

УДК: 52-6

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ КОНЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 18 января 2006

Задача о нахождении статистических средних величин, характеризующих поле излучения в полубесконечной атмосфере, была рассмотрена автором в серии работ. В настоящей работе дается обобщение некоторых из полученных там результатов на случай среды конечной оптической толщины. Определяются среднее число рассеяний, испытываемых квантом в результате блуждания в атмосфере, и среднее время, которое при этом требуется. Рассматриваются три различных типа средних величин в зависимости от того, по каким характеристикам квантов проводится усреднение. Особое внимание уделяется асимптотическому поведению найденных величин для больших толщин среды с учетом влияния поглощения в непрерывном спектре.

1. *Введение.* Основной целью теории переноса излучения в астрофизических приложениях является определение наблюдаемого потока излучательной энергии и его характеристик. Однако при интерпретации полученных данных часто возникает необходимость в нахождении различных статистических средних величин, описывающих процесс многократного рассеяния света в частотах спектральной линии в самой излучающей среде. Среди этих величин наибольший интерес представляют среднее число рассеяний, испытываемых квантами в процессе диффузии, и среднее время их пребывания в среде. Определение и анализ этих величин позволяют делать заключение о средней плотности излучения и средней степени возбуждения в среде. Знание среднего времени пребывания кванта в среде является особенно важным при изучении нестационарных полей излучения. Оно позволяет, в частности, выяснить, успевает ли установиться в атмосфере лучистое равновесие. В рассеивающей и поглощающей среде кванты блуждают до тех пор, пока либо не покинут ее, либо не термализуются, испытав "истинное" поглощение. Если предположить, что квант тратит время лишь на пробег между рассеяниями, то нахождение среднего времени его пребывания в среде, очевидно, эквивалентно определению пройденного им среднего пути. В целом, изучение эффектов многократного рассеяния излучения является необходимым для выяснения физической природы наблюдаемых явлений. Важно и теоретическое значение исследований в данном направлении,

поскольку методы, применяемые при этом, могут быть использованы и при рассмотрении классических задач теории переноса. Например, нахождение излучательного режима в среде может рассматриваться как стохастическая задача, заключающаяся в определении статистического среднего некоторой случайной величины. Действительно, для нахождения интенсивности излучения на некоторой глубине плоскопараллельной среды в зависимости от направления и частоты достаточно определить среднее число пересечений поверхности, находящейся на указанной глубине, квантами, движущимися в заданном направлении и имеющими заданную частоту.

В литературе имеется целый ряд работ, посвященных нахождению указанных средних величин при различных упрощающих предположениях относительно элементарного акта рассеяния. Здесь мы упомянем лишь пионерскую работу Амбарцумяна [1], серию работ Соболева [2-5], а также статью Иванова [6]. В серии работ автора [7-10], был предложен новый подход, основанный на принципе инвариантности Амбарцумяна и систематическом применении аппарата характеристических и производящих функций. Он позволяет установить зависимость рассматриваемых средних величин от параметров первоначального кванта и может быть применен в общем случае перераспределения излучения по частотам и направлениям. Также важно, что предложенный метод дает возможность определить статистически среднюю любой дискретно или непрерывно распределенной стохастической величины, описывающей поле излучения.

Если случаи бесконечной и полубесконечной сред освещены в литературе достаточно полно, то этого нельзя сказать, если атмосфера имеет конечную оптическую толщину. Цель настоящей работы заключается в обобщении некоторых результатов работ [7-10] на случай однородной атмосферы конечной толщины, при этом особое внимание уделяется среднему времени пребывания в среде, эффекту поглощения в континууме и важному для астрофизических приложений вопросу об асимптотическом поведении рассматриваемых средних характеристик для больших толщин.

2. Основные величины и обозначения. В работе нас будут интересовать две величины: среднее число рассеяний и среднее время пребывания кванта в среде. Для каждой из них будем различать три типа усреднения. Если средние величины относятся к движущемуся кванту, то используются обозначения N и Ω . Соответствующие величины для кванта, поглощенного на некоторой глубине τ , будут обозначаться через $\langle N \rangle$ и $\langle \Omega \rangle$. Наконец, для средних, взвешенных по мощности источников энергии введем обозначения $\bar{N}$ и $\bar{\Omega}$. Движущиеся кванты характеризуются безразмерной частотой x , представ-

ляющей собой смещение от центральной частоты линии в единицах доплеровской ширины и углом $\arccos \eta$, измеряемым от нормали к поверхности плоскопараллельной среды. Временные промежутки измеряются в единицах $t = 1/nck_{v_0}$, где n - число рассеивающих атомов в 1 см^3 и k_{v_0} - коэффициент рассеяния в центре линии, рассчитанный на один атом. Очевидно, что t представляет собой среднее время между двумя последовательными рассеяниями для кванта в центральной частоте, если поглощение в непрерывном спектре отсутствует.

