

УДК: 524.3-423

ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВЕЗДНЫХ
КОНФИГУРАЦИЙ ИЗ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.А.САДОЯН

Поступила 4 ноября 2005

Принята к печати 17 февраля 2005

В статье рассматривается гравитационное излучение вращающихся и осциллирующих звездных конфигураций, описываемых уравнением состояния несжимаемой жидкости. Методом, используемым в данной статье, можно определить частоты и амплитуды гравитационных волн для произвольных значений центральных плотностей. При плотностях, соответствующих нейтронным звездам, основные параметры гравитационного излучения согласуются с результатами, полученными ранее для реалистических моделей. Звездные конфигурации с несжимаемой жидкостью, в зависимости от центральной плотности, могут излучать гравитационные волны в широком диапазоне частот: от 10^2 до 10^4 Гц.

1. *Введение.* Звездные модели, состоящие из несжимаемой жидкости, хорошо описывают звездные конфигурации при больших плотностях. Многие задачи теоретической астрофизики, такие, как структура внутреннего строения, эффекты, связанные с вращением, приливные явления, задачи стабильности и пульсации звезд аналитически можно решить только в случае несжимаемой жидкости.

Вращающиеся конфигурации с несжимаемой жидкостью были исследованы в работе [1], где были получены основные параметры несжимаемой жидкости в приближении Ω^2 . В исследованиях сверхплотных небесных тел уравнение состояния при больших плотностях можно заменить моделью несжимаемой жидкости, что упрощает расчеты и дает общее представление о свойствах конфигурации. Тем не менее, модель несжимаемой жидкости, особенно в рамках общей теории относительности, нужно применять с осторожностью, так как скорость звука в несжимаемой жидкости может превышать скорость света. Сложности возникают также при рассмотрении колебаний в конфигурациях с несжимаемой жидкостью.

Как известно, для регистрации гравитационных волн создающимися и уже работающими гравитационными детекторами необходим детальный численный анализ, для чего нужны точные значения основных характеристик гравитационного излучения. В данной работе рассчитаны амплитуды и частоты гравитационных волн вращающихся и осциллирующих звездных конфигураций, описываемых уравнением

состояния несжимаемой жидкости. Исследование гравитационного излучения таких конфигураций и сравнение результатов с результатами, полученными в других моделях звездных конфигураций [2-4], представляет большой интерес.

Как увидим далее, частоты гравитационного излучения, полученные в модели несжимаемой жидкости с плотностями $\rho \sim 10^{14}$ г/см³, совпадают с ожидаемыми частотами излучения нейтронных звезд - порядка 1 кГц. Отметим также, что амплитуды гравитационного излучения совпадают по порядку величины с результатами, полученными в более реалистических моделях [5].

Во втором разделе исследуется механизм гравитационного излучения вращающихся и колеблющихся конфигураций, приводится формула для максимально возможных значений потоков энергии гравитационного излучения. В третьем разделе приводятся основные результаты для амплитуд и частот гравитационных излучений от сверхплотных звездных конфигураций.

2. Гравитационное излучение вращающихся и колеблющихся сверхплотных конфигураций. Аксиально симметричные вращающиеся конфигурации могут излучать гравитационные волны, если квадрупольный момент, возникающий вследствие вращения, изменяется с течением времени из-за колебаний.

Для упрощения расчетов допустим, что колебания характеризуются формулой $x_\alpha = x_\alpha^0(1 + \eta \sin \omega t)$, где ω - циклическая частота колебаний, а $\eta \ll 1$ амплитуда радиальных колебаний. Такие колебания называются "подобными колебаниями" [2] и приводят к простой зависимости квадрупольного момента от времени.

