

О ВЕСОВЫХ РЕШЕНИЯХ $\bar{\partial}$ -УРАВНЕНИЯ
В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Ф. В. АЙРАПЕТЯН, А. О. КАРАПЕТЯН, А. А. КАРАПЕТЯН

Институт Математики, Национальная Академия Наук Армении
Ереванский государственный университет
E-mails: feliks.hayrapetyan1995@gmail.com; armankar2005@rambler.ru;
annakarapetyan520@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается уравнение $\partial f(w)/\partial \bar{w} = u(w)$ в верхней полуплоскости Π_+ . Для функций u класса C^k ($k = 1, 2, 3, \dots, \infty$) из весовых L^p пространств ($1 \leq p < \infty$) с весовой функцией типа $(Im w)^\alpha \cdot |w + i|^{-\gamma}$, $w \in \Pi_+$, строится семейство решений f_β , зависящее от комплексного параметра β .

MSC2010 number: 32W05; 30H20; 30C40; 30E20.

Ключевые слова: $\bar{\partial}$ -уравнение; весовые пространства гладких функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] приводится обобщение интегральной формулы Коши для гладких функций. А именно, если Ω является ограниченной областью с кусочно-гладкой границей и $f \in C^1(\bar{\Omega})$, то справедлива следующая формула:

$$(1.1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} dm(\zeta), \quad z \in \Omega,$$

где m - двумерная мера Лебега в комплексной области, а

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\zeta = x + iy)$$

представляет собой известный оператор Коши-Римана, обращающийся в 0 на голоморфных функциях. Поскольку первое слагаемое в (1.1) голоморфно в Ω , мы можем заключить, что решение $\bar{\partial}$ -уравнения

$$(1.3) \quad \frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}} = v(z), \quad z \in \Omega,$$

где функция $v \in C^1(\Omega)$ задана, а функция $g \in C^1(\Omega)$ искомая, **может быть** представлено как

$$(1.4) \quad g(z) = -\frac{1}{\pi} \cdot \iint_{\Omega} \frac{v(\zeta)}{\zeta - z} dm(\zeta), \quad z \in \Omega.$$

Уравнение (1.3) играет важную роль во многих задачах комплексного анализа (особенно в случае многих комплексных переменных).

В следующей теореме (см. [2, Теорема 1.2.2]) рассматривается важный случай, когда формула (1.4) действительно даёт решение $\bar{\partial}$ -уравнения.

Теорема 1.1. Пусть Ω - открытое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$ и $v \in C_c^k(\Omega)$, т.е. функция $v \in C^k(\Omega)$ и имеет компактный носитель, целиком находящийся в Ω . Тогда функция g , определяемая формулой (1.4), принадлежит $C^k(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению (1.3).

Замечание. В [3, Предложение 16.3.2], [4, Теорема 1.1.3] рассмотрен случай, когда $v \in C^k(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ или $v \in C^k(\Omega) \cap L^1(\Omega)$.

В работах [5], [6] отмечается следующее обобщение формулы (1.1) для единичного круга $\mathbb{D} = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ ($Re\beta > -1$):

$$(1.5) \quad f(z) = \frac{\beta + 1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)(1 - |\zeta|^2)^\beta}{(1 - z\bar{\zeta})^{2+\beta}} dm(\zeta) - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\bar{\zeta}} \right)^{\beta+1} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D},$$

где первое слагаемое голоморфно по $z \in \mathbb{D}$ и впервые появилось в работах [7], [8], где рассмотрены классы голоморфных в $\mathbb{D}$ функций из весовых пространств $L_\alpha^p(\mathbb{D})$, порождённых нормой

$$(1.6) \quad \|f\|_{p,\alpha} = \left(\iint_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|)^{\alpha} dm(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Естественно, по аналогии с (1.4), второе слагаемое в (1.5) может быть использовано в качестве формульного решения уравнения (1.3):

$$(1.7) \quad g_\beta(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{v(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\bar{\zeta}} \right)^{\beta+1} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

На самом деле справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.2. Пусть $1 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$ и $\operatorname{Re} \beta > \alpha$. Если $v \in C^1(\mathbb{D}) \cap L_{\alpha+1}^p(\mathbb{D})$, то функция g_β , определяемая по формуле (1.7), принадлежит $C^1(\mathbb{D}) \cap L_\alpha^p(\mathbb{D})$ и удовлетворяет уравнению (1.3). Более того,

$$(1.8) \quad \|g_\beta\|_{p,\alpha} \leq \operatorname{const}(\alpha, \beta) \cdot \|v\|_{p,\alpha+1}.$$

Эта теорема является следствием соответствующих многомерных результатов работы [5], где рассматриваются случаи единичного шара $B_n \subset \mathbb{C}^n$ и единичного полидиска $U^n \subset \mathbb{C}^n$.

Отметим, что различные многомерные аналоги формулы (1.5) были получены в [9], [10].

Дальнейшие обобщения формулы (1.5) для единичного круга $\mathbb{D}$ были получены в [11], [12], [13], [14] (при различных условиях, налагаемых на $f(\zeta)$ и $\partial f(\zeta)/\partial \bar{\zeta}$) и могут быть записаны следующим образом:

$$(1.9) \quad f(z) = \iint_{\mathbb{D}} f(\zeta) S_{\beta,\rho,\varphi}(z; \zeta) \cdot (1 - |\zeta|^{2\rho})^\beta \cdot |\zeta|^{2\varphi} dm(\zeta) - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} \cdot Q_{\beta,\rho,\varphi}(z; \zeta) dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D},$$

где ядра S и Q записываются в явной форме (в виде интегралов или рядов).