Для дальнейшего изложения необходимо напомнить некоторые выводы работ [7-9] и несколько уравнений для средних статистических величин, полученных в случае полубесконечной атмосферы. Наиболее полное представление о процессе диффузии излучения дают величины $N(\tau, x, \eta)$ и $\Omega(\tau, x, \eta)$, относящиеся к кванту частоты x , движущемуся на оптической глубине τ в направлении $\arccos \eta$. Отдельный интерес представляет частное значение указанных функций $N(x, \eta) \equiv N(0, x, \eta)$ и $\Omega(x, \eta) \equiv \Omega(0, x, \eta)$, которое описывает ситуацию, когда среда освещается извне квантом, движущимся под углом $\arccos \eta$, отсчитываемым от внутренней нормали к ее поверхности. Для величины $N(x, \eta)$ в работе [7] было получено соотношение

$$\begin{aligned} v(x)N(x, \eta) = & \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') p(0, x', \eta'; x, \eta) N(x', \eta') dx' + \\ & + v(x) + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} v(x') \rho(x', \eta'; x, \eta) dx', \end{aligned} \quad (1)$$

где введены следующие обозначения: $\alpha(x)$ - ненормированный профиль коэффициента поглощения в линии, $v(x) = \alpha(x) + \beta$, β представляет собой отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре спектральной линии, ρ - коэффициент отражения от полубесконечной атмосферы. Через $p(\tau, x', \eta'; x, \eta)$ обозначена вероятность того, что квант с параметрами (x, η) , поглощенный на оптической глубине τ , выйдет из среды в виде кванта, описываемого параметрами (x', η') . Если предварительно решена задача о диффузном отражении, то есть величины p и ρ известны, то соотношение (1) может рассматриваться как уравнение для определения $N(x, \eta)$. Уравнение (1) написано для общего случая перераспределения по частотам и направлениям, причем акт поглощения принимается за рассеяние. Сами величины $N(\tau, x, \eta)$ и $\Omega(\tau, x, \eta)$ удовлетворяют интегро-дифференциальным уравнениям, связанным некоторыми условиями. Указанные задачи, как было показано в [8,9], можно свести к определению функций

$$\langle N(\tau) \rangle = 1 + \frac{\lambda}{2} A \int_{-1}^1 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} \alpha(x) N(\tau, x, \eta) d\tau, \quad (2)$$

$$\langle \Omega(\tau) \rangle = \frac{\lambda}{2} A \int_{-1}^1 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} \alpha(x) \Omega(\tau, x, \eta) d\tau$$

путем решения следующих интегральных уравнений

$$\langle N(\tau) \rangle = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(\tau - \tau', \beta) \langle N(\tau') \rangle d\tau' + 1 + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K_0(\tau - \tau', \beta) d\tau', \quad (3)$$

$$\langle \Omega(\tau) \rangle = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(\tau - \tau', \beta) \langle \Omega(\tau') \rangle d\tau' + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K_0(\tau - \tau', \beta) d\tau', \quad (4)$$

где мы пользуемся общепринятыми обозначениями: λ - коэффициент переизлучения кванта при элементарном акте рассеяния,

$$K(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[v(x)\tau] dx, \quad K_0(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) E_1[v(x)\tau] dx, \quad (5)$$

A - нормирующий множитель, равный $1/\sqrt{\pi}$ в случае доплеровского профиля коэффициента поглощения, E_1 - интегрально-показательная функция первого порядка. Из соотношений (2) видно, что $\langle N(\tau) \rangle$ и $\langle \Omega(\tau) \rangle$ также могут быть интерпретированы как статистические средние, описывающие многократное рассеяние кванта, изначально поглощенного на некоторой глубине τ .