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} x^2 \right) d^3x \approx Q_{\alpha\beta}^0 (1 + 2\eta \sin \omega t), \quad (1)$$

где пренебрегаются члены высшего порядка по η . $Q_{\alpha\beta}^0$ - компоненты квадрупольного момента конфигурации, находящейся в состоянии равновесия. Выберем координатную систему так, чтобы ось z совпала с осью вращения, тогда

$$Q^0 = -Q_{xx}^0 = 2Q_{yy}^0 = 2Q_{zz}^0. \quad (2)$$

Мощность гравитационного излучения определяется формулой [6]

$$J = \frac{G}{5c^5} \left| \frac{d^3}{dt^3} Q_{\alpha\beta} \right|^2, \quad (3)$$

следовательно

$$J = \frac{6G}{5c^5} \eta^2 \omega^6 |Q^0|^2 \cos^2 \omega t' = J_0 \cos^2 \omega t', \quad (4)$$

где G - гравитационная постоянная, c - скорость света, r - расстояние до источника, $t' = t - r/c$. Для того, чтобы волновая форма и угловое распределение излучения имели простой вид, перейдем к поперечной калибровке со следом, равным нулю (ТТ-калибровка), а ось z направим параллельно оси вращения. При этом амплитуды двух поляризаций гравитационных волн будут задаваться формулами

$$h_{\pm} = \frac{1}{2}(h_{xx} - h_{yy}) = \frac{3GQ^0}{c^4 r} \eta \omega^2 \sin^2 \theta \sin \omega t', \quad (5)$$

$$h_x = h_{xy} = 0, \quad (6)$$

где θ - угол между осью вращения и волновым вектором. Таким образом, при осцилляции вращающейся системы гравитационное излучение имеет только плюс-поляризацию, амплитуда которой определяется

$$h_{\pm} = \sqrt{\frac{15GJ_0}{2c^3}} \frac{1}{r\omega} \sin^2 \theta \sin \omega t' = h_0 \sin^2 \theta \sin \omega t', \quad (7)$$

где J_0 - интенсивность гравитационного излучения. Амплитуда гравитационного излучения не может быть сколько угодно большой, она ограничена сверху. Действительно, из формулы (4) для амплитуды подобных колебаний η имеем

$$\eta = \frac{1}{\omega^3 |Q_{zz}^0|} \sqrt{\frac{5J_0 c^5}{6G}} \ll 1 \quad (8)$$

или

$$J_0 \ll \omega^6 |Q_{zz}^0|^2 \frac{6G}{5c^5}. \quad (9)$$

Таким образом, можно оценить верхний предел амплитуды гравитационного излучения для вращающихся конфигураций, которые совершают подобные колебания. Оценим интенсивность гравитационного излучения нейтронных звезд.

Интенсивность гравитационного излучения, то есть энергия, выделенная в единицу времени, для вращающихся нейтронных звезд с квадрупольными моментами порядка 10^{44} гсм² [7] и частотами радиальных пульсаций 10^3 Гц [8], равна $J_{0max} \sim 10^{46}$ эрг/с. Для амплитуды гравитационной волны из (7) получаем

$$h_0 = \frac{1}{r\omega} \sqrt{\frac{15GJ_0}{2c^3}}. \quad (10)$$

Перейдем к обсуждению источников гравитационного излучения объектов из несжимаемой жидкости.

3. *Гравитационное излучение вращающихся несжимаемых конфигураций.* Как видно из [9,10], модели с несжимаемой жидкостью сохраняют актуальность благодаря своей простоте и возможности аналитических вычислений. В работе [11] обсуждаются реальные уравнения состояния нейтронных звезд, которые соответствуют максимально несжимаемым нейтронным звездам. Полученные там основные интегральные параметры, в частности массы нейтронных звезд (до 2.4 солнечных масс), совпадают с максимальными массами, полученными в рамках моделей несжимаемой жидкости.

Частоты колебаний невращающейся конфигурации были впервые найдены Чандрасекаром [12]. Обсуждение стабильности по отношению к радиальным пульсациям для вращающихся несжимаемых конфигураций с учетом первых релятивистских поправок можно найти в [13]. Согласно этой работе, для конфигураций с веществом, описываемым политропным уравнением состояния, безразмерная частота Σ , связанная с частотой ω соотношением $\Sigma^2 = 3\omega^2/8\pi G\rho$, равна

$$\Sigma^2 = \left(\gamma - \frac{4}{3}\right) + 4\beta\left(\frac{5}{3} - \gamma\right) - \frac{1}{42}\frac{R_g}{R}(54\gamma - 53) + \frac{2}{21}\beta\frac{R_g}{R}(81\gamma - 106), \quad (11)$$

