АСТРОФИЗИКА

ТОМ 49 АВГУСТ, 2006 ВЫПУСК 3

УДК: 524.7

АНИЗОТРОПНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ S-ЭЛЛИПСОИДЫ РИМАНА ВНУТРИ СФЕРОИДАЛЬНОГО ГАЛО. II

М.Г.АБРАМЯН

Поступила 15 мая 2006
Принята к печати 9 июня 2006

Обобщены классические S-эллипсоиды Римана с учетом феррерсовой неоднородности распределения массы, трехмерной анизотропии дисперсии скоростей и гравитации сфероидального гало. Феррерсова неоднородность распределения массы не влияет на условия равновесия эллипсоидов, а лишь изменяет численные коэффициенты у равновесных параметров. Анизотропия дисперсии скоростей меняет условия равновесия, расширяя или ограничивая области существования вложенных эллипсоидов. Гало расширяет эту область во всех случаях.

1. *Введение.* Наблюдательные свидетельства о существовании трехосных галактик, а также многие нерешенные проблемы динамики звездных систем заставляют искать новые обобщения классических однородных и изотропных эллипсоидов Римана, которые заново были исследованы и систематизированы методом тензорных уравнений вириала Чандрасекаром [1].

Обобщения теории эллипсоидальных фигур равновесия вращающейся гравитирующей массы проводились с учетом наличия вмороженного магнитного поля [2,3], гравитирующего гало [4-6], неоднородности распределения массы [7,8], анизотропии дисперсии скоростей [9-11], нелинейности характера поля внутренних течений [12,13].

Для сфероидов Маклорена, связь угловой скорости Ω с геометрией (полуоси $a_1 = a_2 \equiv a \neq a_3$) выражается формулой

$$\Omega^2/\pi G \rho = 2\left(1 - a_3^2/a^2\right)B_{13}\,, \tag{1}$$

где ρ - однородная плотность массы,

$$A_{ik\ldots} = \int\limits_0^\infty \frac{a_1 a_2 a_3 ds}{\Delta^2(s)\left(a_i^2 + s\right)\left(a_k^2 + s\right)\ldots}; \quad \Delta^2(s) = \prod_{l=1}^{3}\left(a_l^2 + s\right); \quad B_{ik} = A_k - a_i^2 A_{ik} \tag{2}$$

- индексные символы Чандрасекара.

Если вместо однородной вложенной подсистемы рассмотреть неоднородную подсистему с феррерсовым законом изменения плотности массы [7]:

$$\rho(x)=\rho_c\left(1-m^2\right)^n, \quad m^2=\sum_{l=1}^{3} x_l^2/a_l^2, \quad (n\geq 0), \tag{3}$$

где ρ_c - центральная плотность, n - целое число, определяющее степень концентрации массы к центру системы, то вместо (1) получается уравнение, отличающееся исходной лишь численным коэффициентом [9-11]:

$$\frac{\Omega^2}{\pi G \rho_c}=K_n\left(1-c^2\right)B_{13}, \tag{4}$$

где

$$K_n=\frac{2^n}{n+1}\frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n+2)}{(2n+7)(2n+9)\ldots(4n+5)}. \tag{5}$$

Поэтому учет неоднородности массы в рамках класса моделей (5) не меняет критические сплюснутости динамически и секулярно устойчивых сфероидов Маклорена.

Наблюдаемая анизотропия дисперсии скоростей звезд в галактиках [14] заставляет ввести в классическую теорию фигур равновесия гравитирующих масс фактор анизотропии давления. Впервые он был учтен в работе [9-11], где в рамках биаксиальной анизотропии (дисперсия скоростей изотропна в плоскости вращения и отличается от дисперсии скоростей вдоль оси вращения сфероида: $\beta\equiv\sigma_1^2/\sigma_3^2\neq 1$) было показано, что существует определяемое уравнением

$$B_{11}-A_1+\beta_k c^2 A_3=0 \tag{6}$$

критическое значение параметра анизотропии β_k, выше которого сфероидальные фигуры неустойчивы относительно к барообразующим колебаниям и переходят в трехосные эллипсоиды. Однако это значение β_k превосходит наблюдаемое отношение соответствующих дисперсий скоростей в Галактике. Предположение о наличии массивного гало у Галактики тоже не разрешает проблему, так как, оказывается, гало не меняет критерий вековой неустойчивости анизотропного сфероида [15].

Неоднородные модели S-эллипсоидов Римана с анизотропным давлением были рассмотрены нами в работах [16,17], где показаны видоизменения последовательностей самосопряженных эллипсоидов, а также сильное изменение свойств эллипсоидов Якоби, Дедекинда, Маклорена и условий их устойчивости. В этих работах мы фиксировали отношение плотностей гало и вложенной подсистемы. Здесь будет фиксировано отношение масс гало и вложенной подсистемы, причем той части массы гало, которая включает в себя вложенную подсистему.

Систематический учет влияния гало на равновесие и устойчивость классических эллипсоидальных фигур равновесия впервые был проведен нами в рамках теории вложенных фигур равновесия в работах

[4-6,16-26]. После опубликования работы [17] я обнаружил статьи [12,13] со сходной постановкой проблемы: - обобщение эллипсоидов Римана с учетом неоднородности массы и трехмерной анизотропии дисперсии скоростей. Некоторые результаты моих работ, относящиеся одиночным эллипсоидам, перекрывались результатами указанной статьи.

В настоящей работе будут изучены вложенные неоднородные S-эллипсоиды с дисперсией скоростей типа:

$$\sigma_1^2 = \theta_1\rho = \sigma_{1c}^2\left(1-m^2\right)^n,\ \ \sigma_2^2 = \theta_2\rho = \sigma_{2c}^2\left(1-m^2\right)^n,\ \ \sigma_3^2 = \theta_3\rho^2 = \sigma_{3c}^2\left(1-m^2\right)^{2n}, \quad (7)$$

где σ_{ic} - дисперсия скоростей вдоль i - ой главной оси в центре эллипсоида. Это соответствует уравнению состояния

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} \theta_1\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3\rho^3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Такое уравнение состояния получается из требования замыкания цепочки моментных уравнений при построении бесстолкновительной гидродинамики для сильно сплюснутых гравитирующих систем (см., например, [27]).