В работах [12], [13], [15] было установлено, что формула второго слагаемого в (1.9) (с заменой $\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}$ на $v(\zeta)$) порождает семейство решений уравнения (1.3) в $\mathbb{D}$.

Формулы типа (1.1), (1.5) представляют интерес так же в случае неограниченных областей. В случае верхней полуплоскости Π_+ справедлива следующая формула, являющаяся следствием соответствующего многомерного результата [16, Теорема 2.2]:

$$(1.10) \quad f(w) = \frac{2^\beta(\beta+1)}{\pi} \iint_{\Pi_+} \frac{f(\eta)(\operatorname{Im} \eta)^\beta}{[i(\bar{\eta} - w)]^{2+\beta}} dm(\eta) - \frac{2^{\beta+1}}{\pi} \iint_{\Pi_+} \frac{\partial f(\eta)/\partial \bar{\eta}}{\eta - w} \cdot \frac{(\operatorname{Im} \eta)^{\beta+1}}{[i(\bar{\eta} - w)]^{\beta+1}} dm(\eta), \quad w \in \Pi_+,$$

где $f(\eta)$ и $\frac{\partial f(\eta)}{\partial \bar{\eta}}$ принадлежат определённым весовым L^p -пространствам в верхней полуплоскости.

В случае голоморфных функций, когда второе слагаемое отсутствует, формула (1.10) получена в [17], [18].

В настоящей работе будет показано, что формула второго слагаемого в (1.10) даёт семейство решений уравнения (1.3) при определённых условиях, налагаемых на правую часть.

Отметим, что в [19] приводятся решения уравнения (1.3) в Π_+ в предположении, что правая часть суть комплексная мера Карлесона, решения понимаются в смысле обобщённых функций, при этом решения записываются в виде нелинейных интегральных операторов.

В [20], [21] в многомерном случае приводятся решения $\bar{\partial}$ -уравнения с равномерными оценками в трубе будущего (многомерном аналоге Π_+), но при этом обязательно предполагается, что правая часть имеет ограниченный носитель.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Начнём с простых утверждений, доказательство которых не представляет труда.

Предложение 2.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$, $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega_1$, $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ и $\varphi(\zeta) \in H(\Omega)$, $f(\eta) \in C^1(\Omega_1)$. Тогда

$$\frac{\partial f(\varphi(\zeta))}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{\eta=\varphi(\zeta)} \cdot \overline{\varphi'(\zeta)}.$$

Предложение 2.2. Пусть $\eta, w \in \Pi_+$, тогда:

$$(a) \operatorname{Re}[i(\bar{\eta} - w)] = \operatorname{Im}\eta + \operatorname{Im}w > 0.$$

(б) $|i(\bar{\eta} - w)|^2 \geq (\operatorname{Im}\eta + \operatorname{Im}w)^2 \geq 4 \cdot \operatorname{Im}\eta \cdot \operatorname{Im}w$, причём равенство достигается только при $\eta = w$.

Напомним, что биголоморфный изоморфизм единичного круга $\mathbb{D}$ и верхней полуплоскости Π_+ осуществляется посредством известных преобразований Кэли:

$$(2.1) \quad \Phi(\zeta) = i \cdot \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad \Phi^{-1}(\eta) = \frac{\eta - i}{\eta + i}, \quad \eta \in \Pi_+.$$

В следующем утверждении приводятся основные свойства преобразований Кэли, необходимые для дальнейшего.

Предложение 2.3. Пусть $\zeta \in \mathbb{D}$ и $\eta \in \Pi_+$, тогда:

$$(2.2) \quad 1^\circ. \quad \Phi'(\zeta) = \frac{2i}{(1 - \zeta)^2}, \quad (\Phi^{-1}(\eta))' = \frac{2i}{(\eta + i)^2}.$$

$$(2.3) \quad 2^\circ. \quad dm(\Phi(\zeta)) = \frac{4}{|1 - \zeta|^4} dm(\zeta), \quad dm(\Phi^{-1}(\eta)) = \frac{4}{|\eta + i|^4} dm(\eta).$$

3°. Если $\eta = \Phi(\zeta)$, то

$$(2.4) \quad 1 - |\zeta|^2 = \frac{4\operatorname{Im}\eta}{|\eta + i|^2}, \quad \operatorname{Im}\eta = \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \zeta|^2}.$$

4°. Если $w, \eta \in \Pi_+$, то

$$(2.5) \quad 1 - \Phi^{-1}(w) \cdot \overline{\Phi^{-1}(\eta)} = \frac{2i(\bar{\eta} - w)}{(w + i)(\bar{\eta} - i)},$$

$$(2.6) \quad 1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2 = \frac{4Im\eta}{|\eta + i|^2},$$

$$(2.7) \quad \Phi^{-1}(w) - \Phi^{-1}(\eta) = \frac{2i(w - \eta)}{(w + i)(\eta + i)}.$$

Доказательство. Соотношения (2.2), (2.3) и (2.5), (2.6) следуют из [22, Лемма 1.1], а (2.4) и (2.7) проверяются непосредственно.