Здесь мы введем в рассмотрение еще одну функцию, тесно связанную с введенными выше средними величинами. Обозначим через $R_0(\tau, x, \eta)$ вероятность того, что квант частоты x , движущийся на оптической глубине τ в направлении η , будет термализован в процессе многократного рассеяния где-либо в среде. Особый интерес представляет ее частное (поверхностное) значение: $R_0(0, x, \eta) = R_0(x, \eta)$, которое задает указанную вероятность для кванта, падающего на среду извне. Как было показано в работе [8], величина $R_0(x, \eta)$ допускает также другую физическую интерпретацию, а именно, она представляет собой профиль линии поглощения, образованной в полубесконечной изотермической атмосфере, содержащей источники энергии единичной мощности. С другой стороны, функция

$$R_0(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') R_0(\tau, x', \eta') d\eta' \quad (6)$$

дает вероятность гибели в среде для кванта, первоначально поглощенного на глубине τ . Она удовлетворяет интегральному уравнению типа (3) и (4) со свободным членом, равным

$$g_R(\tau) = 1 - \lambda + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K_0(\tau - \tau', \beta) d\tau'. \quad (7)$$

Сравнивая уравнения (3) и (4), с учетом соотношения (7), имеем

$$(1 - \lambda) \langle N(\tau) \rangle + \lambda \beta \langle \Omega(\tau) \rangle = R_0(\tau). \quad (8)$$

В серии работ [7-10] нами было показано, что соотношению, аналогичному (8), удовлетворяет также тройка величин $N(\tau, x, \eta)$, $\Omega(\tau, x, \eta)$, $R_0(\tau, x, \eta)$ (следовательно и их частные значения $N(x, \eta)$, $\Omega(x, \eta)$ и $R_0(x, \eta)$).

В заключение настоящего параграфа заметим, что во всех перечисленных выше случаях свободные члены интегральных уравнений представляют собой либо постоянную величину, либо суперпозицию экспонент. Как известно (см., например, [11,12]), указанные задачи можно свести к решению уравнений типа Вольтерра с разностным ядром, если только предварительно решена (или параллельно решается) задача о диффузном отражении от полубесконечной атмосферы.

3. *Конечная среда, освещаемая извне.* Сначала мы покажем, что соотношения типа (8) справедливы и для атмосферы конечной оптической толщины. Ограничимся здесь рассмотрением простейшей задачи. Пусть на границу 0 конечной среды толщины τ_0 в направлении η падает квант частоты x . Вывод нижеследующих уравнений основан на применении принципа инвариантности, а рассуждения аналогичны тем, которые приводятся в [7]. Так, в общем случае некогерентного рассеяния для функции $N(x, \eta, \tau_0)$ получаем

$$v(x)N(x, \eta, \tau_0) = \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') \bar{p}(x', \eta'; x, \eta, \tau_0) N(x', \eta', \tau_0) dx' + q_N(x, \eta, \tau_0), \quad (9)$$

где для краткости введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \bar{p}(x', \eta'; x, \eta, \tau_0) &= p(0, x', \eta'; x, \eta, \tau_0) - p(\tau_0, x', \eta'; x, \eta, \tau_0), \\ q_N(x, \eta, \tau_0) &= v(x) \left(1 - e^{-\frac{v(x)\tau_0}{\eta}} \right) + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} v(x') \varpi(x', \eta'; x, \eta, \tau_0) dx', \\ \varpi(x', \eta'; x, \eta, \tau_0) &= \rho(x', \eta'; x, \eta, \tau_0) - \sigma(x', \eta'; x, \eta, \tau_0), \end{aligned} \quad (10)$$

σ - коэффициент пропускания конечной среды. Величины ρ и p для среды конечной толщины имеют смысл, аналогичный тому, который имели одноименные величины для полубесконечной атмосферы. При $\tau_0 \rightarrow \infty$, как и следовало ожидать, уравнение (9) переходит в (1). Уравнения для Ω и R_0 отличаются от (9) лишь свободными членами, которые соответственно равны

$$q_\Omega(x, \eta, \tau_0) = 1 - e^{-\frac{v(x)\tau_0}{\eta}} + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(x', \eta'; x, \eta, \tau_0) dx', \quad (11)$$

$$q_{R_0}(x, \eta, \tau_0) = u(x) \left(1 - e^{-\frac{v(x)\tau_0}{\eta}} \right) + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} u(x') \varpi(x', \eta'; x, \eta, \tau_0) dx', \quad (12)$$

где $u(x) = (1 - \lambda)\alpha(x) + \beta$. Сравнивая формулы (11), (12) со свободным членом уравнения (9), находим

$$(1 - \lambda)N(x, \eta, \tau_0) + \lambda\beta\Omega(x, \eta, \tau_0) = R_0(x, \eta, \tau_0). \quad (13)$$

В частности, при $\beta = 0$

$$N(x, \eta, \tau_0) = R_0(\tau, x, \eta)/(1 - \lambda). \quad (14)$$

Таким образом, полученные соотношения имеют достаточно общую природу: они не зависят от геометрии среды или механизма рассеяния и могут быть написаны также для троек величин $\langle N(\tau, \tau_0) \rangle$, $\langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle$, $R_0(\tau, \tau_0)$ и $\bar{N}(\tau_0)$, $\bar{\Omega}(\tau_0)$, $R_0(\tau_0)$, о которых речь пойдет ниже.

