,2}^{s,p}(x)$ и $N_{1,2}^{s,p}(x)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dN_{1,2}^s}{dx} = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\epsilon_1 \sin^2 \alpha - \epsilon(x)}{k_{0x}} \right] H_{1,2}^s \quad \text{и} \quad \frac{dH_{1,2}^s}{dx} = -k_{0x} N_{1,2}^s, \quad (4)$$

и

$$\frac{dN_{1,2}^p}{dx} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{k_{0x}} \left[1 - \frac{\epsilon_1 \sin^2 \alpha}{\epsilon(x)} \right] H_{1,2}^p \quad \text{и} \quad \frac{dH_{1,2}^p}{dx} = -\epsilon(x) k_{0x} N_{1,2}^p, \quad (5)$$

с начальными условиями

$$H_1^{s,p} = 1, \quad H_2^{s,p} = 0 \quad \text{и} \quad N_1^{s,p} = 0, \quad N_2^{s,p} = 1. \quad (6)$$

В (4), (5) $k_{0x} = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$, где α - угол падения света, ω - круговая частота, c - скорость света. Коэффициенты отражения $R^{s,p}$ и пропускания $T^{s,p}$ определяются как $R^{s,p} = |r^{s,p}|^2$ и $T^{s,p} = |t^{s,p}|^2$.

3. Результаты и обсуждение. Прежде всего рассмотрим случай $a(x) = \text{const}$, $\sigma(x) = \left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{d} \right) x + \sigma_{\min}$, т.е. КС с постоянной амплитудой периодичности и линейным профилем изменения периода идентичности.

На рис.1а представлена зависимость коэффициента отражения R от длины волны λ . Штриховая линия соответствует случаю $a(x) = \text{const}$, $\sigma(x) = \text{const}$, т.е. идеально-периодической среде. Из рисунка видно, что существует ограниченная область длины волны падающего света, где коэффициент отражения максимален: $R \approx 1$. Она называется областью дифракционного отражения и аналогична области брэгговского отражения рентгеновских лучей от кристаллических плоскостей (ее еще называют "запрещенной зоной" - в терминах зонной теории твердого тела). Кривая 1 рис.1а отвечает структуре с $a(x) = \text{const}$, $\sigma(x) \sim x$. Из рисунка видно, что в квазипериодической системе, как и в периодической, возникает запрещенная зона. Более того градиент периода идентичности приводит как к смещению