2. *Уравнения равновесного состояния*. Рассмотрим неоднородную и анизотропную по законам (3) и (8) гравитирующую массу в виде трехосного эллипсоида, вращающегося с угловой скоростью Ω вокруг главной оси X_3. Во вращающейся системе отсчета, связанной с главными осями эллипсоида, вещество циркулирует с линейным полем скоростей:

$$u_i = Q_{ij}x_j\,, \quad Q_{ij} = -\lambda\Omega\varepsilon_{ij3}\,a_i/a_j\,, \quad (9)$$

где ε_{ijk} - тензор Леви-Чивита, λ - частота циркуляций вещества в единицах Ω.

Эллипсоид вложен в сфероидальное гало с отношением полуосей меридианного сечения $c_h = a_{h3}/a_h$, где $a_h = a_1 = a_2$; a_3, однородной объемной плотностью ρ_h, массой M_h и внутренним гравитационным потенциалом

$$V_h = -\pi G\rho_h\left(A_h\left(x_1^2+x_2^2\right)+A_3^h x_3^2\right), \quad M_h = \frac{4}{3}\rho_h\,a_h^2 a_{h3}\,,$$

где

$$A^h = 1 - A_3^h/2 = \frac{3}{2}M_h\frac{c_h}{1-c_h^2}\left[\frac{\arcsin\sqrt{1-c_h^2}}{\sqrt{1-c_h^2}} - c_h\right]. \quad (10)$$

Тензорное уравнение вириала второго порядка для относительного равновесия вложенного эллипсоида имеет вид [1,17]

$$2T_{ij}+W_{ij}+W_{ij}^h+\Omega^2\left(I_{ij}-\delta_{i3}I_{3j}\right)+2\varepsilon_{il3}\Omega\int_V\rho\,u_l x_j dV = -U_{ij}\,, \quad (11)$$

где

$$2T_{ij} = \int_V \rho u_i u_j dV = Q_{jm} Q_{jn} I_{mn} \tag{12}$$

-тензор кинетической энергии внутренней циркуляции вещества,

$$W_{ij} = -K_n \pi G \rho_c A_i I_{ij}, \quad W_{ij}^h = -2\pi G \rho_h A_i^h I_{ij} \tag{13}$$

-тензоры собственной гравитационной энергии вложенного эллипсоида и его потенциальной энергии в поле гравитации гало ($A_1^h = A_2^h = 1-(1/2)A_3^h$),

$$I_{ij} = \frac{M_n a_i^2}{2n+5}\delta_{ij} \tag{14}$$

- тензор момента инерции неоднородного эллипсоида массы

$$M_n = 4\pi\rho_c \frac{a_1 a_2 a_3\, 2^n\, n!}{(2n+3)!!}. \tag{15}$$

$$U_{ij} = \int_V p_{ij} dV = \begin{pmatrix} M_{2n}\sigma_{1c}^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{2n}\sigma_{2c}^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_{3n}\sigma_{3c}^2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

- внутренняя "тепловая" энергия, где M_{ln} выражаются формулой (15).

С учетом (12)-(15) уравнение (11) дает

$$\begin{gathered} Q_{lm}Q_{jn}a_m^2\,\delta_{mn} - \left(A_i + bc\gamma_n A_i^h\right)a_i^2\,\delta_{ij} + \Omega^2\left(a_i^2\,\delta_{ij} - a_3^2\,\delta_{3i}\right) + \\ + 2\Omega\varepsilon_{il3}\,Q_{lm}a_m^2\,\delta_{mj} = -\frac{(2n+5)U_{ij}}{K_n \pi G \rho_c M_n}. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь и далее Ω^2 измеряется в единицах $K_n \pi G \rho_c$, и используются обозначения

$$\begin{gathered} b = \frac{a_2}{a_1}, \quad c = \frac{a_3}{a_1}, \quad M_{l,k} \equiv \frac{M_{ln}}{M_{kn}} = \frac{2^{(l-k)n}(ln)!(2kn+3)!!}{(kn)!(2ln+3)!!}, \\ \gamma_n = \frac{3\cdot 2^{n+1}\, n!}{c_h K_n (2n+3)!!}\frac{M_h}{M_n}. \end{gathered} \tag{18}$$

С учетом (9), (18) уравнения (17) в компонентах представим в виде

$$\Omega^2\left(1+\lambda^2\right) + 2\lambda\Omega^2 b = \left(A_1 + bc\gamma_n A^h\right) - \left(A_3 + bc\gamma_n A_3^h\right)c^2\alpha_n, \tag{19}$$

$$\Omega^2\left(1+\lambda^2\right)b^2 + 2\lambda\Omega^2 b = \left(A_2 + bc\gamma_n A^h\right)b^2 - \left(A_3 + bc\gamma_n A_3^h\right)c^2\beta_n, \tag{20}$$

$$\left(A_3 + bc\gamma_n A_3^h\right)c^2 = \frac{(2n+5)}{K_n \pi G \rho_c a_1^2} M_{3,1}\,\sigma_{3c}^2, \tag{21}$$

где введены параметры анизотропии дисперсии скоростей в центре модели:

$$\alpha_n = M_{2,3}\,\sigma_{1c}^2/\sigma_{3c}^2, \quad \beta_n = M_{2,3}\,\sigma_{2c}^2/\sigma_{3c}^2. \tag{22}$$

Из (19) и (20) следует

$$\begin{gathered} \left(1+\lambda^2\right)\Omega^2 = B_{12} + bc\gamma_n A^h + \left(A_3 + bc\gamma_n A_3^h\right)\frac{c^2(\beta_n - \alpha_n)}{1-b^2} \equiv \Omega_J^2, \\ 2\lambda\Omega^2 = bA_{12} - \left(A_3 + bc\gamma_n A_3^h\right)\frac{c^2\left(\beta_n - b^2\alpha_n\right)}{b\left(1-b^2\right)} \equiv J, \end{gathered} \tag{23}$$

откуда для частоты циркуляции вещества λ получаем уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda\,\Omega_J^2/J + 1 = 0\,, \tag{24}$$

инвариантное относительно преобразования $\lambda \to \lambda^{-1}$, что соответствует теореме Дедекинда о сопряженных конфигурациях эллипсоидов [1]. Следовательно, эта теорема справедлива также для неоднородных и анизотропных вложенных эллипсоидов.