Решение уравнения (9) при изотропном рассеянии с полным перераспределением по частотам может быть записано в виде

$$N(x, \eta, \tau_0) = R_0(x, \eta, \tau_0) + \lambda \frac{\alpha(x)}{v(x)} X(\infty, \tau_0) [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)]. \quad (15)$$

Здесь $z = \eta/v(x)$ и

$$R_0(x, \eta, \tau_0) = \frac{\beta}{v(x)} (1 - e^{-\tau_0/z}) + \frac{\alpha(x)}{v(x)} \left\{ \left[(1 - \tilde{\lambda}) X(\infty, \tau_0) - \frac{\lambda}{2} \beta \gamma_0 \right] \times \right. \\ \left. \times [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)] + \frac{\lambda}{2} \beta W(z) [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)] \right\}, \quad (16)$$

где мы следуем обозначениям, принятым в [13]:

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda\beta\delta(\beta), \quad \delta(\beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{v(x)} dx,$$

$$\gamma_0(\lambda, \beta) = \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) [X(z, \tau_0) + Y(z, \tau_0)] dz,$$

$$W(z, \lambda, \beta) = z \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) \frac{X(z', \tau_0) - Y(z', \tau_0)}{z + z'} dz',$$

$$G_0(z) = 2A \int_{x(x)}^{\infty} \alpha(x) dx,$$

причем $x(z) = 0$, если $z \leq 1$ и определяется из уравнения $\alpha[x(z)] = 1$, если $z > 1$. Мы пользовались также обозначениями X , Y , введенными Чандрасекаром для функций Амбарцумяна (см. [14]). При выводе формулы (15) учтено, что в данном случае

$$\alpha(x') \bar{p}(x', \eta'; x, \eta; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} A \alpha^2(x') [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)], \quad (17)$$

а

$$X(\infty, \tau_0) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} A [X_0(\tau_0) - Y_0(\tau_0)]}, \quad (18)$$

где $X_0(\tau_0)$ и $Y_0(\tau_0)$ - нулевые моменты функций X и Y :

$$X_0(\tau_0) = \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) X(z, \tau_0) dz, \quad Y_0(\tau_0) = \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) Y(z, \tau_0) dz,$$

$$G(z) = 2A \int_{x(x)}^{\infty} \alpha^2(x) dx.$$

С помощью соотношений (13), (15) и (16) можно написать явное выражение и для величины $\Omega(x, \eta, \tau_0)$, на чем, однако, мы не остановимся. В частном случае, когда $\beta = 0$, формула (15) упрощается и принимает следующий вид:

$$N(x, \eta, \tau_0) = X(\infty, \tau_0)[X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)]. \quad (19)$$

Как и следовало ожидать, при $x \rightarrow \infty$, то есть в далеких крыльях линии $N(x, \eta, \tau_0) \rightarrow 0$. Представляет интерес асимптотическое поведение N в различных частях линии при больших значениях оптической толщины τ_0 . Пользуясь асимптотическими формулами для функций X , Y в случае доплеровского профиля коэффициента поглощения при $\tau_0 \gg 1$ и $z \ll \tau_0$ (см [13]), получаем

$$N(x, \eta, \tau_0) \sim \pi^{-1/4} H(z) \tau_0^{1/2} (\ln \tau_0)^{1/4}, \quad (20)$$

где $H(z)$ - функция Амбарцумяна для полубесконечной атмосферы.