Предложение 2.4. Пусть $w_0 \in \Pi_+$ фиксировано и $Im(w_0) > r_1 > r_2 > 0$. Положим $G(w_0; r_1) \equiv \{w : |w - w_0| < r_1\}$ и $G(w_0; r_2) \equiv \{w : |w - w_0| < r_2\}$. Тогда при $\eta \in \overline{\Pi_+} \setminus G(w_0; r_1)$ и $w \in \overline{G(w_0; r_2)}$ имеем

$$(2.8) \quad |\eta - w| \asymp |\eta + i|, \quad \text{т.е.} \quad 0 < A \leq \frac{|\eta - w|}{|\eta + i|} \leq B < +\infty.$$

Доказательство. Возьмём $R > 0$ так, что $\overline{G(w_0; r_1)} \subset \{w : |w| \leq R\}$ и при этом $\left|\frac{i}{\eta}\right| < \frac{1}{2}$ и $\left|\frac{w}{\eta}\right| < \frac{1}{2}$ при $|\eta| > R$ и $w \in \overline{G(w_0; r_2)}$. Тогда имеем:

$$\frac{|\eta - w|}{|\eta + i|} = \frac{\left|\frac{\eta}{|\eta|} - \frac{w}{|\eta|}\right|}{\left|\frac{\eta}{|\eta|} + \frac{i}{|\eta|}\right|} \leq \frac{3/2}{1/2} = 3$$

и

$$\frac{|\eta - w|}{|\eta + i|} = \frac{\left|\frac{\eta}{|\eta|} - \frac{w}{|\eta|}\right|}{\left|\frac{\eta}{|\eta|} + \frac{i}{|\eta|}\right|} \geq \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}.$$

Если же $|\eta| \leq R$, то рассмотрим отношение $\frac{|\eta - w|}{|\eta + i|}$ как функцию двух переменных η и w , которая непрерывна и положительна на компактном множестве $\{(\eta, w) \in \mathbb{C}^2 : \eta \in \overline{\Pi_+} \setminus G(w_0; r_1), |\eta| \leq R \text{ и } w \in \overline{G(w_0; r_2)}\}$. Следовательно, на этом множестве рассматриваемое отношение находится между двумя фиксированными положительными числами. Утверждение доказано.

Определение 2.1. Для произвольных функций $g(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и $f(\eta)$, $\eta \in \Pi_+$, и для $\beta \in \mathbb{C}$ будем писать

$$g \stackrel{\beta}{\sim} f \quad \text{или} \quad f \stackrel{\beta}{\sim} g$$

если

$$(2.9) \quad g(\zeta) \equiv \frac{f(\Phi(\zeta))}{(1 - \zeta)^{2+\beta}}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

или, что то же самое,

$$(2.10) \quad f(\eta) \equiv g(\Phi^{-1}(\eta)) \cdot \left(\frac{2i}{\eta + i} \right)^{2+\beta}, \quad \eta \in \Pi_+.$$

Очевидно, что если $g \stackrel{\beta}{\sim} f$, то условие $g \in C^k(\mathbb{D})$ эквивалентно условию $f \in C^k(\Pi_+)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, \infty$). Кроме того, если $g \stackrel{\beta}{\sim} f_1$ и $g \stackrel{\beta}{\sim} f_2$, то $f_1 \equiv f_2$ в Π_+ и наоборот: если $g_1 \stackrel{\beta}{\sim} f$ и $g_2 \stackrel{\beta}{\sim} f$, то $g_1 \equiv g_2$ в $\mathbb{D}$.

Определение 2.2. Для произвольных функций $v(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и $u(\eta)$, $\eta \in \Pi_+$, и для $\beta \in \mathbb{C}$ будем писать

$$v \stackrel{\beta}{\approx} u \quad \text{или} \quad u \stackrel{\beta}{\approx} v$$

если

$$(2.11) \quad v(\zeta) = \frac{u(\Phi(\zeta))}{(1 - \zeta)^{2+\beta}} \cdot \frac{-2i}{(1 - \bar{\zeta})^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

или, что то же самое,

$$(2.12) \quad u(\eta) = v(\Phi^{-1}(\eta)) \cdot \left(\frac{2i}{\eta + i} \right)^{2+\beta} \cdot \frac{-2i}{(\bar{\eta} - i)^2}, \quad \eta \in \Pi_+.$$

Очевидно, что если $v \stackrel{\beta}{\approx} u$, то условие $v \in C^k(\mathbb{D})$ эквивалентно условию $u \in C^k(\Pi_+)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, \infty$). Кроме того, если $v \stackrel{\beta}{\approx} u_1$ и $v \stackrel{\beta}{\approx} u_2$, то $u_1 \equiv u_2$ в Π_+ и наоборот: если $v_1 \stackrel{\beta}{\approx} u$ и $v_2 \stackrel{\beta}{\approx} u$, то $v_1 \equiv v_2$ в $\mathbb{D}$.

Предложение 2.5. Пусть $g \in C^k(\mathbb{D})$, $f \in C^k(\Pi_+)$, $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$ и $g \stackrel{\beta}{\sim} f$ ($\beta \in \mathbb{C}$). Тогда для функций $v(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и $u(\eta)$, $\eta \in \Pi_+$, справедливы следующие утверждения:

$$(a) \text{ Если } v(\zeta) \equiv \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \text{ и } u(\eta) \equiv \frac{\partial f(\eta)}{\partial \bar{\eta}}, \text{ то } v \stackrel{\beta}{\approx} u.$$

$$(b) \text{ Если } v \stackrel{\beta}{\approx} u, \text{ тогда равенство } v(\zeta) \equiv \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \text{ эквивалентно равенству } u(\eta) \equiv \frac{\partial f(\eta)}{\partial \bar{\eta}}.$$

Доказательство. Очевидно, что (б) является следствием (а).