Области возможных геометрий обобщенных S-эллипсоидов Римана в плоскости b, c получаются из условий действительности Ω и λ, которые дают:

$$\Omega_J^2 \geq |J|\,. \tag{25}$$

Классические S-эллипсоиды Римана в плоскости b, c ограничены сверху последовательностью самосопряженных эллипсоидов с отрицательной циркуляцией вещества $\lambda = -1$, а снизу - последовательностью самосопряженных эллипсоидов с положительной циркуляцией вещества $\lambda = 1$. Эта область разделяется на две части ($\lambda < 0$ и $\lambda > 0$) последовательностью безвихревых ($\lambda = 0$) эллипсоидов Якоби. В рассматриваемом случае уравнениям последовательностей самосогласованных эллипсоидов $\lambda = \pm 1$ соответствует равенство в (25) со знаками "+" и "-":

$$B_{12} + bA_{12} + bc\,\gamma_n\,A^h - \left(A_3 + bc\,\gamma_n\,A_3^h\right)\frac{c^2}{1+b}\left(\frac{\beta_n}{b} + \alpha_n\right) = 0\,, \quad (\lambda = -1) \tag{26}$$

$$B_{12} - bA_{12} + bc\,\gamma_n\,A^h + \left(A_3 + bc\,\gamma_n\,A_3^h\right)\frac{c^2}{1-b}\left(\frac{\beta_n}{b} - \alpha_n\right) = 0\,, \quad (\lambda = +1). \tag{27}$$

Геометрия же и угловая скорость неоднородных и анизотропных вложенных эллипсоидов Якоби определяются соответственно уравнением $J = 0$ и Ω_J:

$$bA_{12} - \left(A_3 + bc\,\gamma_n\,A_3^h\right)\frac{c^2\left(\beta_n - b^2\,\alpha_n\right)}{b\left(1-b^2\right)} = 0\,. \tag{28}$$

В общем случае частота внутренних циркуляций λ и угловая скорость вложенных анизотропных эллипсоидов определяются формулами

$$\lambda = \frac{\sqrt{\Omega_J^2 + J} - \sqrt{\Omega_J^2 - J}}{\sqrt{\Omega_J^2 + J} + \sqrt{\Omega_J^2 - J}}\,, \tag{29}$$

$$\Omega = \left(\sqrt{\Omega_J^2 + J} + \sqrt{\Omega_J^2 - J}\right)\Big/2\,. \tag{30}$$

Очевидно, угловые скорости эллипсоидов последовательностей $\lambda = \mp 1$ равны $\Omega_{J,\pm 1}/\sqrt{2}$, где в выражение Ω_J следует ввести решения уравнений (26) и (27).

3. *Области равновесных фигур в плоскости* (α_n, β_n). Условия

равновесия (19)-(21) ограничивают значения параметров анизотропии, что наглядно представляется графически в плоскости (α_n, β_n). Так как область равновесных фигур ограничена последовательностями $\lambda = \mp 1$, то из (26) и (27) видно, что в рассматриваемой плоскости они изображаются прямыми, которые пересекают ось β_n в точках β_{-1} и β_{+1}, где

$$\beta_{\mp 1} = b\frac{(bA_2 \pm A_1) \pm bc\,\gamma_n\,A_3^h(1 \pm b)}{c^2\left(A_3 + bc\,\gamma_n\,A_3^h\right)}, \quad \beta_0 = \frac{b^2(A_2 - A_1)}{c^2\left(A_3 + bc\,\gamma_n\,A_3^h\right)}. \tag{31}$$

Здесь приведена также координата β_0 точки пересечения последовательности Якоби с осью β. Все три прямые пересекаются в точке P с координатами

$$\alpha_P = \frac{A_1 + bc\,\gamma_n\,A_3^h}{\left(A_3 + bc\,\gamma_n\,A_3^h\right)c^2}, \quad \beta_P = \frac{\left(A_2 + bc\,\gamma_n\,A_3^h\right)b^2}{\left(A_3 + bc\,\gamma_n\,A_3^h\right)c^2}. \tag{32}$$

Из (31) и (32) видно, что $\beta_{-1} > \beta_P > \beta_0 > \beta_{+1}$. На графике рис.1 приведены области возможных значений α и β, необходимых для равновесия одиночного (прерывистые линии) и вложенного внутри сферическое гало с $\gamma_n \neq 0$ (сплошные линии) эллипсоида заданной геометрии. С изменением геометрии эллипсоида размеры этих равносторонних треугольников меняются. Заметим, что гало расширяет эту область. При относительных плотностях гало с $\gamma_n \geq (bA_2 - A_1)/A_3^h bc(1-b)$ значение β_{+1} становится отрицательным.

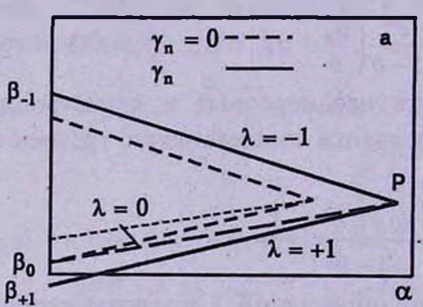


Рис.1a. Области значений α_n и β_n для одиночного (прерывистые линии) и вложенного внутри сферического гало с $\gamma_n \neq 0$ (сплошные линии) эллипсоида данной геометрии.