где $\beta = \Omega^2/8\pi G\rho$ - безразмерная частота вращения, Ω - циклическая частота вращения, R_g/R - отношение шварцшильдовского радиуса к радиусу звезды, γ - коэффициент в уравнении состояния $P = P_0 \rho^\gamma / \rho_0^\gamma$, где P - давление, а ρ - плотность, P_0 , ρ_0 - соответственно давление и плотность в центре звезды. При выводе формулы (11) не учитывались слагаемые порядка $(R_g/R)^2$, а также предполагалось постоянство плотности. Последнее условие полностью выполняется для несжимаемой жидкости, а для политропных конфигураций оно выполняется приблизительно.

Для описания релятивизма модели вводится параметр $\alpha = P_0/\rho_0 c^2$. В случае несжимаемой жидкости $\rho_0 = \rho = \text{const}$, параметр α изменяется от 0 до ∞ в отличие от реального вещества, где α изменяется от 0 до 1. В несжимаемой жидкости возможно нарушение принципа причинности: скорость звука $V_s = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0} = c\sqrt{\gamma\alpha}$ может быть сколько угодно большой, так как $\gamma \rightarrow \infty$.

Для дальнейшего обсуждения введем новый параметр $\tau = (3\alpha + 1)/(\alpha + 1)$, который уже изменяется на отрезке [1,3] и удовлетворяет соотношению [13]

$$\frac{R_g}{R} = \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2}. \quad (12)$$

Для нахождения частоты радиальных пульсаций, в уравнение (11) подставим максимальное значение $\gamma = 5/3$, а для β воспользуемся

максимальным значением в ньютоновской теории: $1/6$, что соответствует "кеплеровской" скорости - максимально допустимой скорости вращения, при которой отсутствует истечение вещества с экватора. Это дает нам возможность оценить верхний предел для амплитуды гравитационных волн. Соотношение R_e/R однозначно определяется из (12).

В табл.1 приведены характеристики гравитационного излучения конфигураций из несжимаемой жидкости с плотностью $\rho = 4.1 \cdot 10^{14}$ г/см³, соответствующие нейтронным звездам.

Таблица 1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ
 ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КОНФИГУРАЦИЙ
 НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С $\rho = 4.1 \cdot 10^{14}$ г/см³,
 ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ С АМПЛИТУДОЙ $\eta = 10^{-4}$.

τ	α	M_{rot} / M_{\odot}	R_e x 10^6 см	Q_{zz} x 10^{44} г см ²	ω x 10^3 Гц	h_0 (г/кпк) x 10^{-22}	J_0 x 10^{42} эрг/с
1.05	0.025641	0.189832	0.604	0.011	8.216	0.006	0.013
1.1	0.052632	0.484977	0.825	0.102	7.728	0.049	0.734
1.2	0.111111	1.132955	1.095	0.884	6.855	0.333	26.745
1.3	0.176471	1.74404	1.266	2.734	6.089	0.812	125.584
1.4	0.25	2.300791	1.386	3.946	5.404	0.924	127.932

Примечание: τ и α - параметры релятивизма, M_{rot} - масса вращающейся конфигурации в единицах солнечных масс, R_e - экваториальный радиус, Q_{zz} - квадрупольный момент, ω - частота излучения, h_0 - амплитуда гравитационных волн для источников, находящихся на расстоянии 1 кпк, и J_0 - поток энергии у источника. Интегральные параметры были получены для кеплеровской скорости вращения $\Omega_{max} = 10710.86$. Значения M_{rot} , R_e и Q_{zz} взяты из работы [13].