Для доказательства (а) воспользуемся соотношениями (2.9) и (2.10). Тогда ввиду Предложения 2.1

$$\begin{aligned} v(\zeta) &\equiv \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\frac{\partial f(\eta)}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{\eta=\Phi(\zeta)}}{(1 - \zeta)^{2+\beta}} \cdot \frac{-2i}{(1 - \bar{\zeta})^2}, \\ u(\eta) &\equiv \frac{\partial f(\eta)}{\partial \bar{\eta}} = \left(\frac{2i}{\eta + i} \right)^{2+\beta} \cdot \frac{\frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \Big|_{\zeta=\Phi^{-1}(\eta)}}{(1 - \bar{\zeta})^2}. \end{aligned}$$

Чтобы установить соотношение $v \stackrel{\beta}{\approx} u$, достаточно показать, в силу (2.11), что

$$v(\zeta) \equiv \frac{u(\Phi(\zeta))}{(1-\zeta)^{2+\beta}} \cdot \frac{-2i}{(1-\bar{\zeta})^2}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \frac{u(\Phi(\zeta))}{(1-\zeta)^{2+\beta}} \cdot \frac{-2i}{(1-\bar{\zeta})^2} \\ &= \frac{1}{(1-\zeta)^{2+\beta}} \cdot \frac{-2i}{(1-\bar{\zeta})^2} \cdot \left(\frac{2i}{i\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + i} \right)^{2+\beta} \cdot \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{-2i}{\left(-i\frac{1+\bar{\zeta}}{1-\bar{\zeta}} - i\right)^2} \equiv \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \equiv v(\zeta). \end{aligned}$$

При $Re\beta > -1$ введём два интегральных оператора.

Для комплекснозначной измеримой функции $v(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, формально положим

$$(2.13) \quad T_\beta(v)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{v(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\bar{\zeta}} \right)^{\beta+1} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Для комплекснозначной измеримой функции $u(\eta)$, $\eta \in \Pi_+$, формально положим

$$(2.14) \quad T_\beta^*(u)(w) = -\frac{2^{\beta+1}}{\pi} \cdot \iint_{\Pi_+} \frac{u(\eta)}{\eta - w} \cdot \frac{(Im\eta)^{\beta+1}}{(i(\bar{\eta} - w))^{\beta+1}} dm(\eta), \quad w \in \Pi_+.$$

Заметим, что (2.13) и (2.14) вполне соответствуют структуре вторых слагаемых в интегральных представлениях (1.5) и (1.10).

Теорема 2.1. *Если $v \stackrel{\beta}{\approx} u$, то $T_\beta(v) \stackrel{\beta}{\approx} T_\beta^*(u)$ при условии, что для заданных функций v и u соответствующие интегралы в (2.13) и (2.14) абсолютно сходятся.*

Доказательство. По ходу доказательства будет показано, что при условиях теоремы абсолютная сходимость одного из интегралов в (2.13) и (2.14) влечёт абсолютную сходимость другого.

В силу (2.10) нужно доказать, что

$$T_\beta^*(u)(w) \equiv T_\beta(v)(\Phi^{-1}(w)) \cdot \left(\frac{2i}{w+i} \right)^{2+\beta}, \quad w \in \Pi_+.$$

Действительно, в силу (2.3) - (2.7)

$$\begin{aligned} & T_\beta(v)(\Phi^{-1}(w)) \cdot \left(\frac{2i}{w+i} \right)^{2+\beta} \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{2i}{w+i} \right)^{2+\beta} \iint_{\mathbb{D}} \frac{v(\zeta)}{\zeta - \Phi^{-1}(w)} \cdot \frac{(1-|\zeta|^2)^{\beta+1}}{(1-\Phi^{-1}(w) \cdot \bar{\zeta})^{\beta+1}} dm(\zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{2i}{w+i} \right)^{2+\beta} \iint_{\Pi_+} \frac{v(\Phi^{-1}(\eta))}{\Phi^{-1}(\eta) - \Phi^{-1}(w)} \cdot \frac{(1 - |\Phi^{-1}(\eta)|^2)^{\beta+1} dm(\Phi^{-1}(\eta))}{(1 - \Phi^{-1}(w) \cdot \overline{\Phi^{-1}(\eta)})^{\beta+1}} \\
&= -\frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{2i}{w+i} \right)^{2+\beta} \iint_{\Pi_+} \frac{v(\Phi^{-1}(\eta))}{\frac{2i(\eta-w)}{(w+i)(\eta+i)}} \cdot \frac{\left(\frac{4Im\eta}{|\eta+i|^2} \right)^{\beta+1}}{\left(\frac{2i(\bar{\eta}-w)}{(w+i)(\bar{\eta}-i)} \right)^{\beta+1}} \cdot \frac{4dm(\eta)}{|\eta+i|^4} \\
&= -\frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{2i}{w+i} \right)^{2+\beta} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{4^{\beta+2}}{2^{\beta+1}} \cdot \iint_{\Pi_+} \frac{v(\Phi^{-1}(\eta))}{\eta-w} \cdot (w+i)(\eta+i) \\
&\quad \cdot \frac{(Im\eta)^{\beta+1}}{(\eta+i)^{\beta+3}(\bar{\eta}-i)^{\beta+3}} \cdot \frac{(w+i)^{\beta+1}(\bar{\eta}-i)^{\beta+1}}{(i(\bar{\eta}-w))^{\beta+1}} dm(\eta) \\
&= -\frac{1}{\pi} \cdot (2i)^{2+\beta} \cdot 2^{\beta+2} \cdot \frac{1}{i} \cdot \iint_{\Pi_+} \frac{v(\Phi^{-1}(\eta))}{\eta-w} \cdot \frac{(Im\eta)^{\beta+1}}{(i(\bar{\eta}-w))^{\beta+1}} \\
&\quad \cdot \frac{1}{(\eta+i)^{\beta+2}} \cdot \frac{-2i}{(\bar{\eta}-i)^2} \cdot \frac{1}{-2i} dm(\eta) \\
&= -\frac{2^{\beta+1}}{\pi} \cdot \iint_{\Pi_+} \frac{u(\eta)}{\eta-w} \cdot \frac{(Im\eta)^{\beta+1}}{(i(\bar{\eta}-w))^{\beta+1}} dm(\eta) \equiv T_{\beta}^*(u)(w), \quad w \in \Pi_+.
\end{aligned}$$