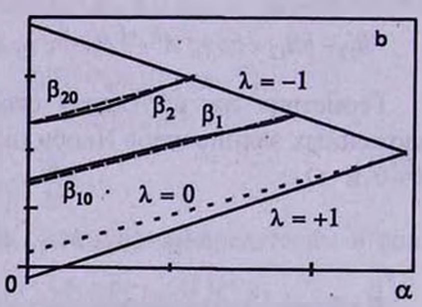


Рис.1b. Области устойчивости анизотропных эллипсоидов, вложенных внутри сферического гало (прерывистые линии β_{10}, β_{20}) и сфероидального гало (полоска между линиями β_1, β_2).

4. *Сфероидальные фигуры* $a_1 = a_2 = a$; $b = 1$. Из (19), (20) видно, что для этих фигур дисперсия скоростей должна быть изотропной в плоскости вращения: $\alpha_n = \beta_n$. В инерциальной системе отсчета сфероидальные фигуры вращаются с угловой скоростью

$$\Omega_{Mc}^2 = 1 + c\,\gamma_n - \left(A_3 + c\,\gamma_n\,A_3^h\right)\left(1/2 + \beta_n c^2\right). \tag{33}$$

Соотношение (21) дает дисперсию скоростей вдоль оси вращения фигуры, а (26)-(28) - отношение полуосей тех сфероидов, от которых ответвляются последовательности изотропных в плоскости вращения самосопряженных эллипсоидов $\lambda = \mp 1$, и сфероида бифуркации $\lambda = 0$ соответственно:

$$A_1 + c\gamma_n A^h - \left(A_3 + c\gamma_n A_3^h\right)c^2 \beta_n = 0, \quad \lambda = -1, \tag{34}$$

$$A_1 - 2A_{11} + c\gamma_n A^h + \left(A_3 + c\gamma_n A_3^h\right)c^2 \beta_n = 0, \quad \lambda = +1, \tag{35}$$

$$A_{11} - \left(A_3 + c\gamma_n A_3^h\right)c^2 \beta_n = 0, \quad \lambda = 0. \tag{36}$$

Из (34) и (23) видно, что последовательность самосопряженных эллипсоидов с $\lambda = -1$ ответвляется от покоящейся фигуры. В классической теории такой фигурой является сфера. При наличии сфероидального гало эта фигура имеет форму сфероида [4-6]. В анизотропном случае, в зависимости от меры сплюснутости гало и его относительной массы γ_n, всегда существует значение β_n, при котором эта фигура является сферой. На графике рис.2 кривые представляют зависимость меры анизотропии β_n покоящейся сферы от отношения полуосей гало c_h при разных значениях относительной плотности.

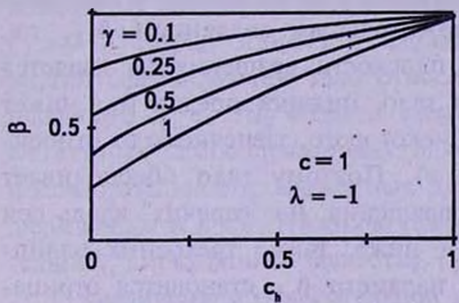


Рис.2. Зависимость β_n вложенной сферы от меры сплюснутости гало с γ_n = 0; 0.25;0.5;1.

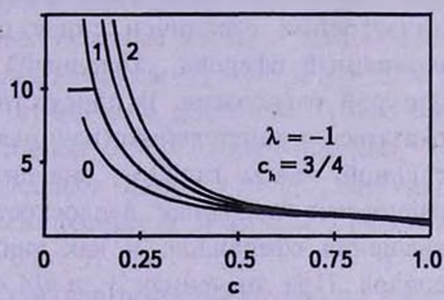


Рис.3a. Зависимость $\beta_n(c)$ для покоящихся сфероидов, вложенных внутри гало с $c_h = 3/4$ и γ_n = 0; 0.25; 1; 2.

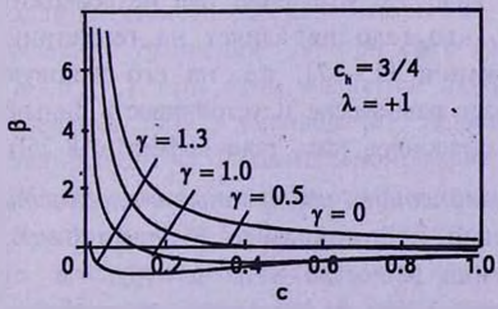


Рис.3b. Зависимость $\beta_n(c)$ для сфероидов $\lambda = +1$ внутри гало с $c_h = 3/4$ и γ_n = 0; 0.5; 1; 1.3.

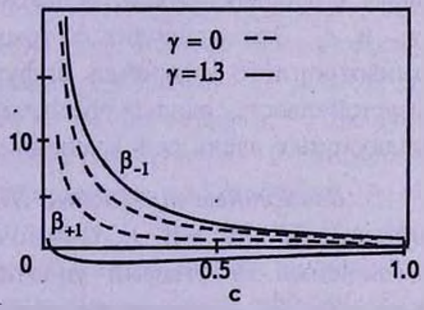


Рис.3c. Области изменения параметра β для одиночного (между прерывистыми линиями) и вложенного внутри гало с $\gamma = 1.3$ и $c_h = 3/4$ эллипсоидов.

В общем случае последовательности самосопряженных эллипсоидов $\lambda = -1$ ответвляются от покоящихся сфероидов, зависимость β_n от сплюснутости которых внутри гало с $c_h = 3/4$ при $\gamma_n = 0; 0.25; 1; 2$, приведена на рис.3а. Все кривые пересекаются в точке $c = c_h$, где параметр анизотропии β_n не зависит от относительной массы гало γ_n и определяется лишь отношением полуосей гало: $\beta_n = \left(1 - 0.5 A_3^h\right) / A_3^h c_h^2$.

Зависимость $\beta_n(c)$ для вложенных сфероидов, от которых ответвляются последовательности изотропных в плоскости вращения самосопряженных эллипсоидов $\lambda = +1$, изображена на рис.3b при значениях относительной массы гало $\gamma_n = 0; 0.5; 1; 1.3$.