Для $z \approx \tau_0 \gg 1$ имеет место

$$\begin{aligned} X(z, \tau_0) &\sim e^{-t/2} [I_0(t/2) + I_1(t/2)] X(\infty, \tau_0), \\ Y(z, \tau_0) &\sim e^{-t/2} [I_0(t/2) - I_1(t/2)] X(\infty, \tau_0), \end{aligned} \quad (21)$$

где $t = \tau_0/z$; I_0 и I_1 - функции Бесселя мнимого аргумента. С помощью (19) из (21) получаем

$$N(z, \tau_0) \sim 2e^{-t/2} I_0(t/2) X^2(\infty, \tau_0). \quad (22)$$

В частности, при консервативном рассеянии, когда $\lambda = 1$, как известно (см. также приведенные ниже неравенства (28)),

$$X^2(\infty, \tau_0) \sim \sqrt{\pi \tau_0} \sqrt{\ln \tau_0}. \quad (23)$$

Отсюда

$$N(x, \eta, \tau_0) \sim 2e^{-t/2} I_1(t/2) \sqrt{\pi \tau_0} \sqrt{\ln \tau_0}. \quad (24)$$

Знание $N(x, \eta, \tau_0)$ позволяет, в частности, определить $\langle N(0, \tau_0) \rangle$. Действительно, в соответствии с вероятностным смыслом указанных величин (ср. с (2)) имеем

$$\langle N(0, \tau_0) \rangle = 1 + \frac{\lambda}{2} A \int_0^1 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) N(x, \eta, \tau_0) dx. \quad (25)$$

Отсюда, с учетом (19) и (18), находим, что при $\beta = 0$

$$\langle N(0, \tau_0) \rangle = X(\infty, \tau_0). \quad (26)$$

Таким образом, величине $X(\infty, \tau_0)$ можно приписать простой вероятностный смысл: она представляет собой среднее число рассеяний, претерпеваемых квантом, поглощенным первоначально на границе 0 конечной атмосферы. Асимптотическая формула (23) позволяет написать $\langle N(0, \tau_0) \rangle \sim \pi^{-1/4} \tau_0^{1/2} (\ln \tau_0)^{1/4}$, что согласуется с оценками, полученными Соболевым в [5].

Обращаясь к общему случаю $\beta \neq 0$, заметим, что второе слагаемое в соотношении (15), как оказывается, также может рассматриваться как среднее число рассеяний. Оно относится к случаю, когда конечный акт термализации кванта не принимается за рассеяние. Средние величины, определенные таким образом, ниже будут отмечаться звездочкой. Отметим, что аналитические выражения для последних иногда имеют более простой вид, чем выражения одноименных величин, в которых учитывается элементарный акт истинного поглощения. Теперь мы имеем

$$N^*(x, \eta, \tau_0) = \lambda \frac{\alpha(x)}{\nu(x)} X(\infty, \tau_0) [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)], \quad (27)$$

и, следовательно, $\langle N^*(0, \tau_0) \rangle = \lambda X(\infty, \tau_0)$. Для $X(\infty, \tau_0)$ имеют место оценки (см. [5]):

$$[1 - \lambda + 2\lambda L(\tau_0/2, \beta)]^{-1} < X^2(\infty, \tau_0) < [1 - \lambda + \lambda L(\tau_0/2, \beta)]^{-1}, \quad (28)$$

где

$$L(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2(x)}{\nu(x)} E_2[\nu(x)\tau] dx.$$

В следующем разделе мы рассмотрим асимптотическое поведение $L(\tau_0, \beta)$ для больших значений τ_0 , что позволит окончательно определить границы изменения величины $\langle N^* \rangle$.

В завершение настоящего раздела получим относительно простую формулу для величины $\langle \Omega(0, \tau_0) \rangle$. Принимая во внимание очевидное соотношение

$$\langle \Omega(0, \tau_0) \rangle = \frac{\lambda}{2} A \int_0^1 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \Omega(x, \eta, \tau_0) dx, \quad (29)$$

а также формулы (13), (15), (16), нетрудно получить

$$\langle \Omega(0, \tau_0) \rangle = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} G_0 \left(\frac{z}{1 - \beta z} \right) [2X(\infty, \tau_0) - X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)] dz, \quad (30)$$

или с учетом дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции X и Y (см. [13])

$$\langle \Omega(0, \tau_0) \rangle = X(\infty, \tau_0) \int_0^{\tau_0} \frac{\bar{Y}_0(\tau)}{X(\infty, \tau)} d\tau, \quad (31)$$

где

$$\bar{Y}_0(\tau) = \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) Y(z, \tau) \frac{dz}{z}.$$

4. Величины $\langle N^*(\tau, \tau_0) \rangle$ и $\langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle$. Согласно определениям, данным в разделе 2, эти средние величины относятся к кванту, поглощенному первоначально в среде. При полностью некогерентном и изотропном рассеянии функция $\langle N(\tau, \tau_0) \rangle$ определяется из уравнения, аналогичного (3) для атмосферы конечной оптической толщины

$$\langle N(\tau, \tau_0) \rangle = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|, \beta) \langle N(\tau', \tau_0) \rangle d\tau' + 1 + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K_0(|\tau - \tau'|, \beta) d\tau'. \quad (32)$$