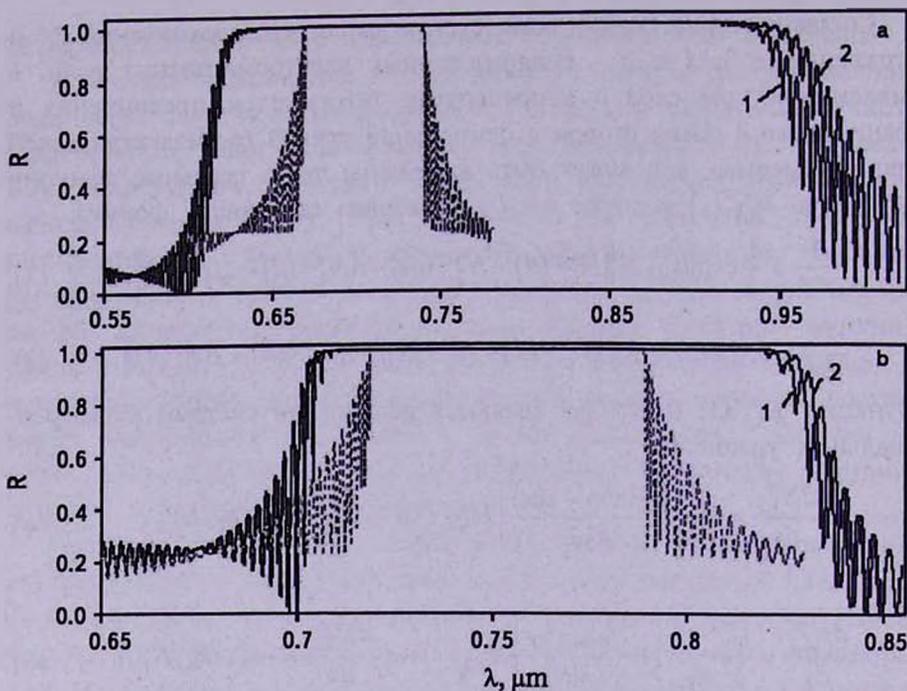


Рис.1. Зависимость коэффициента отражения R от длины волны λ . а: штриховая кривая; $a(x) = \text{const} = 0.5$, $\sigma(x) = \text{const} = 0.42\mu\text{m}$, кривая 1; $a(x) = \text{const} = 0.5$, $\sigma(x) = \left(\frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}{d}\right)x + \sigma_{\text{min}}$, кривая 2; $a(x) = \text{const} = 0.5$, $\sigma(x) = \gamma e^{\beta x}$. б: штриховая кривая; $a(x) = \text{const} = 0.5$, $\sigma(x) = \text{const} = 0.42\mu\text{m}$, кривая 1; $\sigma(x) = \text{const} = 0.42\mu\text{m}$, $a(x) = \left(\frac{a_{\text{max}} - a_{\text{min}}}{d}\right)x + a_{\text{min}}$, кривая 2; $\sigma(x) = \text{const} = 0.42\mu\text{m}$, $a(x) = \chi e^{\nu x}$. Остальные параметры таковы: $d = 44\mu\text{m}$; $\epsilon_0 = 2.25$; $\sigma_{\text{min}} = 0.38\mu\text{m}$; $\sigma_{\text{max}} = 0.46\mu\text{m}$; $a_{\text{min}} = 0.25$; $a_{\text{max}} = 0.75$; $\gamma = 0.38\mu\text{m}$; $\beta = 0.00434\mu\text{m}^{-1}$; $\chi = 0.25$; $\nu = 0.02497\mu\text{m}^{-1}$.

области брэгговского отражения, так и к ее существенному уширению.

Приведем формулы для ширины, а также центральной длины волны запрещенной зоны для идеально-периодической и квазипериодической одномерных сред. При $a(x) = a = \text{const}$, $\sigma(x) = \sigma = \text{const}$ диэлектрическую проницаемость $\epsilon(x)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\epsilon(x) = \sum_{l=-2}^2 \epsilon^{(l)} e^{-i\frac{2\pi}{\sigma} lx}, \quad (7)$$

где

$$\epsilon^{(0)} = \epsilon_0 \left(1 + \frac{a}{2}\right), \quad \epsilon^{(1)} = \epsilon^{(-1)} = 0 \quad \text{и} \quad \epsilon^{(2)} = \epsilon^{(-2)} = -\frac{a\epsilon_0}{4}.$$

Ширина запрещенной зоны идеально-периодической среды в двухволновом приближении динамической теории рассеяния электромагнитных волн (см. [14]) выражается через коэффициенты Фурье-

разложения (7) следующим образом:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0 |\varepsilon^{(2)}|}{\varepsilon^{(0)}}, \quad (8)$$

где λ_0 - центральная длина волны запрещенной зоны: $\lambda_0 = \sigma\sqrt{\varepsilon^{(0)}}$. Согласно расчету (рис.1а), запрещенная зона в идеальном случае простирается от $\lambda_1 = 0.668$ мкм до $\lambda_2 = 0.739$ мкм; ширина зоны: $\Delta\lambda \approx 0.07$ мкм. Это же число можно получить из (8), если ввести в формулу значения параметров ε_0 , σ , a . Формулу (8) можно написать иначе, если ввести в нее эффективные коэффициенты преломления:

$$n_{1,2}^{eff} = \sqrt{\varepsilon^{(0)}} \left(1 \pm \frac{|\varepsilon^{(2)}|}{2\varepsilon^{(0)}} \right). \quad (9)$$

Тогда для центральной длины волны и ширины запрещенной зоны получим: $\lambda_0 = n\sigma$ и $\Delta\lambda = \Delta n\sigma$, где n и Δn - средний коэффициент преломления и двулучепреломления среды, соответственно.