Внутри гало данной сплюснутости и относительной массы γ_n сфероиды с отношением полуосей c являются фигурами равновесия, если параметр анизотропии принимает значения из области

$$\beta_{+1} < \beta_n < \beta_{-1}, \tag{37}$$

где $\beta_{\pm 1}$ являются решениями уравнений (35) и (34) соответственно.

На графиках рис.3с кривые представляют зависимости $\beta_{\pm 1}(c)$ для одиночных ($\gamma = 0$) и вложенных внутри гало с $c_h = 3/4$, $\gamma_n = 1.3$ сфероидов. Как следует из графика рис.3с, для одиночного сфероида параметр анизотропии ограничен снизу положительным значением β_{-1}, т.е. одиночный сфероид, "холодный" в плоскости вращения не является фигурой равновесия. В присутствии гало, нижний предел β_{+1} может оказаться отрицательным (начиная с некоторого, зависящего от относительной массы гало γ, значения c). Поэтому гало обеспечивает равновесие "холодных" в плоскости вращения, но "горячих" вдоль оси вращения сфероидов, и как увидим ниже, также трехосных эллипсоидов. При значениях $\gamma_n \geq \pi / 4 A_1^h$ параметр β_{+1} становится отрицательным для всех c.

Уравнение (36) с учетом (21) дает зависимость дисперсии скоростей в плоскости вращения $\sigma_{1c}^2 = \sigma_{2c}^2$ вложенного сфероида бифуркации от меры его сплюснутости. В таком виде это уравнение уже не содержит γ_n и c_h. Это приводит к тому, что гало не влияет на геометрию анизотропного сфероида бифуркации [15-17], т.е. на его вековую неустойчивость, однако обеспечивает равновесие и устойчивость сильно сплюснутых вдоль оси вращения сфероидов (см. "гало-эффект" [18-25]).

5. *Вложенные трехосные S-эллипсоиды, изотропные в плоскости вращения* ($\alpha_n = \beta_n$). Одиночные неоднородные S-эллипсоиды, независимо от степени уплотнения вещества к их центру, т.е. от значения n, в плоскости геометрий (b, c) занимают аналогичные жидким S-эллипсоидам области. Геометрия эллипсоидов $\lambda = \mp 1$ теперь определяется уравнениями

$$B_{12}+bA_{12}+bc\gamma_n A^h-\left(A_3+bc\gamma_n A_3^h\right)\frac{c^2}{b}\beta_n=0\,,\quad (\lambda=-1) \tag{38}$$

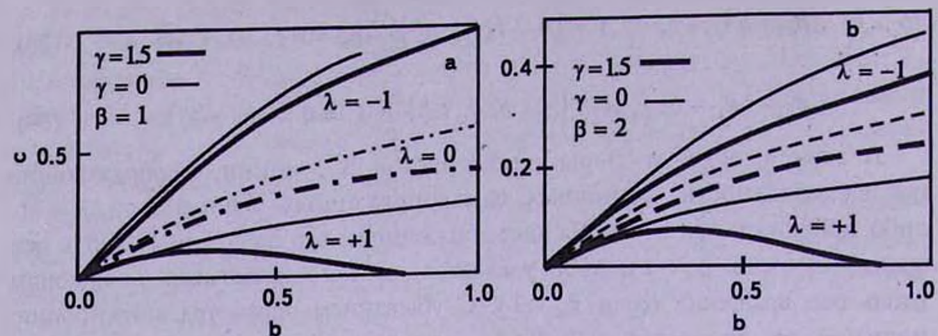
$$B_{12}-bA_{12}+bc\gamma_n A^h+\left(A_3+bc\gamma_n A_3^h\right)\frac{c^2}{b}\beta_n=0\,,\quad (\lambda=+1). \tag{39}$$

В зависимости от меры анизотропии β_n, линии, изображающие последовательности одиночных самосопряженных эллипсоидов $\lambda=\mp1$, либо приближаются к оси абсцисс, сплющивая все эллипсоиды вдоль оси вращения (если $\beta_n>1$), либо удаляются от него, вытягивая эллипсоиды вдоль оси вращения (если $\beta_n<1$). С убыванием параметра анизотропии, начиная от значения $\beta_n\approx0.42$, нарушаются условия равновесия эллипсоидов $\lambda=-1$ (сначала в области $b=0.32$ - 0.35, $c=1.5$ - 1.7, далее - остальных), а при значении $\beta_n\approx0.26$ - эллипсоидов $\lambda=+1$ в области $b=0.22$ - 0.25, $c=0.35$ - 0.38.

Более сильные изменения терпит область геометрий эллипсоидов в присутствии гало. Если изменения последовательностей эллипсоидов $\lambda=-1$ и $\lambda=0$ имеют лишь количественный характер, то последовательность $\lambda=+1$ меняется качественно. Рис.4 изображает области возможных геометрий изотропных (4a) и анизотропных (4b,c) одиночных ($\gamma=0$ - тонкие линии) и вложенных (жирные линии) эллипсоидов внутри сфероидальное гало относительной массы $\gamma_n=1.5$ и $c_h=3/4$, в плоскости b, c. Эти области сверху ограничены последовательностями вложенных самосопряженных эллипсоидов $\lambda=-1$, ниже которых, до последовательности вложенных эллипсоидов Якоби ($\lambda=0$), занимают эллипсоиды с $\lambda<0$. Нижнюю область заполняют эллипсоиды с положительной циркуляцией вещества ($\lambda>0$).