Основные интегральные параметры вращающихся конфигураций приведены в зависимости от параметров релятивизма τ и α . Массы, экваториальные радиусы, квадрупольные моменты конфигураций из несжимаемой жидкости были взяты из работы [13]. Частоты гравитационного излучения вращающейся и колеблющейся конфигурации совпадают с частотой радиальных колебаний, определяемой из (11) с учетом (12). Амплитуды гравитационного излучения конфигураций, описываемых моделью несжимаемой жидкости, определяются формулой

$$h_0 = \frac{3GQ^0 \eta \omega^2}{c^4 r}, \quad (13)$$

где для r было выбрано значение 1 кпк, а $\eta = 10^{-4}$. Значение η определяется источником энергии подобных колебаний. Разные типы источников энергии обсуждаются в работах [3-5,14]. Конкретное значение η было взято из работы [5], где обсуждается реальная модель нейтронной звезды, а источником энергии гравитационного излучения

является деформационная энергия звезды, выделяющаяся в процессе замедления вращения. В той же работе в качестве источника энергии излучения рассматривается энергия, выделяющаяся при скачках угловой скорости вращения нейтронных звезд. Отметим, что значения η получаются в том же диапазоне.

Основные характеристики гравитационного излучения нейтронных звезд в рамках модели несжимаемой жидкости согласуются с результатами, полученными в реальных моделях.

В таблице приведены максимальные значения интегральных параметров и характеристик гравитационного излучения для конфигураций, вращающихся с максимально допустимыми угловыми скоростями.

На рис.1 приведены зависимости амплитуд гравитационного излучения от частоты для источников, состоящих из несжимаемой жидкости. Кривые соответствуют конфигурациям с массами соответственно 2.4, 1.4 и 0.8 солнечных масс. Центральные плотности и давления были выбраны таким образом, что вдоль кривых массы конфигураций оставались неизменными. Для сравнения на рис.1 приведены кривые чувствительности для наземной обсерватории LIGO и для проектируемой космической обсерватории LISA. Как видно из рис.1 конфигурации с несжимаемой жидкостью, в зависимости от центральной плотности, могут излучать гравитационные волны в диапазоне частот: от 10^{-2} до 10^4 Гц. Заметим, что

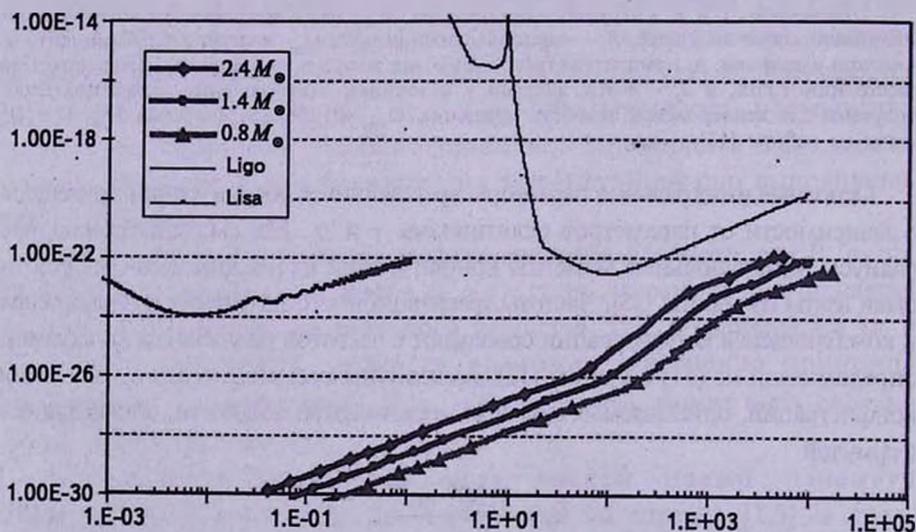


Рис.1. Зависимость амплитуд гравитационного излучения от частоты для источников, состоящих из несжимаемой жидкости и вращающихся с максимально допустимой угловой скоростью. Кривые соответствуют конфигурациям с массами соответственно 2.4, 1.4 и 0.8 солнечных масс. Центральные плотности и давления были выбраны таким образом, что вдоль кривых массы конфигураций оставались неизменными. Амплитуда собственных колебаний $\eta=10^{-4}$. На рисунке приведены также кривые чувствительности ЛИГО и ЛИЗА.