Источниковые члены в уравнениях для $\langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle$ и $R_0(\tau, \tau_0)$ те же, что и для одноименных величин в случае полубесконечной атмосферы с единственной разницей, что верхним пределом интегралов будет τ_0 . Вывод уравнения (32) (как и уравнений для других из рассматриваемых средних величин) идентичен выводу, данному в работах [7-9] для полубесконечной атмосферы. Как и выше, удобно вместо $\langle N(\tau, \tau_0) \rangle$ иметь дело с величиной $\langle N^*(\tau, \tau_0) \rangle = \langle N(\tau, \tau_0) \rangle - R_0(\tau, \tau_0)$, которая, как нетрудно убедиться, удовлетворяет уравнению

$$\langle N^*(\tau, \tau_0) \rangle = \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|, \beta) \langle N^*(\tau', \tau_0) \rangle d\tau' + \lambda. \quad (33)$$

Из уравнения (33) и свойств ядерной функции K заключаем, что $\langle N^*(\tau, \tau_0) \rangle = \langle N^*(\tau_0 - \tau, \tau_0) \rangle$ и

$$\langle N^*(0, \tau_0) \rangle \leq \langle N^*(\tau, \tau_0) \rangle \leq \langle N^*(\tau_0/2, \tau_0) \rangle. \quad (34)$$

Если рассмотреть уравнение (33) при $\tau = \tau_0/2$ и заменить величину $\langle N^* \rangle$ в интегральном члене ее верхним пределом $\langle N^*(\tau_0/2, \tau_0) \rangle$, то получим

$$\langle N^*(\tau_0/2, \tau_0) \rangle \leq \frac{\lambda}{1 - \tilde{\lambda} + \lambda L(\tau_0/2, \beta)}. \quad (35)$$

Теперь, с учетом (26), (28), (35), окончательно имеем

$$\frac{\lambda}{[1 - \lambda + 2\lambda L(\tau_0/2, \beta)]^{1/2}} < \langle N^*(\tau, \tau_0) \rangle < \frac{\lambda}{1 - \tilde{\lambda} + \lambda L(\tau_0/2, \beta)}. \quad (36)$$

Аналогичным образом для $\langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle$ находим

$$\frac{\lambda[\delta(\beta) - L_0(\tau_0, \beta)]}{2 - \lambda + \lambda L(\tau_0, \beta)} < \langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle < \frac{\lambda[\delta(\beta) - L_0(\tau_0, \beta)]}{1 - \tilde{\lambda} + \lambda L(\tau_0/2, \beta)}, \quad (37)$$

где

$$L_0(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{v(x)} E_2[v(x)\tau] dx. \quad (38)$$

При $\beta = 0$ из (37) получаем

$$\frac{\lambda \bar{L}_0(\tau_0)}{2 - \bar{\lambda} + \lambda L(\tau_0)} < \langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle < \frac{\lambda \bar{L}_0(\tau_0)}{1 - \bar{\lambda} + \lambda L(\tau_0/2)}, \quad (39)$$

где

$$\bar{L}_0(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - E_2[\alpha(x)\tau]\} dx. \quad (40)$$

Чтобы использовать полученные выше оценки при больших значениях оптической толщины, необходимо найти соответствующие асимптотики функций L , L_0 , $\bar{L}_0$. Данный вопрос при $\beta = 0$ подробно рассматривается в [13]. Некоторые из полученных там результатов мы обобщим здесь на случай $\beta \neq 0$. Как показано в [13], $L(\tau, \beta) \sim L(\tau) e^{-\beta\tau} I(\beta\tau)$, где $L(\tau) = L(\tau, 0)$ и $I(s) = 1 - 2se^s E_1(s) + se^s E_2(s)$. Нетрудно показать, что при $s \gg 1$ имеет место $I(s) \sim 2/s^2$. С учетом хорошо известной асимптотики $L(\tau) \sim (2\sqrt{\pi\tau\sqrt{\ln\tau}})^{-1}$ приходим к нужному результату:

$$L(\tau, \beta) \sim A e^{-\beta\tau} / (\beta\tau)^2 \tau \sqrt{\ln\tau} \quad (41)$$