С увеличением относительной массы гало последовательность $\lambda=+1$ ответвляется от более сплюснутого вдоль оси вращения сфероида. Внутри гало с "относительной массой" $\gamma_{cr}=\pi/4\,A_3^h$ эта последовательность (при $\beta_n\geq0.26$) начинается от круглого диска, а внутри гало с $\gamma_n>\gamma_{cr}$ - от эллиптического диска, отношение полуосей $b_{cr}(\gamma_n)$ которого есть решение уравнения (39) при $c=0$ (рис.4). Все эллиптические диски с $b\geq b_{cr}(\gamma_n)$ при этом являются фигурами равновесия. С ростом γ_n значение $b_{cr}(\gamma_n)$ уменьшается, независимо от значения β_n. При этом эллипсоиды с положительной циркуляцией вещества $\lambda>0$ заполняют область между последовательностями вложенных эллипсоидов $\lambda=+1$, Якоби ($\lambda=0$), Маклорена и частью $b\geq b_{cr}(\gamma_n)$ оси абсцисс (рис.4).

Следует особо отметить, что, как и у вложенных жидких эллипсоидов [18-25], здесь тоже имеет место так называемый "гало эффект". Гало обеспечивает равновесие сильно сплюснутых вдоль оси вращения анизотропных трехосных эллипсоидов и эллиптических дисков (c = 0, $b\geq b_{cr}(\gamma_n)$) с положительной циркуляцией вещества ($\lambda>0$).



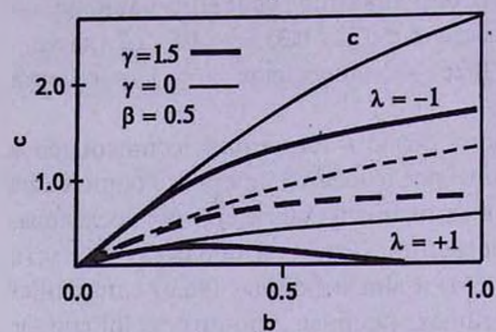


Рис.4. Области геометрий одиночных ($\gamma_n = 0$) и вложенных в сфероидальное гало с $c_h = 3/4$; $\gamma_n = 1.5$ эллипсоидов при значениях параметра анизотропии $\beta_n = 1$ - (4a), $\beta_n = 2$ - (4b), $\beta_n = 0.5$ - (4c).

6. ***Вложенные эллипсоиды с трехмерной анизотропией дисперсии скоростей***. Если давление эллипсоида анизотропное и в плоскости вращения: $\alpha_n \neq \beta_n$, то область геометрий трехосного эллипсоида качественно зависит от следующего: отношение дисперсии скоростей (вдоль большой оси на дисперсию скоростей вдоль малой оси) в плоскости вращения больше ($\alpha_n > \beta_n$), или же меньше ($\alpha_n < \beta_n$) единицы.

Начнем исследование с одиночных анизотропных фигур ($\gamma_n = 0$).

$\alpha_n < \beta_n$. На графике рис.5 представлена характерная область геометрий этих фигур для всех значений параметров $\alpha_n < \beta_n$, за исключением холодных вдоль оси X_1 эллипсоидов ($\alpha_n = 0$), для которых условия равновесия эллипсоидов с $\lambda = -1$ нарушается при $\beta_n \leq 0.39$, эллипсоидов Якоби - при $\beta_n \leq 0.20$, а последовательности $\lambda = +1$ - при $\beta_n \leq 0.04$. Заметим, что последовательности Якоби и $\lambda = +1$ начинаются от круглого диска и заканчиваются иглообразной фигурой. Последовательность $\lambda = -1$ при $\alpha_n > 1$ начинается от сплюснутого покоящегося сфероида, а при $\alpha_n < 1$ - вытянутого.

$\alpha_n > \beta_n$. Область геометрий и свойства анизотропных эллипсоидов сильно меняются, если дисперсия скоростей вдоль большой оси превосходит дисперсию скоростей вдоль малой оси в плоскости вращения эллипсоида. Сфероиды при этом уже не являются фигурами равновесия. Все последовательности эллипсоидов начинаются от трехосного эллипсоида (назовем его вырожденным), геометрия которого определяется значениями α_n и β_n, и заканчиваются иглообразной фигурой (рис.5b - *тонкие линии).* Здесь также при $\alpha_n < 1$ вырожденный эллипсоид вытянут вдоль оси вращения. При заданном значении α_n с уменьшением β_n область геометрий сжимается к началу координат до некоторого, зависящего от α_n значения β_n, ниже которого эллипсоиды с $\lambda = -1$ перестают быть фигурами равновесия, при еще меньших значениях β_n - нарушаются условия равновесия эллипсоидов с $\lambda = 0$. Например, при $\alpha_n = 1.5$ первое имеет место при $\beta_n \le 0.21$, а второе - при $\beta_n \le 0.176$.

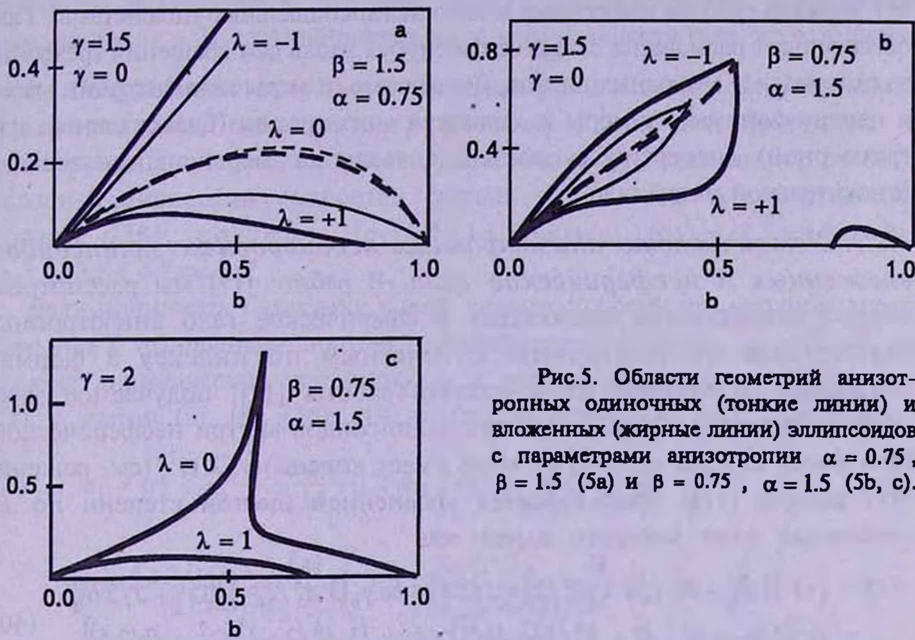


Рис.5. Области геометрий анизотропных одиночных (тонкие линии) и вложенных (жирные линии) эллипсоидов с параметрами анизотропии $\alpha = 0.75$, $\beta = 1.5$ (5a) и $\beta = 0.75$, $\alpha = 1.5$ (5b, c).