современные детекторы гравитационных волн еще не в состоянии регистрировать сигналы от изолированных осциллирующих сверхплотных конфигураций, но, учитывая темп усовершенствований технологий, применяемых в детекторах, можно ожидать, что в ближайшем будущем порог чувствительности детекторов гравитационных волн возрастет на несколько порядков.

4. *Заключение.* В работе найдены основные параметры гравитационного излучения сверхплотных звездных конфигураций, описываемых моделью несжимаемой жидкости.

Получены частоты и максимальные амплитуды гравитационных волн для произвольных значений плотностей конфигураций с несжимаемой жидкостью. Эти значения получены для максимально возможных угловых скоростей вращения в приближении Ω^2 .

Звездные конфигурации с несжимаемой жидкостью, в зависимости от центральной плотности, могут излучать гравитационные волны в широком диапазоне частот: от 10^{-2} до 10^4 Гц. В случае регистрации "долгоживущих" источников гравитационных волн на частотах больших 10 кГц можно предполагать, что это изолированные звездные конфигурации с плотностью порядка 10^{16} г/см³.

Работа выполнена в рамках гранта CRDF/NFSAT ARP2-3232-YE-04. Выражаю искреннюю благодарность академику Д.М.Седракяну и профессору К.М.Шахабасяну за помощь и полезные советы, а также М.В.Айрапетяну за интересные обсуждения.

Ереванский государственный университет,
Армения, e-mail: asadoyan@www.physdep.r.am

GRAVITATIONAL RADIATION OF STELLAR CONFIGURATIONS CONSISTING OF INCOMPRESSIBLE LIQUID

A.H.SADOYAN

Gravitational radiation from rotating and oscillating stellar configurations consisting of incompressible liquid is investigated. By the method used in the paper, frequencies and amplitudes of gravitational radiation for arbitrary values of central densities can be obtained. For densities corresponding to neutron stars main parameters of gravitational radiation agreed

with previous results obtained for realistic configurations. Stellar configurations with incompressible matter, depending on central density, can emit gravitational waves in wide range of frequencies: from 10^{-2} to 10^6 Hz.

Key words: *stars: neutron - gravitational radiation: stellar configurations*

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.М.Седракян, Г.Г.Арутюнян, *Астрофизика*, 7, 259, 1971.
2. Ю.Л.Вартанян, Г.С.Аджян, *Астрон. ж.*, 54, 1047, 1977.
3. М. Benacquista, D.M.Sedrakian, M.V.Hairapetyan, K.M.Shahabasyan, A.A.Sadoyan, *Astrophys. J.*, 596, L223, 2003.
4. Д.М.Седракян, М.Бенаквиста, М.В.Айрапетян, К.М.Шахабасян, А.А.Садоян, *Астрофизика*, 47, 381, 2004.
5. М.Бенаквиста, Д.М.Седракян, М.В.Айрапетян, К.М.Шахабасян, А.А.Садоян, *Астрофизика*, 46, 4, 2003.
6. Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уиллер, *Гравитация*, Мир, М., 1977.
7. Г.Г.Арутюнян, Д.М.Седракян, Е.В.Чубарян, *Астрон. ж.*, 49, 1216, 1972.
8. Г.Г.Арутюнян, Д.М.Седракян, Е.В.Чубарян, *Астрофизика*, 7, 467, 1971.
9. P.P.Fiziev, "Novel Geometrical Models of Relativistic Stars. II. Incompressible Stars and Heavy Black Dwarfs", arXiv:astro-ph/0409458, 2004.
10. M.Sinha, M.Bagchi et al., *Phys. Lett.*, B590, 120, arXiv:hep-ph/0212024, 2004.
11. T.S.Olson, *Phys. Rev.*, C63, 015802, arXiv:astro-ph/0011107, 2000.
12. S.Chandrasekhar, *Astrophys. J.*, 140, 19, 1964.
13. Д.М.Седракян, *Докторская диссертация*, Ереван, 1973.
14. D.M.Sedrakian, M.Benacquista, M.V.Hairapetyan, K.M.Shahabasyan, A.A.Sadoyan, *Classical and Quantum Gravity*, 21, 5493, 2004.