Для КС с параметрами $a(x) = a$, $\sigma(x) = \left(\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{d} \right)x + \sigma_{min}$ запрещенная зона простирается от $\lambda_1 = 0.62$ мкм до $\lambda_2 = 0.95$ мкм ($\Delta\lambda = 0.33$ мкм). Казалось бы, что в этом случае ширину запрещенной зоны приближенно можно рассчитать по формуле $\Delta\lambda \approx n_1^{eff} \sigma_{max} - n_2^{eff} \sigma_{min}$. Однако вычисления показывают, что это не так. Наши исследования зависимости функции R от λ показали, что при наличии градиента периода идентичности ширина запрещенной зоны описывается формулой

$$\Delta\lambda = n_1^{eff} \sigma_{max} + n \left(\frac{d\sigma}{dx} \right) \Delta x - n_2^{eff} \sigma_{min}, \quad (10)$$

где $d\sigma/dx$ - градиент периода идентичности, Δx - ширина той части слоя, где имеется градиент параметра модуляции.

Рассмотрим теперь случай $\sigma(x) = \text{const}$, $a(x) = \left(\frac{a_{max} - a_{min}}{d} \right)x + a_{min}$, когда линейно изменяется амплитуда периодичности. На рис.1б (кривая 1) представлена зависимость коэффициента отражения от длины волны, соответствующая этому случаю (штриховая кривая, как и на рис.1а, отвечает случаю $a(x) = \text{const}$, $\sigma(x) = \text{const}$). Из графика видно, что запрещенная зона простирается от $\lambda_1 = 0.634$ мкм до $\lambda_2 = 0.896$ мкм ($\Delta\lambda = 0.262$ мкм). При наличии градиента амплитуды периодичности, как и в предыдущем случае, происходит смещение области брэгговского отражения и ее уширение. Исследование зависимости $R = R(\lambda)$ показывает, что ширина запрещенной зоны и среднее значение коэффициента преломления выражаются следующими приближенными формулами:

$$\Delta\lambda = \frac{\sigma\bar{a}}{4} \left(n + \frac{da}{dx} \Delta x \right), \quad (11)$$

$$n = \left[\varepsilon_0 \left(1 + \frac{\bar{a}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{a}}{2} \right)^2 \frac{da}{dx} \Delta x \right) \right]^{1/2}, \quad (12)$$

где da/dx - градиент амплитуды периодичности, $\bar{a} = [(a_{max}^2 + a_{min}^2)/2]^{1/2}$.

В качестве другой модели квазипериодичности рассмотрим системы с экспоненциальным профилем изменения параметров модуляции: $a(x) = \chi e^{\nu x}$, $\sigma(x) = \gamma e^{\beta x}$ (постоянные χ , ν и β , γ подбираются таким образом, чтобы функции $a(x)$, $\sigma(x)$ изменялись в тех же пределах, что и в линейном случае).

На рис. 1а (кривая 2) представлена зависимость R от λ в случае, когда $a(x) = \text{const}$, $\sigma(x) = \gamma e^{\beta x}$. Из рисунка видно, что при известных значениях параметров β , γ использование экспоненциальной функции $\sigma(x)$ вместо линейной приводит к незначительному изменению местоположения и ширины запрещенной зоны.

На рис. 1б (кривая 2) представлена зависимость от λ для модели КС с $\sigma(x) = \text{const}$, $a(x) = \chi e^{\nu x}$. Видно, что при экспоненциальном профиле изменения амплитуды периодичности имеет место меньшее уширение запрещенной зоны, чем при линейном.