3. ВЕСОВЫЕ РЕШЕНИЯ $\bar{\partial}$ -УРАВНЕНИЯ

Начнём с общих рассуждений. Пусть $u \in C^k(\Pi_+)$, $(k = 1, 2, 3, \dots, \infty)$, тогда, как уже отмечалось, существует единственная функция v , так что $v \stackrel{\beta}{\approx} u$, причём $v \in C^k(\mathbb{D})$. Положим

$$g(z) = T_{\beta}(v)(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

и пусть известно, что $g \in C^k(\mathbb{D})$ и

$$\frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}} \equiv v(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Затем положим

$$f(w) = T_{\beta}^*(u)(w), \quad w \in \Pi_+.$$

Ввиду Теоремы 2.1 получаем, что $f \stackrel{\beta}{\sim} g$, и при этом $f \in C^k(\Pi_+)$. Более того, в силу Предложения 2.5 (б) имеем

$$u(w) \equiv \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}}, \quad w \in \Pi_+.$$

Следовательно оператор T_{β}^* решает $\bar{\partial}$ -уравнения в Π_+ .

Важным следствием приведённых рассуждений является следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $u \in C_c^k(\Pi_+)$, $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$, $\operatorname{Re} \beta > -1$. Положим $f_\beta(w) \equiv T_\beta^*(u)(w)$, $w \in \Pi_+$, тогда

$$(3.1) \quad f_\beta \in C^k(\Pi_+) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f_\beta(w)}{\partial \bar{w}} \equiv u(w), \quad w \in \Pi_+.$$

Доказательство. Выберем $v(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$ так, что $v \stackrel{\beta}{\approx} u$. Очевидно, имеем $v \in C_c^k(\mathbb{D})$. Положим

$$g(z) = T_\beta(v)(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тогда $g \in C^k(\mathbb{D})$ и $\frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}} \equiv v(z)$, $z \in \mathbb{D}$ (это следует из [5], когда $k = 1$, и из [15], когда $k \geq 1$). В силу приведённых в начале параграфа рассуждений мы непосредственно получаем (3.1).

Теорема 3.2. Пусть $u \in C^k(\Pi_+)$, $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$, $\operatorname{Re} \beta > -1$ и

$$(3.2) \quad \frac{|u(\eta)| \cdot (Im \eta)^{\operatorname{Re} \beta + 1}}{|\eta + i|^{\operatorname{Re} \beta + 2}} \in L^1(\Pi_+).$$

Положим $f_\beta(w) \equiv T_\beta^*(u)(w)$, $w \in \Pi_+$, тогда имеет место (3.1).

Доказательство. Очевидно, что достаточно установить (3.1) локально, то есть в окрестности произвольной точки из верхней полуплоскости. Зафиксируем произвольное $w_0 \in \Pi_+$ и пусть $Im w_0 > r_1 > r_2 > 0$. Положим $G_1 \equiv \{w : |w - w_0| < r_1\}$, $G_2 \equiv \{w : |w - w_0| < r_2\}$. Мы покажем, что (3.1) имеет место в G_2 . Очевидно, что существует функция $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ такая, что

$$(3.3) \quad \psi|_{G_2} \equiv 1,$$

$$(3.4) \quad \psi|_{\mathbb{C} \setminus G_1} \equiv 0,$$

$$(3.5) \quad \psi|_{G_1 \setminus G_2} \in [0, 1].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_\beta(w) &= -\frac{2^{\beta+1}}{\pi} \iint_{\Pi_+} \frac{u(\eta)\psi(\eta)}{\eta - w} \cdot \frac{(Im \eta)^{\beta+1}}{(i(\bar{\eta} - w))^{\beta+1}} dm(\eta) \\ &\quad - \frac{2^{\beta+1}}{\pi} \iint_{\Pi_+} \frac{u(\eta)(1 - \psi(\eta))}{\eta - w} \cdot \frac{(Im \eta)^{\beta+1}}{(i(\bar{\eta} - w))^{\beta+1}} dm(\eta) \equiv f_1(w) + f_2(w). \end{aligned}$$

В силу Теоремы 3.1 имеем, что $f_1 \in C^k(\Pi_+)$ и $\frac{\partial f_1(w)}{\partial \bar{w}} \equiv u(w) \cdot \psi(w) \equiv u(w)$, $w \in G_2$. Если мы покажем, что f_2 голоморфна в G_2 , то очевидным образом (3.1)

будет установлено. Заметим, что

$$f_2(w) = -\frac{2^{\beta+1}}{\pi} \iint_{\Pi_+ \setminus G_2} \frac{u(\eta)(1-\psi(\eta))}{\eta-w} \cdot \frac{(Im\eta)^{\beta+1}}{(i(\bar{\eta}-w))^{\beta+1}} dm(\eta), \quad w \in G_2.$$

Поскольку подинтегральное выражение в формуле f_2 голоморфно по $w \in G_2$ для любого фиксированного $\eta \in \Pi_+ \setminus G_2$, достаточно найти $F(\eta) \in L^1(\Pi_+ \setminus G_2)$ так, что

$$\left| \frac{u(\eta)(1-\psi(\eta))}{(\eta-w)} \cdot \frac{(Im\eta)^{\beta+1}}{(i(\bar{\eta}-w))^{\beta+1}} \right| \leq F(\eta),$$