Заметим, что в отсутствие гало, ни при каких значениях параметров анизотропии двухосные в плоскости вращения диски, а также близкие к ним сильно сплюснутые вдоль оси вращения трехосные эллипсоиды не являются фигурами равновесия.

Присутствие гало вновь резко меняет ситуацию.

$\alpha_n < \beta_n$. Независимо от значения α последовательность вложенных эллипсоидов $\lambda = +1$ начинается от эллиптического диска $c = 0$, $b_{cr}(\gamma_n)$, поэтому эллипсоиды с $\lambda > 0$ заполняют область между кривой $\lambda = +1$, частью $b \ge b_{cr}(\gamma_n)$ оси абсцисс и последовательностью безвихревых эллипсоидов $\lambda = 0$ (рис.5*a*). Изменения эллипсоидов с $\lambda = -1$ и $\lambda = 0$ носят лишь количественный характер.

$\alpha_n > \beta_n$. Здесь также качественные изменения терпит последовательность $\lambda = +1$. С ростом γ увеличиваются отношения полуосей вырожденного эллипсоида, который порождает последовательности $\lambda = \pm 1$, $\lambda = 0$, а область эллипсоидов $\lambda > 0$ расширяется, охватывая эллипсоиды с меньшими значениями c и большими b. Параллельно, в районе $b \approx 1$, $c \approx 0$ возникает область сильно сплюснутых вдоль оси вращения и слабо сплюснутых в плоскости вращения трехосных эллипсоидов (рис.5b), которая с ростом γ расширяется. При относительной массе гало $\gamma_n = 2$ область геометрий вложенных эллипсоидов имеет вид, представленный на рис.5c. На рис.5b, c приведены кривые, представляющие последовательности вложенных эллипсоидов $\lambda = \pm 1$, $\lambda = 0$ в случае $\alpha_n = 1.5$, $\beta_n = 0.75$. Приведенные исследования показывают всеобщность характера установленного нами в [18-25] эффекта гало на вложенные в него эллипсоидальные подсистемы. Гало обеспечивает равновесие сильно сплюснутых вдоль оси вращения трехосных эллипсоидов и двухосных дисков, независимо от меры концентрации массы к центру системы, от меры и характера анизотропии (биаксиальной, или трехмерной) дисперсии скоростей, а также от меры сплюснутости и относительной массы гало.

*7. **Устойчивость анизотропных неоднородных эллипсоидов, вложенных в несферическое гало***. В работе [17] мы рассмотрели вопрос устойчивости вложенных в сферическое гало анизотропных эллипсоидов по отношению к нечетным по индексу 3 формам колебаний. В отличие от результата работы [17], получаемое здесь характеристическое уравнение для эллипсоидов внутри несферического гало имеет корень $\omega^2 = \lambda^2\Omega^2$, и не имеет корень $\omega^2 = \Omega^2$ (см. решения (41) раборы [17]). Оно является уравнением шестой степени по ω, свободный член которого имеет вид

$$\begin{aligned} T \approx & \left[\Omega^2\left(2B_{13} + bc\gamma_n\left(1 + A_3^h/2\right) + J/2b\right) + bc\gamma_n\left(3A_3^h/2 - 1\right)\left(\Omega^2 + J/2b\right)\right]\times \\ & \times\left[\Omega^2\left(2B_{23} + bc\gamma_n\left(1 + A_3^h/2\right) + Jb/2\right) + bc\gamma_n\left(3A_3^h/2 - 1\right)\left(\Omega^2 + Jb/2b\right)\right]. \end{aligned} \tag{40}$$

В случае сферического гало ($A_3^h = 2/3$) последние члены в скобках обращаются в нуль: получаем выражение для свободного члена характеристического уравнения (42) работы [17] с тем лишь отличием, что здесь фиксировано отношение массы гало на массу вложенного эллипсоида (γ), вместо отношения их плотностей (κ).

Геометрическое место точек границы устойчивости вложенных эллипсоидов внутри несферического гало, относительно нечетных форм колебания, определится условием обращения в нуль свободного члена (40):

$$4B_{13} + A_{12} - \left(A_3 + bc\gamma_n A_3^h\right)\frac{c^2}{b^2}\frac{\beta - \alpha b^2}{1 - b^2} + bc\gamma_n\left[4A_3^h + \left(3A_3^h - 2\right)\lambda/b\right] = 0;$$

или (41)

$$4B_{23} + b^2A_{12} - \left(A_3 + bc\gamma_n A_3^h\right)c^2\frac{\beta - \alpha b^2}{1 - b^2} + bc\gamma_n\left[4A_3^h + \left(3A_3^h - 2\right)\lambda b\right] = 0,$$

где была использована вторая формула (23).

Из общего вида полученных соотношений для устойчивости следует, что сплюснутость, или вытянутость (несферичность) гало может привести к нестабильности лишь в области вложенных эллипсоидов с отрицательной циркуляцией вещества ($\lambda < 0$), которые, как видим, характеризуются умеренными значениями сплюснутости вдоль оси вращения (c). Полоса неустойчивости в плоскости α, β для эллипсоидов внутри сферического гало, представленная на рис.1b (см. также [17]), несколько деформируется в случае несферического гало. В области же сильно сплюснутых вдоль оси вращения эллипсоидов, которые имеют положительные внутренние циркуляции ($\lambda > 0$), неустойчивость из-за несферичности гало, не возникает.