4. Заключение. Таким образом, нами исследовано рассеяние электромагнитной волны в 1D КС с заданным законом диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$. В качестве простой функции $\varepsilon(x)$, описывающей КС, использована гармоническая функция с амплитудной и фазовой модуляцией. Расчеты показывают, что как при линейном, так и при экспоненциальном профиле изменения параметров модуляции возникает запрещенная зона. При определенных условиях запрещенная зона может быть намного шире, чем соответствующая зона периодической среды. В случае линейной зависимости параметров модуляции от x получены простые приближенные формулы для ширины и центральной длины волны запрещенной зоны, которые хорошо аппроксимируют результаты численных расчетов. Отметим, что такого типа расчеты нами проведены, по-видимому, впервые. В недавно опубликованной работе [19] рассмотрен идеально периодический 1D ФК, представляющий собой чередующиеся идентичные слои с градиентным и изотропным профилем изменения параметров модуляции в пределах отдельного слоя.

¹ Ереванский государственный университет, Армения, e-mail: dsedrak@server.physdep.r.am, agevorgyan@ysu.am, vbadal@server.physdep.r.am

² Государственный инженерный университет, Армения, e-mail: akhachat@www.physdep.r.am

ELECTROMAGNETIC WAVE DISSIPATION IN ONE-DIMENSIONAL QUASIPERIODIC MEDIUM

D.M.SEDRAKIAN¹, A.A.GEVORGYAN¹, A.Zh.KHACHATRIAN²,
V.D.BADALYAN¹

The nature of the transfer of electromagnetic radiation through the isotropic quasiperiodic medium of finite sizes with the parameters of dielectric permittivity varying linearly or exponentially in one direction is investigated. It is shown that the quasiperiodicity of dielectric properties results in the formation of forbidden zone which is much wider than the corresponding zone for ideally periodic media. Simple approximate formulas for the width and the central length of the forbidden zone wave are presented.

Key words: *Radiation: electromagnetic: dissipation*

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Борн, Э.Вольф, Основы оптики, Наука, М., 1970.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Электродинамика сплошных сред. Наука, М., 1982.
3. J.D.Joannopoulos, R.D.Meade, J.N.Winn, Photonic Crystals. U. Princeton Press, Princeton, N.J., 1995.
4. E.Yablonovich, Phys. Rev. Lett., 58, 2059, 1987.
5. S.John, Phys. Rev. Lett., 58, 2486, 1987.
6. J.Pendry, J.Mod, Opt., 41, 209, 1994.
7. В.А.Амбарцумян, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
8. В.А.Амбарцумян, ЖЭТФ, 13, 323, 1943.
9. И.М.Лифшиц, С.А.Гредескул, Л.А.Пастур, Введение в теорию неупорядоченных систем, Наука, М., 1982.
10. Н.А.Хижняк, Интегральные уравнения макроскопической электродинамики, Наукова думка, Киев, 1988.
11. В.И.Кляцкин, Метод погружения в теории распространения волн, Наука, М., 1986.
12. В.В.Бабиков, Метод фазовых функций в квантовой механике, Наука, М., 1989.
13. Л.М.Бреховских, А.О.Годин, Акустика слоистых сред, Наука, М., 1989.
14. А.Яриш, П.Юх, Оптические волны в кристаллах, Мир, М., 1987.
15. P.Yeh, Optical waves in Layered Media, N.Y., Wiley and Sons, 1988.
16. Д.М.Седракиан, А.А.Геворгян, А.Ж.Хачатрян, Астрофизика, 43, 269, 2000.
17. D.M.Sedrakian, A.H.Gevorgyan, A.Zh.Khachatrian, Opt. Commun., 192, 135, 2001.
18. D.M.Sedrakian, A.Zh.Khachatrian, Ann. Phys. (Leipzig), 11, 3; 2002.
19. Zhi-Fang Sang, Zhen-Ya Li, Opt. Commun., 259, 174, 2006.