для любого $\eta \in \Pi_+ \setminus G_2$ равномерно по $w \in G_3 \equiv \{w : |w-w_0| < r_3\}$, где $r_3 \in (0, r_2)$ произвольно. Прежде всего заметим, что согласно Предложению 2.4

$$|\eta-w| \asymp |\eta+i|, \quad \eta \in \Pi_+ \setminus G_2, \quad w \in G_3.$$

Кроме того, очевидно, что $|\bar{\eta}-w| > |\eta-w|$. Следовательно

$$\left| \frac{u(\eta)(1-\psi(\eta))}{(\eta-w)} \cdot \frac{(Im\eta)^{\beta+1}}{(i(\bar{\eta}-w))^{\beta+1}} \right| \leq \text{const}(w_0, r_2, r_3, \beta) \cdot |u(\eta)| \cdot \frac{(Im\eta)^{Re\beta+1}}{|\eta+i|^{Re\beta+2}} \equiv F(\eta).$$

Из условия теоремы получаем $F \in L^1(\Pi_+ \setminus G_2)$.

Пусть $1 \leq p < \infty, \alpha > -1$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. Для комплекснозначной измеримой функции u , заданной в Π_+ , положим

$$(3.6) \quad \|u\|_{p,\alpha,\gamma} = \left(\iint_{\Pi_+} \frac{|u(\eta)|^p (Im\eta)^\alpha}{|\eta+i|^\gamma} dm(\eta) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Соответственно,

$$(3.7) \quad L_{\alpha,\gamma}^p(\Pi_+) = \{u : \|u\|_{p,\alpha,\gamma} < +\infty\}.$$

Отметим, что пространства подобного типа в верхней полуплоскости уже рассматривались в [23].

Теорема 3.3. Пусть функция $u \in C^k(\Pi_+)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, \infty$) и удовлетворяет одному из следующих условий:

- (а) $u(\eta) \cdot Im\eta \in L_{\alpha,\gamma}^1(\Pi_+)$, $\alpha > -1, \gamma \leq 2 + \alpha, Re\beta \geq \alpha$,
- (б) $u(\eta) \cdot Im\eta \in L_{\alpha,\gamma}^p(\Pi_+)$, $1 < p < \infty, \alpha > -1, \gamma < 2 + \alpha, Re\beta > \frac{\alpha+1}{p} - 1$. Положим $f_\beta(w) \equiv T_\beta^*(u)(w)$, $w \in \Pi_+$, тогда имеет место (3.1).

Доказательство. Ввиду Теоремы 3.2 достаточно показать, что условия (а) или (б) обеспечивают выполнение условия

$$\frac{u(\eta) \cdot Im\eta \cdot (Im\eta)^{Re\beta}}{|\eta + i|^{Re\beta+2}} \in L^1(\Pi_+).$$

Положим $u(\eta) \cdot Im\eta = g(\eta)$, $\eta \in \Pi_+$. Если имеет место (а), то есть $g \in L^1_{\alpha,\gamma}(\Pi_+)$, то

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(\eta) \cdot (Im\eta)^{Re\beta}}{|\eta + i|^{Re\beta+2}} \right| &= \frac{|g(\eta)| \cdot (Im\eta)^\alpha}{|\eta + i|^\gamma} \cdot \frac{(Im\eta)^{Re\beta-\alpha}}{|\eta + i|^{Re\beta-\alpha}} \cdot \frac{1}{|\eta + i|^{\alpha-\gamma+2}} \\ &\leq \frac{|g(\eta)| \cdot (Im\eta)^\alpha}{|\eta + i|^\gamma} \in L^1(\Pi_+), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Если же имеет место (б), то есть $g \in L^p_{\alpha,\gamma}(\Pi_+)$, то в силу интегрального неравенства Гёльдера ($1/p + 1/q = 1$)

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \iint_{\Pi_+} \frac{g(\eta) \cdot (Im\eta)^{Re\beta}}{|\eta + i|^{Re\beta+2}} dm(\eta) &= \iint_{\Pi_+} \frac{g(\eta) \cdot (Im\eta)^{\frac{\alpha}{p}}}{|\eta + i|^{\frac{\gamma}{p}}} \cdot \frac{(Im\eta)^{Re\beta-\frac{\alpha}{q}}}{|\eta + i|^{Re\beta-\frac{\gamma}{p}+2}} dm(\eta) \\ &\leq \|g\|_{p,\alpha,\gamma} \cdot \left(\iint_{\Pi_+} \frac{(Im\eta)^{(Re\beta-\frac{\alpha}{p})q}}{|\eta + i|^{(Re\beta-\frac{\gamma}{p}+2)q}} dm(\eta) \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Для сходимости последнего интеграла необходимо выполнение следующих условий (см., например, [22, Лемма 3.1]):

$$\left(Re\beta - \frac{\alpha}{p} \right) q > -1 \quad \text{и} \quad \left(Re\beta - \frac{\gamma}{p} + 2 \right) q > \left(Re\beta - \frac{\alpha}{p} \right) q + 2,$$

которые соответственно эквивалентны условиям теоремы : $Re\beta > \frac{\alpha+1}{p} - 1$ и $\gamma < \alpha + 2$. Теорема доказана.