для больших $\beta\tau$. Аналогичные рассуждения для $L_0(\tau, \beta)$ дают $L_0(\tau, \beta) \sim L_0(\tau) \tau e^{-\beta\tau} I_0(\beta\tau)$, где $I_0(s) = e^s [E_1(s) - E_2(s)]$. Поскольку $I_0(s) \sim s^{-2}$ при $s \gg 1$, то $L_0(\tau) \sim A/\tau \sqrt{\ln\tau}$ и

$$L_0(\tau, \beta) \sim A e^{-\beta\tau} / (\beta\tau)^2 \sqrt{\ln\tau}. \quad (42)$$

Что касается функции $L_0(\tau)$, то здесь мы приведем окончательный результат, полученный в [13],

$$\bar{L}_0(\tau) \sim 2A \sqrt{\ln\tau} \quad (43)$$

при $\tau \rightarrow \infty$. Приведенные оценки представляют большую важность при решении различных астрофизических задач. Особый интерес представляют вопросы, связанные с диффузией $Ly\alpha$ -квантов в оптически толстых средах, как, например, солнечные протуберанцы, туманности и т.д. В связи с этим следует отметить, что при $1 - \lambda \ll 1$ величина $\langle N^* \rangle$ определяется, как это явствует из (36) и (41), значением величины $\beta\delta(\beta)$ ($\sim 10^4$ при $\beta \sim 10^4$), а не значением $\tau_0 \sqrt{\ln\tau_0}$, которое при $\tau_0 \sim 10^4$ (что обычно принимается для излучения в линии $Ly\alpha$ в планетарных туманностях [15]) оказывается порядка 10^5 . Другими словами, существует верхний предел среднего числа рассеяний $Ly\alpha$ -квантов в среде, которое определяется поглощением в непрерывном спектре.

Из неравенств (36) следует, что с увеличением оптической толщины среднее число рассеяний при $\beta \neq 0$ стремится к своему предельному

значению гораздо быстрее, чем при отсутствии поглощения в континууме. Для сильно диссипативных сред в пределе имеем

$$(1 - \tilde{\lambda})^{-1/2} < \langle N^*(\tau, \tau_0) \rangle < (1 - \tilde{\lambda})^{-1}. \quad (44)$$

В противоположном случае слабо диссипативной среды, когда $\tilde{\lambda} \approx 1$, величина $\langle N^*(\tau, \tau_0) \rangle$ стремится к бесконечности не быстрее, чем $\tau_0 \sqrt{\ln \tau_0}$, и не медленнее, чем $\tau_0^{1/2} (\ln \tau_0)^{1/4}$. Что касается $\langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle$, оно стремится к бесконечности как $\sqrt{\ln \tau_0}$ (ср. (39), (43)),

5. Величины $\bar{N}^*$ и $\bar{\Omega}$. Данные статистически средние величины представляют особый интерес в приложениях, поэтому заслуживают отдельного рассмотрения. По определению,

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{\tau_0} \varepsilon(\tau, x, \eta) N(\tau, x, \eta, \tau_0) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{\tau_0} \varepsilon(\tau, x, \eta) d\tau}, \\ \bar{\Omega} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{\tau_0} \varepsilon(\tau, x, \eta) \Omega(\tau, x, \eta, \tau_0) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{\tau_0} \varepsilon(\tau, x, \eta) d\tau}, \end{aligned} \quad (45)$$

где $\varepsilon(\tau, x, \eta)$ - мощность первичных источников энергии. В том случае, когда $\varepsilon(\tau, x, \eta)$ представимо в виде произведения $S^*(\tau)\alpha(x)$, формулы (45) преобразуются, принимая более удобный для расчетов вид. Покажем это на примере второй из приведенных формул. Учитывая, что

$$\langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle = \frac{\lambda}{2} A \int_{-1}^1 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \Omega(\tau, x, \eta, \tau_0) dx, \quad (46)$$

будем иметь

$$\bar{\Omega} = \int_0^{\tau_0} S^*(\tau) \langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle d\tau / \lambda \int_0^{\tau_0} S^*(\tau) d\tau. \quad (47)$$

В свою очередь, для $\langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle$ можно написать

$$\langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle = \frac{\lambda}{2} \beta \int_0^{\tau_0} G(\tau, t) dt \int_0^{\tau_0} K_0(|t - \tau'|, \beta) d\tau', \quad (48)$$

где $G(\tau, \tau')$ - функция Грина уравнения (32). Отсюда для случая полного перераспределения по частотам получаем

$$\bar{\Omega} = \int_0^{\tau_0} S(\tau) \left[\delta(\beta) - \frac{1}{2} L_0(\tau, \beta) - \frac{1}{2} L_0(\tau_0 - \tau, \beta) \right] d\tau / \int_0^{\tau_0} S^*(\tau) d\tau, \quad (49)$$