8. *Обсуждение результатов*. Применим полученные результаты к эллипсоидам, сплюснутости которых вдоль оси вращения и анизотропия дисперсий скоростей такие же, что у Галактики: $c \approx 0.067$. Усредняя дисперсии скоростей разных типов звезд в окрестностях Солнца [28], получаем $\langle\sigma_1\rangle \approx 15.1 \pm 5.3$ км/с, $\langle\sigma_2\rangle \approx 22.8 \pm 9.6$ км/с, $\langle\sigma_3\rangle \approx 12.6 \pm 4.7$ км/с.

Если принимать Галактику в виде сильно сплюснутого неоднородного сфероида с отношением полуосей меридианного сечения $c_G \approx 0.067$, то условия динамической устойчивости и равновесия вдоль оси вращения (21), с учетом (5), (8), (16), (18) в области солнечной окрестности дают

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \geq \frac{K_n \pi G \rho_\odot a^2}{(2n+5) M_{2,1}} \left(2A_{11} - A_1 - \frac{3c\, 2^{n+1} n!}{c_h K_n (2n+3)!!} \frac{M_h}{M_n} A_h \right), \qquad (42)$$

$$\sigma_3^2 = \frac{K_n \pi G \rho_\odot c^2 a^2 M_n}{(2n+5) M_{3,1}} \left(A_3 + \frac{3c\, 2^{n+1} n!}{c_h K_n (2n+3)!!} \frac{M_h}{M_n} A_3^h \right) \left(1 - \frac{r_\odot^2}{a^2} \right)^n. \qquad (43)$$

В отсутствие гало в случае однородного распределения массы ($n = 0$) эти формулы, с учетом $\rho_\odot \approx 7 \cdot 10^{-24}$ г/см^3, $r_\odot \approx 10$ кпк, $a \approx 15$ кпк, для окрестности Солнца дают: $\sigma_1 \geq 72$ км/с, $\sigma_3 = 31$ км/с, которые находятся в сильном несоответствии с наблюдениями. Наличие гало понижает нижний предел σ_1, но увеличивает (хотя незначительно) значение σ_3. Например, учет гало с относительной массой $M_h/M_n \approx 1$ дает: $\sigma_1 \geq 24$ км/с и практически не меняет σ_3. Так что в рамках однородной модели, гало не устраняет несоответствие теории с наблюдениями. Учет неоднородности массы дает близкие к наблюдениям результаты. Например, формулы (42), (43) для одиночного сфероида с $n = 1$, $c = 0.067$ дают: $\sigma_1 \geq 46.3$ км/с, $\sigma_3 \cong 25.8$ км/с. При этом формула (33) для скорости локального центроида звезд в районе Солнца дает: $V_\odot \simeq 238$ км/с, вместо наблюдаемого 250 км/с. Присутствие сферического гало относительной массы 0.7 приводит к результатам $\sigma_1 \geq 15.8$ км/с и $\sigma_3 \cong 26$ км/с. При этом для скорости локального центроида звезд в районе Солнца получаем оценку 264 км/с.

Физический факультет Ереванского госуниверситета,
Армения, e-mail: mabr49@arminco.com

ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS RIEMANN S-TYPE ELLIPSOIDS IN THE SPHEROIDAL HALO

M.G.ABRAHAMYAN

The classical S-type Riemann ellipsoids are generalized taking into account inhomogeneous density distribution of mass (Ferrers type), three dimensional anisotropy of the velocity dispersion and the gravitation of spheroidal halo. Inhomogeneous density distribution of matter doesn't change equilibrium conditions of ellipsoids. The anisotropy can enlarge or restrict the possible geometries region of ellipsoids, while the halo always enlarges it.

Galaxies: halo: anisotropy

ЛИТЕРАТУРА

1. *С.Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия. Мир, М., 1973.
2. *М.Г.Абрамян*, *Р.С.Оганесян*, Астрон. ж., **50**, 996, 1973.
3. *М.Г.Абрамян*, *Р.С.Оганесян*, Астрофизика, **9**, 401, 1973.
4. *М.Г.Абрамян*, *С.А.Каплан*, Астрофизика, **10**, 565, 1974.
5. *М.Г.Абрамян*, *С.А.Каплан*, Астрофизика, **11**, 191, 1975.
6. *М.Г.Абрамян*, *С.А.Каплан*, Астрофизика, **11**, 319, 1975.
7. *P.H.Roberts*, Astrophys. J., **136**, 1108, 1962.
8. *P.O.Vandervoort*, *O.E.Welly*, Astrophys. J., **263**, 654, 1982.
9. *R.Weigandt*, Astron. Astrophys., **82**, 177, 1980.
10. *R.Weigandt*, Astron. Astrophys., **105**, 326, 1982.
11. *R.Weigandt*, Astron. Astrophys., **106**, 240, 1982.
12. *F.Pacheco*, *G.Pucacco*, *R.Ruffini*, Astron. Astrophys., **161**, 39, 1986.
13. *F.Pacheco*, *G.Pucacco*, *R.Ruffini*, Astron. Astrophys., **210**, 42, 1989.
14. *J.J.Binney*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc, **183**, 501, 1978.

15. *F.Pacheco*, Thesis, Univ. Rome, 1982.
16. *М.Г.Абрамян*, Труды АН КазССР, 1989.
17. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **48**, 613, 2005.
18. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **11**, 121, 1975.
19. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **12**, 177, 1976.
20. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **13**, 253, 1977.
21. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **25**, 173, 1986.
22. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **25**, 342, 1986.
23. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **45**, 125, 2002.
24. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **45**, 251, 2002.
25. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **47**, 657, 2004.
26. *М.Г.Абрамян*, *Д.М.Седракян*, Астрон. ж., **63**, 1089, 1986.
27. *Л.С.Марочник*, *А.А.Сучков*, Галактика, Наука, М., 1984.
28. *К.У.Аллен*, Астрофизические величины. Мир, М., 1977.