4. ВЕСОВЫЕ L^p -ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ $\bar{\partial}$ -УРАВНЕНИЯ

Предложение 4.1. Пусть для комплекснозначных измеримых функций $v(\zeta), \zeta \in \mathbb{D}$, и $u(\eta), \eta \in \Pi_+$, имеем $v \stackrel{\beta}{\approx} u$. Если $1 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, тогда при условии

$$(4.1) \quad 4p + pRe\beta + \gamma - 4 - 2\alpha \geq 0$$

справедлива оценка

$$(4.2) \quad \|v\|_{p, 4p+pRe\beta+\gamma-4-\alpha} \leq const(p, \beta, \alpha, \gamma) \cdot \|u\|_{p,\alpha,\gamma}.$$

Доказательство. Отметим, что нормы в (4.2) понимаются соответственно в смысле (1.6) и (3.6). В силу (2.11), поскольку β фиксировано, имеем

$$|v(\zeta)|^p \asymp \frac{|u(\Phi(\zeta))|^p}{|1 - \zeta|^{p(4+Re\beta)}}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Следовательно, с учётом неравенства $1 - |\zeta|^2 \leq 2 \cdot |1 - \zeta|$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и условия (4.1), приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} \|u\|_{p,\alpha,\gamma}^p & \stackrel{\eta=\Phi(\zeta)}{=} \iint_{\mathbb{D}} \frac{|u(\Phi(\zeta))|^p \cdot \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\zeta|^2}\right)^\alpha}{\left|\frac{2i}{1-\zeta}\right|^\gamma} \cdot \frac{4}{|1-\zeta|^4} dm(\zeta) \\ & = const(\gamma) \iint_{\mathbb{D}} \frac{|u(\Phi(\zeta))|^p \cdot (1-|\zeta|^2)^\alpha dm(\zeta)}{|1-\zeta|^{4+2\alpha-\gamma}} \\ & \geq const(p, \beta, \gamma) \iint_{\mathbb{D}} \frac{|v(\zeta)|^p \cdot (1-|\zeta|^2)^\alpha dm(\zeta)}{|1-\zeta|^{4+2\alpha-\gamma-4p-Re\beta}} \\ & \geq const(p, \beta, \alpha, \gamma) \iint_{\mathbb{D}} |v(\zeta)|^p \cdot (1-|\zeta|^2)^\alpha (1-|\zeta|^2)^{4p+Re\beta+\gamma-4-2\alpha} dm(\zeta) \\ & = const(p, \beta, \alpha, \gamma) \cdot \|v\|_{p, 4p+Re\beta+\gamma-4-\alpha}^p. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение доказано. По ходу отметим, что (4.1) обеспечивает выполнение условия $4p + pRe\beta + \gamma - 4 - \alpha > -1$.

Теорема 4.1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Предположим также выполнение условия (4.1) и, кроме того,

$$(4.3) \quad Re\beta > 4p + pRe\beta + \gamma - 5 - \alpha > -1.$$

Тогда для произвольной функции $u \in C^k(\Pi_+) \cap L_{\alpha,\gamma}^p(\Pi_+)$, $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$, интегральный оператор T_β^* решает соответствующее $\bar{\partial}$ -уравнение в Π_+ , т.е. для функции $f_\beta(w) \equiv T_\beta^*(u)(w)$, $w \in \Pi_+$, имеет место (3.1). Более того, справедлива оценка

$$(4.4) \quad \|f_\beta\|_{p, 4p+Re\beta+\gamma-5-\alpha, 6p+Re\beta+2\gamma-6-2\alpha} \leq const(p, \beta, \alpha, \gamma) \cdot \|u\|_{p,\alpha,\gamma}.$$

Доказательство. Исходя из функции u , заданной в Π_+ , построим функцию v , заданную в $\mathbb{D}$, так что $v \stackrel{\beta}{\approx} u$ и при этом справедлива оценка (4.2). Положим $g_\beta(z) = T_\beta(v)(z)$, $z \in \mathbb{D}$, тогда $g_\beta \in C^k(\mathbb{D})$ (см. [5], [15]). Более того, в силу Теоремы 1.2, условий (4.3) и оценки (4.2) имеем:

$$\begin{aligned} (4.5) \quad \|g_\beta\|_{p, 4p+Re\beta+\gamma-5-\alpha} & \leq const(p, \beta, \alpha, \gamma) \cdot \|v\|_{p, 4p+Re\beta+\gamma-4-\alpha} \\ & \leq const(p, \beta, \alpha, \gamma) \cdot \|u\|_{p,\alpha,\gamma}. \end{aligned}$$

Остаётся связать друг с другом нормы f_β и g_β . Поскольку $f_\beta \stackrel{\beta}{\sim} g_\beta$, и β фиксировано, в силу (2.10)

$$|f_\beta(\eta)|^p \asymp \frac{|g_\beta(\Phi^{-1}(\eta))|^p}{|\eta + i|^{p(2+Re\beta)}}, \quad \eta \in \Pi_+.$$

Следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} \|g_\beta\|_{p, 4p+pRe\beta+\gamma-5-\alpha}^p &= \iint_{\mathbb{D}} |g_\beta(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^{4p+pRe\beta+\gamma-5-\alpha} dm(\zeta) \\ &\stackrel{\zeta=\Phi^{-1}(\eta)}{=} \iint_{\Pi_+} \frac{|g_\beta(\Phi^{-1}(\eta))|^p \cdot (4Im\eta)^{4p+pRe\beta+\gamma-5-\alpha}}{|\eta + i|^{2(4p+pRe\beta+\gamma-5-\alpha)}} \cdot \frac{4}{|\eta + i|^4} dm(\eta) \\ &= const(p, \beta, \alpha, \gamma) \cdot \iint_{\Pi_+} \frac{|g_\beta(\Phi^{-1}(\eta))|^p \cdot (Im\eta)^{4p+pRe\beta+\gamma-5-\alpha}}{|\eta + i|^{2(4p+pRe\beta+\gamma-3-\alpha)}} dm(\eta) \\ &\geq const(p, \beta, \alpha, \gamma) \cdot \iint_{\Pi_+} \frac{|f_\beta(\eta)|^p \cdot (Im\eta)^{4p+pRe\beta+\gamma-5-\alpha}}{|\eta + i|^{6p+pRe\beta+2\gamma-6-2\alpha}} dm(\eta) \\ (4.6) \quad &= const(p, \beta, \alpha, \gamma) \cdot \|f_\beta\|_{p, 4p+pRe\beta+\gamma-5-\alpha, 6p+pRe\beta+2\gamma-6-2\alpha}. \end{aligned}$$

Комбинируя (4.6) и (4.5), получаем (4.4).