где $S(\tau)$ - функция источников уравнения переноса излучения. Насколько нам известно, данная формула для определения среднего времени пребывания кванта в среде приводится впервые. Она является аналогом известной формулы для среднего числа рассеяний

$$\bar{N}^* = \int_0^{\tau_0} S(\tau) d\tau / \int_0^{\tau_0} S^*(\tau) d\tau. \quad (50)$$

Если $\beta = 0$, то для изотермической атмосферы справедлива простая формула [13],

$$\bar{N}^* = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} X^2(\infty, \tau) d\tau. \quad (51)$$

Чтобы обобщить ее на случай $\beta \neq 0$, введем функцию $P(\tau, z, \tau_0)$, удовлетворяющую уравнению, отличающемуся от уравнения для $\langle N(\tau, \tau_0) \rangle$ (ср. (32)) лишь свободным членом, который теперь равен $(\lambda/4\pi)e^{-1/z}$. Тогда, очевидно, имеем

$$\langle N(\tau, \tau_0) \rangle = \frac{4\pi}{\lambda} [1 + \lambda\beta\delta(\beta)] P(\tau, \infty, \tau_0) - 2\pi\bar{\gamma}_0(\tau, \beta, \tau_0), \quad (52)$$

где

$$\bar{\gamma}_0(\tau, \beta, \tau_0) = \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) [P(\tau, z, \tau_0) + P(\tau_0 - \tau, z, \tau_0)] dz.$$

Используя связь между $P(\tau, z, \tau_0)$ и функциями X и Y , получаем требуемый результат

$$\bar{N}^* = \frac{1 + \lambda\beta\delta(\beta)}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} X^2(\infty, \tau) d\tau + \beta X(\infty, \tau_0) \gamma(\lambda, \beta). \quad (53)$$

Поступая аналогичным образом, с учетом того, что

$$\langle \Omega(\tau, \tau_0) \rangle = 4\pi\delta(\beta) P(\tau, \infty, \tau_0) - 2\pi\bar{\gamma}_0(\tau, \beta, \tau_0), \quad (54)$$

получаем

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} X(\infty, \tau) Z(\tau) d\tau, \quad (55)$$

где

$$Z(\tau) = \delta(\beta) X(\infty, \tau) - Y_0(\tau), \quad Y_0(\tau) = \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) Y(z, \tau) dz.$$

В частном случае, когда $\tau_0 \rightarrow \infty$, имеем $\bar{\Omega} = \delta(\beta)/(1-\tilde{\lambda})$. Когда $\beta \rightarrow 0$, среднее время стремится к бесконечности как $\sqrt{\ln(1/\beta)}$ независимо от значения λ .

THE STATISTICAL DESCRIPTION OF THE
RADIATION FIELD IN HOMOGENEOUS MEDIUM
OF FINITE OPTICAL THICKNESS

A.G.NIKOGHOSSIAN

The problem of finding the statistical mean quantities which characterize the radiation field in a semi-infinite atmosphere has been considered in a series of the author's papers. The present paper generalizes some of previous results to the case of a medium of finite optical thickness. We determine the mean number of scatterings underwent by a quantum in the course of random walk in the atmosphere and the average time it spent in that. Three different types of mean quantities are treated dependent on that over which characteristics of quantum we average. Special attention is payed to asymptotical behavior of quantities we found for the large optical thickness of the medium.

Key words: *radiative transfer: methods analytical*

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Амбарцумян, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
2. В.В.Соболев, Астрофизика, 2, 135, 1966.
3. В.В.Соболев, Астрофизика, 2, 239, 1966.
4. В.В.Соболев, Астрофизика, 3, 5, 1967.
5. В.В.Соболев, Астрофизика, 3, 137, 1967.
6. В.В.Иванов, Астрофизика, 6, 643, 1970.
7. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 21, 323, 1984.
8. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 21, 579, 1984.
9. А.Г.Никогосян, Астрофизика, 24, 149, 1986.
10. Г.А.Арутюнян, А.Г.Никогосян, Астрофизика, 27, 335, 1987.
11. A.G.Nikoghossian, Astrophys. J., 483, 849, 1997.
12. A.G.Nikoghossian, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 61, 345, 1999.
13. В.В.Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
14. С.Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
15. В.В.Соболев, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1985.