Замечание 4.1. Обилие условий на параметры p, β, α, γ (см (4.1) и (4.3)) на самом деле даёт возможность (варьируя их) получать разнообразные оценки. Например, полагая $p = 1, \gamma = 0$, согласно (4.4) получаем:

$$\|f_\beta\|_{1, Re\beta-\alpha-1, Re\beta-2\alpha} \leq const(\beta, \alpha) \cdot \|u\|_{1, \alpha}$$

при условиях $Re\beta > \alpha > -1, Re\beta \geq 2\alpha$.

Abstract. The paper considers the equation $\partial f(w)/\partial \bar{w} = u(w)$ in the upper semiplane Π_+ . For a function u belonging to the class C^k ($k = 1, 2, 3, \dots, \infty$) and the weighted space L^p , $1 \leq p < \infty$ with a weight of type $(Imw)^\alpha \cdot |w + i|^{-\gamma}$, $w \in \Pi_+$, a family of solutions f_β depending on the complex parameter β is constructed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Pompeju, "Sur les singularities des fonctions analytiques uniformes", C.R. Acad. Sci. Paris, 139, 914 – 915 (1904).
- [2] Л. Хёрмандер, Введение в Теорию Функций Нескольких Комплексных Переменных, Москва, Мир, 280 с. (1968).
- [3] У. Рудин, Теория Функций в Единичном Шаре из $\mathbb{C}^n$, Москва, Мир, 456 с. (1984).
- [4] G. Henkin, J. Leiterer, Theory of Functions on Complex Manifolds, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart (1984).
- [5] Ph. Charpentier, "Formules explicites pur les solutions minimales de l'equation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de C^n ", Ann. Inst. Fourier, 30, no. 4, 121 – 154 (1980).

- [6] Ф. А. Шамоян, “Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа”, ДАН СССР, **261**, no. 3, 557 – 561 (1981).
- [7] М. М. Джрбашян, “О представимости некоторых классов функций мероморфных в единичном круге”, ДАН Арм.ССР **3**, no. 1, 3 – 9 (1945).
- [8] М. М. Джрбашян, “К проблеме представимости аналитических функций”, Сообщ. Инст. Мат. Мех. АН Арм.ССР **2**, 3 – 40 (1948).
- [9] А. Н. Karapetyan, “Weighted $\bar{\partial}$ -integral representations in matrix domains”, Complex Var. Ell. Eq., **53**, no. 12, 1131 – 1168 (2008).
- [10] А. Н. Karapetyan, “Weighted $\bar{\partial}$ -integral representations of smooth functions in the unit ball of C^n ”, Complex Var. Ell. Eq., **58**, no. 5, 665 – 683 (2013).
- [11] М. М. Djrbashian, “Weighted integral representations of smooth or holomorphic functions in the unit disc and in the complex plane”, J. Contemp. Math. Analysis, **28**, 1 – 27 (1993).
- [12] А. И. Petrosyan, “An integral representation of functions in the polydisc and in the space C^n ”, Collection of works of International conference “Theory of Functions and Applications” dedicated to the memory of Mkhitar M. Djrbashian, Yerevan, Armenia, 153 – 157 (1995).
- [13] А. И. Petrosyan, “The weighted integral representations of functions in the polydisc and in the space C^n ”, J. Contemp. Math. Analysis, **31**, no. 1, 38 – 50 (1996).
- [14] F. V. Hayrapetyan, “On a family of weighted $\bar{\partial}$ -integral representations in the unit disc”, Armen. J. Math., **12**, no. 11, 1 – 16 (2020).
- [15] F. V. Hayrapetyan, “On weighted solutions of $\bar{\partial}$ -equation in the unit disc”, Proceedings of the Yerevan state university, **55**, no. 1, 20 – 28 (2021).
- [16] А. О. Карапетян, “Весовые $\bar{\partial}$ -интегральные представления гладких функций в области Зигеля”, Известия НАН Армении Математика **41**, no. 3, 56 – 70 (2006).
- [17] F. Ricci, M. Taibleson, “Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure”, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, **10**, no. 1, 1 – 54 (1983).
- [18] М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян, “Интегральные представление для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости”, ДАН СССР **285**, no. 3, 547 – 550 (1985).
- [19] P. W. Jones, “ L^∞ estimates for the $\bar{\partial}$ problem in a half-plane”, Acta math. **150**, no. 1 – 2, 137 – 152 (1983).
- [20] П. Л. Поляков, “Решение $\bar{\partial}$ -уравнения с оценкой в трубчатых областях”, УМН, **40**, no. 1, 213 – 214 (1985).
- [21] А. Г. Сергеев, “Комплексная геометрия и интегральные представления в трубе будущего”, Изв. АН СССР, Сер. мат. **50**, no. 6., 1241 – 1275 (1986).
- [22] М. М. Djrbashian, А. Н. Karapetyan, “Integral representations for some classes of functions holomorphic in a Siegel domain”, J. Math. Anal. Appl., **179**, no. 1, 91 – 109 (1993).
- [23] А. М. Jerbashian, “Functions of α -bounded type in the half-plane”, Advances in Complex Analysis and its Applications, **4**, Springer (2005).

Поступила 3 мая 2021

После доработки 7 июня 2021

Принята к публикации 17 июня 2021